数理解析研究所講究録
第 743 巻 1991 年 145-163

SCHUR積作用素のノルム

北海道教育大　大久保　和義 (Kazuyoshi Okubo)
北大　応電研　安藤　毅 (Tsuyoshi Ando)

1. はじめに

M_nを $n \times n$ 複素行列全体からなる線形空間とする．$A \in M_n$ に対して，M_n 上の線形写像（Schur 積作用素）S_A を $S_A(X) = A \circ B$ で定義する．ここで，$A = (a_{ij})$，$B = (b_{ij})$ に対して $A \circ B = (a_{ij} \cdot b_{ij})$（$A$ と B の Schur 積，あるいは Hadamard 積という）とする．

Schur 積の例としては，次のようなものがある．

例１．f, g を連続な周期 2πの関数とする．このとき，

$$a_k = \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} f(\theta)\, d\theta, \quad b_k = \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} g(\theta)\, d\theta \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

として，

$$h(\theta) = (f * g)(\theta) = \int_0^{2\pi} f(\theta - t) g(t)\, dt$$

$$c_k = \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} h(\theta)\, d\theta$$

とすると，$c_k = a_k \cdot b_k$ となる．従って，T_f を f の *Toeplitz* 行列とするとき（*i.e.* $T_f = (a_{i-j})$），$T_{f*g} = T_f \circ T_g$ となる．

例２．f を (a,b) から R への連続微分可能な関数とする．$A, B \in M_n$ を固有値が (a,b) に入るエルミート行列として，$g(t)$ を

$$g(t) = f(tA + (1-t)B) \quad t \in (0,1)$$

で定義する．ユニタリー行列 U_t を用いて $tA + (1-t)B = U_t \mathrm{diag}(\lambda_i(t)) U_t^*$ と表されるが，このとき，$g'(t) = U_t \left[K_f(\{\lambda_i(t)\}) \circ (U_t^*(A-B)U_t) \right] U_t^*$ となる．ただし，ここで，$K_f(\{\lambda_i(t)\})$ は

$$K_f(\{\lambda_i(t)\})_{pq} = \begin{cases} f'(\lambda_p(t)) & (\lambda_p(t) = \lambda_q(t)) \\ \dfrac{f(\lambda_p(t)) - f(\lambda_q(t))}{\lambda_p(t) - \lambda_q(t)} & (\lambda_p(t) \neq \lambda_q(t)) \end{cases} .$$

M_n 上には様々なノルムが考えられるが，ここでは，spectral ノルム

$$\|A\|_\infty = \sup_x \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

と，numerical radius norm

$$w(A) = \sup_x \frac{|< Ax|x >|}{\|x\|^2}$$

を考える．ただし，$\|\cdot\|$ は C^n 上の Euclidean norm，$<\cdot|\cdot>$ は C^n 上の内積を表す．$w(\cdot)$ と $\|\cdot\|_\infty$ に関しては，次の関係が成り立つ．

$$w(A) \le \|A\|_\infty \le 2 \cdot w(A) \quad (A \in M_n) \tag{1}$$

S_A は M_n 上の線形作用素であるから，M_n 上の ノルム に関して S_A の induced norm が考えられる．我々は $\|\cdot\|_\infty, w(\cdot)$ に関する S_Aの induced norm をそれぞれ，$\|S_A\|_\infty, \|S_A\|_w$ で表す．即ち，

$$\|S_A\|_\infty = \sup_X \frac{\|A \circ X\|_\infty}{\|X\|_\infty},$$

$$\|S_A\|_w = \sup_X \frac{w(A \circ X)}{w(X)}$$

で定義する．話を進める上で，以後用いられる用語について説明しておく．M_n 上の エルミート行列 A, B に対して $A \ge B$ を $A - B$ が 半正値行列であると定義する．また，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in C^n$ に対して対角行列 D_xを $D_x = \mathrm{diag}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ とする．$A = (a_{ij})$ に対して $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$ とする．ただし，複素数 z に対して $\overline{z}$ を z の共役複素数とする．さらに，$\|\cdot\|_{w^*}$ で $w(\cdot)$ の dual norm を表す．

$$\|Y\|_{w^*} = \sup_X \frac{|\mathrm{tr}(YX^*)|}{w(X)} \quad (Y \in M_n)$$

この報告では，$\|S_A\|_w \le 1$ なる A の表現と他のいくつかの特徴付けを行い，その結果として Haagerup による $\|S_A\|_\infty \le 1$ の特徴付けが導かれることを示そう．

