数理解析研究所講究録
第743巻 1991年 82-85

Norm Inequality for Operator Monotone Functions

大阪教育大　藤井淳一（Jun Ichi FUJII）

昨年末から、Loewner-Heinz の不等式と同値な不等式：

(1) $\|A^rB^r\| \leqq \|AB\|^r \quad (0 \leqq r \leqq 1)$ 　　A, B は正作用素

を巡ってさまざまな議論がなされたが、ここではその一般化について見てみたい。
すぐに考えられることは、r乗の作用素単調性から、作用素単調関数 f による

(2) $\|f(A)f(B)\| \leqq f(\|AB\|)$

という形であるが、これはあまりよくないことが、簡単な例によってわかる。 ここで、作用素単調関数とは次を満たす0でない非負連続関数 f とし、そのクラスをOMとかく：

(3) $0 \leqq A \leqq B \implies 0 \leqq f(A) \leqq f(B)$

一般化がうまくいかない原因は、(2) が一般には homogeneous でないことにあり、それに代わるある種の条件がfについて必要と思われる。さらに、(1)において、作用素単調関数として、r乗の特殊性に注意する必要がないだろうか。

実は、久保-安藤による作用素平均の理論において、r乗は self-adjoint な作用素単調関数になっているという事情がある。adjoint * の典型的な例は、代表的な平均，算術平均 a，幾何平均 g，調和平均 h においてみられ、$a^*=h$，$h^*=a$，$g^*=g$ という関係がある。
adjoint * の定義を関数的に述べるならば、

(4) $f^*(t)=1/f(1/t)$.

このとき、次のことがわかる：

【定理１】 submultiplicative な作用素単調関数 f に対して、

(5) $$\| f(A)f^*(B) \| \leqq f(\| AB \|) \qquad (A,\ B \geqq 0).$$

ここで、f が submultiplicative とは、次を満たすことをいう：

(6) $$f(ts) \leqq f(t)f(s).$$

submultiplicative な作用素単調関数 f については、次のことがわかる：

① $f(1) \geqq 1$． $f(1)=1 \iff f$：mutiplicative

② f^*：anti-submultiplicative

③ $F_{c,d}(t) \equiv c+df(t)$：submultiplicative $\quad (c,\ d \geqq 1)$

これより、一見自明でないような正作用素のノルム不等式がえられる。たとえば：

$$\| (1+A)B(1+B)^{-1} \| \leqq 1+\| AB \|$$

submultiplicativeでないような関数（例えば $\log 1+t$）でも、③の変換によって、submultiplicativeになることがある（$1+\log 1+t$）。例に対応するノルム不等式は：

$$\| \{1+\log(1+A)\}\{1+\log(1+B^{-1})\}^{-1} \| \leqq 1+\log(1+\| AB \|)$$

また、（１）の不等式と同様に、一般の作用素 X,Y に対しては、次のように一般化できる：

(5') $$\| f(|X|)f^*(|Y^*|) \| \leqq f(\| XY \|).$$

一方、定理１の証明において、作用素単調性の次の性質が利用されたのだった：

(7) $$0 \leqq A^2 \leqq B^2 \implies 0 \leqq f(A)^2 \leqq f(B)^2$$

この性質を満たすような submultiplicative な単調関数であれば定理１は成立する。

たとえば、$\sqrt{1+t^2}$ などがそれであるが、これは作用素単調でないので(7)を満たすクラスは

properly に、作用素単調のクラスよりも大きい。このような作用素単調関数の一般化は、既に Hansen によっても試みられているが、ここでもそれに習って一般化を試みる。(7)と同様に、

$$0 \leqq A^n \leqq B^n \implies 0 \leqq f(A)^n \leqq f(B)^n \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{8}$$

を満たす非負連続関数をn-作用素単調と呼び、そのクラスを OM_n と書く。そのとき、次のことがわかる：

【定理２】　次のように定められた$\Phi_n : \mathrm{OM}_n \to \mathrm{OM}$ は、bijection である：

$$\Phi_n(F)(t) = F(t^{1/n})^n.$$

【定理３】　非負関数 F が、定数関数でないとき、$F \in \mathrm{OM}_n$ の同値条件は、
F が、角領域 $\{ z \mid 0 < \operatorname{Arg} z < \pi/n \}$ への解析接続を持ち、これを不変にすることである。

これらのことから、$\mathrm{OM}_n \subsetneqq \mathrm{OM}_{n+1}$がわかるし、また、$\mathrm{OM}_n$が、合成によって閉じていることもすぐにわかる。したがって、作用素単調関数のさまざまな積分表示を利用すれば、n-作用素単調関数の積分表示もわかる。たとえば、久保-安藤理論のそれを利用すれば、

$$F(t) = a + b t^n + \int_0^\infty \frac{t^n(1+x)}{t^n + x} \, d\mu(x)$$

（ここで $a, b \geqq 0$ で、$d\mu$ は、$[0,\infty)$上の正Radon測度）とかける。

References

[1] H.O.Cordes: *Spectral Theory of Linear Differential Operators and Comparison algebras*, London Math. Soc. Lecture Note Series 76, 1987.

[2] W.F.Donoghue,Jr.: The interpolation of quadratic norms, Acta Math., 118(1967), 251-270.

[3] W.F.Donoghue,Jr.: *Monotone matrix functions and analytic continuation*, Berlin, Heiderberg, New York, Springer 1974.

[4] J.I.Fujii: Operator monotone functions and Donoghue's theorem, Math. Japon., 31(1986), 319-328.

[5] J.I.Fujii, F.Kubo and K.Kubo: A parametrization between operator means, Math. Japon., 33(1988), 201-208.

[6] J.I.Fujii and M.Fujii: A norm inequality for operator monotone functions, to appear.

[7] J.I.Fujii and M.Fujii: An analogue to Hansen's theory of generalized Loewner's functions, to appear.

[8] T.Furuta: Norm inequalities equivalent to Loewner-Heinz theorem, Reviews in Math. Phys., 1

[9] F.Hansen: Selfadjoint means and operator monotone functions, Math. Ann., 256(1981), 29-35.

[10] F.Kubo and T.Ando: Means of positive linear operators, Math. Ann., 246(1980), 205-224.

[11] G.K.Pedersen: Some operator monotone functions, Proc. Amer. Math. Soc., 36(1972), 309-310.