2. 知られている結果について

Schur 積の ノルム に関する不等式はかなり以前（1910年代）から研究されていたが，作用素 S_A の ノルム については，S. C. Ong によって始められたといえる．このことについて今までに知られていることを挙げておこう．

[1] (I. Schur ;1911)

$$\|A \circ B\|_\infty \leq \|A\|_\infty \cdot \|B\|_\infty$$

この Schur の結果から，

$$\|S_A\|_\infty \leq \|A\|_\infty$$

が示される．

[2] (S. C. Ong; 1984)

$$\|S_A\|_\infty \leq \min\left\{\max_i \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{1/2}, \max_j \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{1/2}\right\}$$

$A \in M_n$ と $0 \leq \alpha \leq 1$ に対して，$t_i(A,\alpha) := \{p_i(A,\alpha) \cdot q_i(A, 1-\alpha)\}^{1/2}$ としょう．ただし，ここで，$p_i(A,\alpha)$，$q_i(A, 1-\alpha)$ は，それぞれ $(AA^*)^\alpha$，$(A^*A)^{1-\alpha}$の主対角要素の大きい方から i 番目のものを表すこととする．このとき，次のことがいえる．

[3] (M. E. Walter; 1986)

$$\|S_A\|_\infty \leq t_1(A,\alpha) \quad (0 \leq \alpha \leq 1).$$

さらに，M_n上の ノルム $\|\cdot\|$ を unitarily invariant とする，即ち，$U, V \in M_n$ を unitary matrices とするとき，

$$\|A\| = \|UAV\| \quad (A \in M_n)$$

が成り立つとき，次が示される．

[4] (K. Okubo; 1987) $\|\cdot\|_u$ を M_n 上の unitarily invariant norm とするとき，

$$\|S_A\|_u := \sup\{\|A \circ B\|_u : \|B\|_u \leq 1\} \leq \|A\|_\infty.$$

$c_1(A)$ で A の列ベクトルで最も大きいユークリッドのノルムとする．

[5] (T. Ando, R. A. Horn and C. R. Johnson; 1987) $\|\cdot\|_u$ を M_n 上の unitarily invariant norm とするとき,

$$\|S_A\|_u \leq \inf\{c_1(X)\cdot c_1(Y) : X, Y \in M_{r,n}, A = X^*Y, r \geq 1\} = \|S_A\|_\infty.$$

(最後の等号は Haagerup によって示された.)

Haagerup は $\|S_A\|_\infty$ の特徴づけとして次の定理を示した.

HAAGERUP'S THEOREM. $A = (a_{ij}) \in M_n$ に対して次は互いに同値である.

(1) $\|S_A\|_\infty \leq 1$

(2) A は $A = B^*C$ と表示できる. ただし, $B, C \in M_n$ は $B^*B \circ I \leq I$ で, $C^*C \circ I \leq I$ である.

(3) $a_{ij} =< x_j | y_i > (i, j = 1, 2 \cdots, n)$ と表示できる. ただし, $x_i, y_i \in C^n$ は $\|x_i\| \leq 1, \|y_i\| \leq 1$ を満たす $(i = 1, \cdots, n)$.

(4)

$$\begin{pmatrix} R_1 & A \\ A^* & R_2 \end{pmatrix} \geq 0$$

を満たし, かつ $R_1 \circ I \leq I, R_2 \circ I \leq I$ となる $(0 \leq) R_1, R_2 \in M_n$ が存在する.

3. 結果と準備

はじめに，**Haagerup** が $\|S_A\|_\infty$ について示したのと同じ型の定理を $\|S_A\|_w$ について述べよう．

定理． $A=(a_{ij})\in M_n$ に対して次は互いに同値である．

$(1)_w$　$\|S_A\|_w \le 1$

$(2)_w$　A は $A=B^*WB$ と表示できる．ただし，$B,W\in M_n$ は $B^*B\circ I\le I$ で，$\|W\|_\infty\le 1$ である．

$(3)_w$　$a_{ij}=<Wx_j|x_i>$ $(i,j=1,2\cdots,n)$ と表示できる．ただし，$W\in M_n$ は $\|W\|_\infty\le 1$, かつ，$x_i\in C^n$ は $\|x_i\|\le 1$ を満たす．

$(4)_w$

$$\begin{pmatrix} R & A \\ A^* & R \end{pmatrix}\ge 0,\quad R\circ I\le I$$

を満たす $0\le R\in M_n$ が存在する．

この定理の証明は，いくつかのステップに分けて行うが，それらの概略を述べよう．

補題 1． $\|S_A\|_w\le 1$ となる必要十分条件は，

$$\|D_x\overline{A}D_x^*\|_{w^*}\le \|x\|^2\quad (x\in M_n)$$

となることである．

証明．S_A の随伴作用素 $S_A{}^*$ が $S_{\overline{A}}$ であること，さらに $\|\cdot\|_{w^*}$ ノルム に対する単位球が $\|x\|=1$ なる x で $x\otimes x^*$ の **absolute convex hull** であることから，$\|S_A\|_w=\|S_{\overline{A}}\|_{w^*}$，また，$S_{\overline{A}}(x\otimes x^*)=D_x\overline{A}D_x^*$ から補題 1 は示される．■

$J_k\in M_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$ を次で定義する．

$$J_k=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

次の補題は定理を示すのに重要である．

補題２． $A \in M_n$ に対して

$$\|S_A\|_w = \|S_{A \otimes J_k}\|_w \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

である．

証明.　$k = 2$ のときのみを示す.（$k \geq 2$ のときも同様な議論でできる.）
$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$ とするとき，

$$\|S_A\|_w \leq 1 \Longrightarrow \|S_{\mathbf{A}}\|_w \leq 1$$

を示すとよいから，補題１より

$$\|D_x \overline{A} D_x^*\|_{w^*} \leq \|x\|^2 \quad (x \in C^n) \tag{2}$$

ならば，

$$\left\| \begin{pmatrix} D_y \overline{A} D_y^* & D_y \overline{A} D_z^* \\ D_z \overline{A} D_y^* & D_z \overline{A} D_z^* \end{pmatrix} \right\|_{w^*} \leq \|y\|^2 + \|z\|^2 \quad (y, z \in C^n)$$

を示すとよい．今，(2) が成り立っているとする．$y, z \in C^n$ に対して $u \in C^n$ を

$$u \circ \overline{u} = y \circ \overline{y} + z \circ \overline{z} \tag{3}$$

となるようにとると

$$\|u\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$$

となる．２つの行列 U, V を

$$U = D_y \cdot D_u^{-1}, \quad V = D_z \cdot D_u^{-1} \tag{4}$$

で定義すると，(3),(4) より $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ は $C^n \longrightarrow C^{2n}$ の縮小写像（i.e. $\left\| \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \right\| \leq 1$）である．

したがって，任意の $X \in M_n$ に対して，

$$w\left((U^*, V^*)X\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}\right) \le w(X) \tag{5}$$

がいえる．

$$\begin{pmatrix} D_y\overline{A}D_y^* & D_y\overline{A}D_z^* \\ D_z\overline{A}D_y^* & D_z\overline{A}D_z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} D_u\overline{A}D_u^*(U^*, V^*)$$

だから，(5) を用いて，

$$\begin{aligned} &\left\| \begin{pmatrix} D_y\overline{A}D_y^* & D_y\overline{A}D_z^* \\ D_z\overline{A}D_y^* & D_z\overline{A}D_z^* \end{pmatrix} \right\|_{w^*} \\ &\qquad = \sup_{\substack{X \in M_{2n} \\ w(X) \le 1}} \left| tr\left(D_u\overline{A}D_u^*(U^*, V^*)X\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \right) \right| \\ &\qquad \le \|y\|^2 + \|z\|^2. \end{aligned}$$

がいえて，補題が証明される．■

以後の証明では，$w(X) \le 1$ なる行列 Xの特徴付けを用いる．１つには，定義より簡単に示される

$$w(X) \le 1 \iff \mathrm{Re}(e^{i\theta}X) \le I \quad (0 \le \theta \le 2\pi)$$

であり，もうひとつは，明かではないが有益な特徴付けである次の補題である．

補題３． *(T.Ando [1])*　$w(X) \le 1$ なるための必要十分条件は，$\begin{pmatrix} I+Z & X \\ X^* & I-Z \end{pmatrix} \ge 0$ なる エルミート行列 Z が存在することである．

さらに，我々は C^*代数の理論に関していくつかの概念を必要とする．(詳細については [6]を参照)

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$を単位元を持つ C^*代数とし，$\mathcal{M}$ を $*$ 演算に閉じており，単位元を含む $\mathcal{A}$ の部分空間としよう．$\mathcal{M}$ から $\mathcal{B}$への線形写像Φが **unital** であるとは，Φ が $\mathcal{A}$ の単位元を $\mathcal{B}$の単位元に写すことであり，Φ が正写像 であるとは，$\mathcal{M}$ の正の元を $\mathcal{B}$の正の元に写すことである

と定義する．$k \geq 1$ に対して，写像 Φ は $M_k(\mathcal{M})$（ $\mathcal{M}$ 値の $k \times k$ 行列からなる空間）から $M_k(\mathcal{B})$ への線形写像 Φ_k を次のように引き起こす．

$$\Phi_k((a_{ij})) \equiv (\Phi(a_{ij})) \quad (a_{ij} \in \mathcal{M}, i, j = 1, 2, \cdots, k)$$

また，Φ はΦ_k が 全ての $k = 1, 2, \cdots$に対して正写像であるとき完全正写像であるという．

さて，$\mathcal{M}$ を

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda I + Z & X \\ Y & \lambda I - Z \end{pmatrix} : X, Y, Z \in M_n, \quad \lambda \in C \right\}$$

で定義される $M_2(M_n) = M_2 \otimes M_n$ の部分空間とする．このとき，$\mathcal{M}$ は $M_2(M_n)$ の単位を含んでおり，また，*演算に閉じている．

補題 4．$\|S_A\|_w \leq 1$ とする．このとき，

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} \lambda I + Z & X \\ Y & \lambda I - Z \end{pmatrix}\right) = \lambda I + \frac{1}{2}\{A \circ X + A^* \circ Y\} \tag{6}$$

で定義される $\mathcal{M}$ から M_nへの線形写像 Φは *unital* で完全正写像である．

証明．補題 2 より

$$\|S_{A \otimes J_k}\|_w = \|S_A\|_w \leq 1 \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

である．また，Φが unital であることは，あきらかである．次に，Φ が正写像であることを示そう．$\begin{pmatrix} \lambda I + Z & X \\ Y & \lambda I - Z \end{pmatrix} \geq 0$ とする．このとき，$Y = X^*$ かつ$\lambda I \pm Z \geq 0$ だから，$\lambda \geq 0$ となる．$\lambda > 0$ としてもよい．仮定より，$\begin{pmatrix} I + Z/\lambda & X/\lambda \\ X^*/\lambda & I - Z/\lambda \end{pmatrix} \geq 0$ となり，したがって補題 3 を用いて $w(X) \leq \lambda$ がいえる．よって，$\|S_A\|_w \leq 1$ から，$w(A \circ X) \leq \lambda$ となり，ゆえに，

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} \lambda I + Z & X \\ Y & \lambda I - Z \end{pmatrix}\right) = \lambda I + Re(A \circ X) \geq 0$$

がいえて，Φ は正写像である．次に，Φが完全正写像であることを示す．即ち，任意の自然数 kに対して，Φ_kが $M_k(\mathcal{M})$ から $M_k(M_n)$ への正写像であることを示すとよい．このことは，$M_k(\mathcal{M})$ の元

$$\begin{pmatrix} \lambda_{ij}I + Z_{ij} & X_{ij} \\ Y_{ij} & \lambda_{ij}I - Z_{ij} \end{pmatrix}_{1 \le i,j \le k} \ge 0 \tag{7}$$

に対して，

$$\left(\lambda_{ij}I + \frac{1}{2}\{A \circ X_{ij} + A^* \circ Y_{ij}\} \right)_{1 \le i,j \le k} \ge 0 \tag{8}$$

を示すとよい．(7) のことは，

$$\begin{pmatrix} I \otimes (\lambda_{ij}) + (Z_{ij}) & (X_{ij}) \\ (Y_{ij}) & I \otimes (\lambda_{ij}) - (Z_{ij}) \end{pmatrix} \ge 0$$

と同値であり，(8) のことは

$$I \otimes (\lambda_{ij}) + \frac{1}{2}\{(A \otimes J_k) \circ (X_{ij}) + (A^* \otimes J_k) \circ (Y_{ij})\} \ge 0$$

となる．したがって，仮定より $(Y_{ij}) = (X_{ij})^*$ と

$$I \otimes (\lambda_{ij}) \ge \mathrm{Re}\{e^{i\theta}(X_{ij})\} \quad (0 \le \theta \le 2\pi) \tag{9}$$

がわかる．また，$(\lambda_{ij}) \ge 0$ だから，

$$(\lambda_{ij}) = U^* \cdot \mathrm{diag}(\rho_1, \cdots, \rho_k) \cdot U$$

となるような ユニタリー行列 $U \in M_k$ と ρ_i $(i = 1, 2, \cdots, k)$ が存在する．そして，(9) のことより，

$$I \otimes \mathrm{diag}(\rho_1, \cdots, \rho_k) \ge \mathrm{Re}\left\{e^{i\theta}(I \otimes U) \cdot (X_{ij}) \cdot (I \otimes U^*)\right\}$$

となる．したがって，先の numerical radius の性質から，

$$w\left(\left(I \otimes diag(\rho_1, \cdots, \rho_k)^{-1/2} \cdot U\right) \cdot (X_{ij}) \cdot \left(I \otimes U^* \cdot diag(\rho_1, \cdots, \rho_k)^{-1/2}\right)\right) \le 1$$

がでて，よって $\|S_{A\otimes J_k}\|_w \leq 1$ だから

$$I \otimes (\lambda_{ij}) + \mathrm{Re}(A \circ X_{ij}) \geq 0$$

が示せる．■

次の補題を示すのに，以下の2つの定理が必要である．$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ をヒルベルト空間上の有界線形作用素全体からなる C^*代数とする．

Arveson's Theorem. $\mathcal{M}$ を C^* 代数 $\mathcal{A}$ の部分空間として，$\mathcal{A}$ の単位元を含み，*演算に閉じているとする．また，Φ を $\mathcal{M}$ から $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ への **unital** な完全正写像とするとき，Φ を拡張し $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ への **unital** な完全正写像 $\tilde{\Phi}$ が存在する．

Stinespring's Theorem. $\mathcal{A}$ を単位元 1 を持つ C^* 代数として Φ を $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ への完全正写像とする．このとき，ヒルベルト空間 $\mathcal{K}$ と $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ への **unital** *準同型写像 πと $\|\Phi(1)\| = \|V\|$ なる $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への有界線形写像 V があって，

$$\Phi(a) = V^*\pi(a)V \quad (a \in \mathcal{A})$$

を満たす．

これらの証明については [6] を参照．

補題5． $\|S_A\|_w \leq 1$ とすると，ヒルベルト空間 $\mathcal{K}$ と C^n から $\mathcal{K}$ への線形写像 $\tilde{B}, \tilde{C}$ があって，

$$A = \tilde{B}^*\tilde{C} \tag{10}$$

と

$$\tilde{B}^*\tilde{B} = \tilde{C}^*\tilde{C}, \quad \tilde{B}^*\tilde{B} \circ I \leq I \tag{11}$$

を満たす．

証明．(6) によって定義された $\mathcal{M}$ から $M_n \simeq \mathcal{B}(C^n)$ への線形写像 Φ は補題4より **unital** 完全正写像であるから，**Arveson** の定理と **Stinespring** の定理からヒルベルト空間 $\mathcal{K}$

と C^*代数 $M_2(M_n)$ から $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ への *準同型写像 π, C^n から $\mathcal{K}$ への線形写像 V があって,

$$\Phi\left(\begin{pmatrix}\lambda I+Z & X \\ Y & \lambda I-Z\end{pmatrix}\right)=V^*\cdot\pi\left(\begin{pmatrix}\lambda I+Z & X \\ Y & \lambda I-Z\end{pmatrix}\right)\cdot V$$

を満たす. このことより,

$$V^*\cdot\pi\left(\begin{pmatrix}0 & X \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)\cdot V=\frac{1}{2}A\circ X$$

$$V^*\cdot\pi\left(\begin{pmatrix}Z & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)\cdot V=V^*\cdot\pi\left(\begin{pmatrix}0 & 0 \\ 0 & Z\end{pmatrix}\right)\cdot V$$

そして, $V^*V=I$ となることがわかる. $\{e_j\}$ を C^n の自然な直交基底としよう. $\tilde{B}$,$\tilde{C}$ を次の式で定義する.

$$\tilde{B}e_j=\sqrt{2/n}\sum_{p=1}^{n}\pi\left(\begin{pmatrix}E_{pj} & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)\cdot Ve_j\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

$$\tilde{C}e_j=\sqrt{2/n}\sum_{p=1}^{n}\pi\left(\begin{pmatrix}0 & E_{pj} \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)\cdot Ve_j\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

ただし, ここで $E_{ij}=e_i\otimes e_j^*$ とする. この 2 つの式から, $i=1,2,\cdots,n$ に対して

$$\begin{aligned}<\tilde{B}^*\tilde{C}e_j|e_i> &=\frac{2}{n}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}<V^*\cdot\pi\left(\begin{pmatrix}E_{ip} & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)\cdot\pi\left(\begin{pmatrix}0 & E_{qj} \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)\cdot Ve_j|e_i> \\ &=2<V^*\cdot\pi\left(\begin{pmatrix}0 & E_{ij} \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)\cdot Ve_j|e_i>=a_{ij},\end{aligned}$$

がいえて, 従って$\tilde{B}^*\tilde{C}=A$ がいえる. さらに, $i,j=1,2,\cdots,n$ に対して

$$<\tilde{B}^*\tilde{B}e_j|e_i>=2<V^*\cdot\pi\left(\begin{pmatrix}E_{ij} & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)\cdot Ve_j|e_i>$$

と

$$<\tilde{C}^*\tilde{C}e_j|e_i>=2<V^*\cdot\pi\left(\begin{pmatrix}0 & 0 \\ 0 & E_{ij}\end{pmatrix}\right)\cdot Ve_j|e_i>$$

がいえて，$\tilde{B}^*\tilde{B} = \tilde{C}^*\tilde{C}$である．また，

$$\begin{aligned} 2 < \tilde{B}^*\tilde{B}e_j|e_j > &= < \tilde{B}^*\tilde{B}e_j|e_j > + < \tilde{C}^*\tilde{C}e_j|e_j > \\ &= 2 < V^* \cdot \pi\left(\begin{pmatrix} E_{jj} & 0 \\ 0 & E_{jj} \end{pmatrix}\right) \cdot Ve_j|e_j > \\ &\leq 2 < V^*Ve_j|e_j >= 2 \end{aligned}$$

となり，結局 $\tilde{B}^*\tilde{B} \circ I \leq I$ が成り立つ．∎

補題 6．$\|S_A\|_w \leq 1$ とすると，

$$A = B^*WB$$

と

$$B^*B \circ I \leq I, \quad W^*W \leq I$$

を満たすような $B, W \in M_n$ が存在する．

証明．補題 5 から，(9),(10) を満たすような C^n から ヒルベルト空間 $\mathcal{K}$ への線形写像 $\tilde{B}, \tilde{C}$ が存在する．このとき，

$$|\tilde{B}| \equiv (\tilde{B}^*\tilde{B})^{1/2} = (\tilde{C}^*\tilde{C})^{1/2} \equiv |\tilde{C}|$$

となる．

$B \equiv |\tilde{B}|$ とすると，$B^*B \circ I = \tilde{B}^*\tilde{B} \circ I \leq I$ である．

次に，$\tilde{B} = UB, U^*U = I$ そして，$\tilde{C} = VB, V^*V = I$となるような C^n から $\mathcal{K}$ への線形写像 U, V が存在する．$W \equiv U^*V$ としよう．このとき，W が縮小写像であることはすぐわかり，また，

$$A = \tilde{B}^*\tilde{C} = B^*U^*VB = B^*WB$$

となる．∎

補題 7．もし，$\begin{pmatrix} R & A \\ A^* & R \end{pmatrix} \geq 0$ が，$R \circ I \leq I$ を満たすある $(0 \leq)R \in M_n$ で成り立つならば，$\|S_A\|_w \leq 1$ である．

証明．$X \in M_n$ を $w(X) \leq 1$ であるとしよう．補題3より，

$$\begin{pmatrix} I+Z & X \\ X^* & I-Z \end{pmatrix} \geq 0$$

となる $Z \in M_n$ が存在する．このとき，Schur の定理（[3] を参照）から，

$$\begin{pmatrix} R\circ(I+Z) & A\circ X \\ A^*\circ X^* & R\circ(I-Z) \end{pmatrix} \geq 0$$

がいえる．ここで，$R \circ I \leq I$ だから $U \equiv R \circ Z$ として，

$$\begin{pmatrix} I+U & A\circ X \\ A^*\circ X^* & I-U \end{pmatrix} \geq 0$$

がいえて，再び補題3を用いると $w(A\circ X) \leq 1$ がいえる．従って，$\|S_A\|_w \leq 1$ となる．∎

4. 定理と Haagerup の定理 の証明

定理の証明．$(1)_w \Longrightarrow (2)_w$ は補題6である．

$(2)_w$ と $(3)_w$ の同値性は $B = [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n]$ とするとよい．

$(2)_w \Longrightarrow (4)_w$ は $R \equiv B^*B$ とおくことにより示される．

$(4)_w \Longrightarrow (1)_w$ は補題7によって示される．∎

Haagerup の定理に移ろう．

(2),(3),(4) の同値性と (1) $\Longrightarrow$ (4) は [6] で我々のと同様な方法で示されている．しかしながら，(1) $\Longrightarrow$ (4) の Haagerup 自身の証明については公表されていない．

この証明を与えるのに，次の補題が必要である．

補題8． $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすると

$$\|S_A\|_\infty = \|S_{\mathbf{A}}\|_w \quad (A, 0 \in M_n)$$

証明．(1) より $2n \times 2n$ 行列 $\begin{pmatrix} B & D \\ C & E \end{pmatrix}$ に対して

$$2w\left(\begin{pmatrix} B & D \\ C & E \end{pmatrix}\right) \geq \left\|\begin{pmatrix} B & D \\ C & E \end{pmatrix}\right\|_\infty \geq \left\|\begin{pmatrix} 0 & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\|_\infty = \|D\|_\infty$$

がいえる．一方，

$$w\left(\begin{pmatrix} 0 & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\|D\|_\infty.$$

が知られている（ Holbrook [2] 参照）から，

$$\begin{aligned}
\|S_{\mathbf{A}}\|_w &= \sup\left\{ w\left(\begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} B & D \\ C & E \end{pmatrix}\right) : w\left(\begin{pmatrix} B & D \\ C & E \end{pmatrix}\right) \le 1 \right\} \\
&= \sup\left\{ w\left(\begin{pmatrix} 0 & A \circ D \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) : \|D\|_\infty \le 2 \right\} \\
&= \sup\left\{ \frac{1}{2}\|A \circ D\|_\infty : \|D\|_\infty \le 2 \right\} \\
&= \|S_A\|_\infty.
\end{aligned}$$

がわかる．∎

Haagerup の定理での (1) $\Longrightarrow$ (4) の証明．$\|S_A\|_w = 1$ とする．$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすると，補題 8 から，$\|S_A\|_\infty = \|S_A\|_\infty = \|S_{\mathbf{A}}\|_w$ だから，我々の定理から

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & 0 & A \\ R_{21} & R_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{11} & R_{12} \\ A^* & 0 & R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \ge 0$$

であり，

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \ge 0, \quad R_{ii} \circ I \le I \quad (i = 1, 2)$$

となるような $R_{ij} \in M_n (i, j = 1, 2)$ が存在する．よって，$R_1 = R_{11}, R_2 = R_{22}$ とすると，

$$\begin{pmatrix} R_1 & A \\ A^* & R_2 \end{pmatrix} \ge 0, \quad R_1 \circ I \le I, \quad R_2 \circ I \le I$$

がいえる．即ち，(4) が成立する．∎

5. 定理の応用

系１.

$$\|S_A\|_\infty \le \|S_A\|_w \le 2\|S_A\|_\infty \quad (A \in M_n).$$

証明. 左側の不等式を示すのに, $\|S_A\|_w = 1$ としよう. このとき, 条件 (4) は条件 $(4)_w$ から $R_1 = R_2 = R$ とすることによって導かれる. 右側の不等式は (1) より簡単に示される. ∎

Johnson [4] によって,

$$w(A \circ B) \le 2w(A) \cdot w(B) \quad (A, B \in M_n)$$

が示された. このことは,

$$\|S_A\|_w \le 2w(A) \quad (A \in M_n)$$

と同値であるが, [5]で述べている Okubo の次の結果はこの改良である. これを我々の定理から導く.

系２.

$$\|S_A\|_w \le \|A\|_\infty \quad (A \in M_n).$$

証明. $\|A\|_\infty = 1$ としよう. このとき, $R = I$ とすると (4) が成り立つ. ∎

系３. A が エルミート行列 のとき, $\|S_A\|_\infty = \|S_A\|_w$ である.

証明. $\|S_A\|_\infty = 1$ としよう. Haagerup の定理から, (4) を満たす $0 \le R_1, R_2 \in M_n$ が存在する. $A = A^*$ だから, $R = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$ とおくと $(4)_w$ が成り立つ. 従って $\|S_A\|_\infty \ge \|S_A\|_w$ である. 逆の不等式は, 系１. から導かれる. ∎

系４. 半正値行列 $A = (a_{ij}) \ge 0$ に対しては,

$$\|S_A\|_w = \max_i a_{ii}$$

である．

証明．$A \geq 0$ のとき，

$$\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \geq 0$$

から $\|S_A\|_w \leq \max_i a_{ii}$ は我々の定理よりいえる．逆の不等式は $a_{ii} = w(S_A(E_{ii}))$ $(i = 1, \cdots, n)$ から導かれる．■

系 5．$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix}$ とすると，

$$\|S_A\|_\infty = \|S_{\mathbf{A}}\|_w \quad (A \in M_n)$$

証明．$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix}$ が エルミート だから，

$$\|S_A\|_\infty = \|S_{\mathbf{A}}\|_\infty \quad (A \in M_n)$$

を示すと十分である．これは，ノルムの定義と

$$\left\| \begin{pmatrix} B & D \\ C & E \end{pmatrix} \right\|_\infty \geq \left\| \begin{pmatrix} 0 & D \\ C & 0 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max\{\|C\|_\infty, \|D\|_\infty\}$$

を用いて簡単に示される．■

系 6．$A \in M_n$ をユニタリー行列とすると　$\|S_A\|_\infty = \|S_A\|_w = 1.$

証明．$\|S_A\|_w \leq 1$ であることは補題 2 からいえる．一方，A がユニタリーならば，A と $\overline{A}$ の Schur 積 $A \circ \overline{A}$ は doubly stochastic だから $\|A \circ \overline{A}\|_\infty \geq 1$ となる．故に，$\|\overline{A}\|_\infty = \|A\|_\infty = 1$ から，$\|S_A\|_\infty \geq 1$ が示され，従って補題 1 を用い系が証明できる．■

系 7．　$A \in M_n$ に対して

(11) $$\|S_{|A|+|A^*|}\|_w \geq \|S_A\|_w$$

が成立する．

A が正規行列（即ち，$A^*A = AA^*$）ならば

$$\|S_{|A|}\|_w \geq \|S_A\|_w$$

である．

証明．不等式（11）は，系4と

$$\begin{pmatrix} |A| + |A^*| & A \\ A^* & |A| + |A^*| \end{pmatrix} \geq 0$$

が成り立つことからでる．

A が 正規ならば，定義より $|A| = |A^*|$ だから，

$$\begin{pmatrix} |A| & A \\ A^* & |A| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A^*| & A \\ A^* & |A| \end{pmatrix} \geq 0$$

だから，$|A| + |A^*|$ のかわりに $R = |A|$ をとるとよい．

例3． $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ としよう．ユニタリー行列 $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ を用いて，$A = U \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot U^*$ とできるから

$$w(A) = w\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1$$

かつ，

$$\|A\|_\infty = \left\|\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\|_\infty = 2$$

である．従って，系2より，$\|S_A\|_w \leq \|A\|\infty = 2$ となる．一方で，$S_A(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，$w\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 2$ だから，$\|S_A\|_w = 2$ となる．

また，$U \in M_2$ をユニタリー行列とすると，$A \circ U$ はユニタリー行列になり，

$$\|S_A\|_\infty = \sup\{\|A \circ U\|_\infty : U \in M_2; \text{ユニタリー}\} = 1$$

である．

さらに，$|A| = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，$|A^*| = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ となるから，

$$\left\| S_{|A|+|A^*|} \right\|_w = \|S_{2I}\|_w = 2 = \|S_A\|_w = 2\,\|S_A\|_\infty$$

となるから，系 1 と (11) の不等式は最良である．

[注意] **Haagerup** の定理との類似を考えるとき，$(2)_w$ は，

$(2)'_w$　$B^*B = C^*C$ かつ，$B^*B \circ I \leq I$ となる $B, C \in M_n$ が存在して，$A = B^*C$ とできる．

となることが望ましい．

このことは，$(2)_w$ で縮小写像 W がユニタリーにとれれば正しいことがわかるが，中村美浩氏が次の例でこれは正しくないことを示してくれた．

例 4．$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ としよう．上の例のように，$\|S_A\|_w = 1$ だから，仮に $(2)'_w$ が正しいとすると，

$B^*B = C^*C, B^*B \circ I \leq I$ で，かつ $A = B^*C$ となる $B, C \in M_n$ が存在する．

このとき，B^*B の対角成分が 1 以下で，少なくともひとつは 1 であること，また，

$$\begin{pmatrix} B^*B & A \\ A^* & B^*B \end{pmatrix} \geq 0$$

であることを用いると，B^*B が正則な対角行列であることがわかる．したがって，B, Cが正則であり，$A = B^*C$ も正則となり，これは，A が正則でないことに矛盾する．

REFERENCES

1. T. Ando, *On the structure of operators with numerical radius one*, Acta Sci. Math. **34** (1973), 11–15.
2. J. A. R. Holbrook, *On the power-bounded operators of Sz.-Nagy and Foiaş*, Acta Sci. Math. **27** (1968), 297–310.
3. R. A. Horn and Ch. R. Johnson, "Matrix Analysis," Cambridge U. P., Cambridge UK, 1985.

4. Ch. R. Johnson, *Hadamard products of matrices*, Linear Multilinear Alg. **1** (1974), p. 295–307.

5. K. Okubo, *Hölder-type norm inequalities for Schur product of matrices*, Linear Alg. Appl. **91** (1987), p. 13–28.

6. V. I. Paulsen, "Completely Bounded Maps and Dilation," Pitman Research Notes in Math. 146, Longman, Essex UK, 1986.