

A L E 有限要素法による非圧縮超弾性体の大変形解析

東京大学 教養学部 山田貴博 (Takahiro Yamada)

菊地文雄 (Fumio Kikuchi)

1. 序

近年、重要となりつつある固体の大変形問題の1つに、ゴム弾性の問題に対する一つの記述である非圧縮超弾性体の大変形問題がある。この問題の有限要素解析においては、通常Lagrange表示により変形が記述されるため、大変形に伴って変形後形状の要素が局所的に大きくゆがみ、計算が困難になることがある [1]。本研究は、変形状態に応じた節点再配置を行うことによりこのような局所的な要素のゆがみを緩和し、大変形解析を安定に行なう手法を提案するものである。

本研究では、節点の再配置を数理的に明確にかつ計算効率を低下させることなく行なうために、変形の記述にA L E (Arbitrary Lagrangian-Eulerian)法を導入する。A L E法は、Euler表示された流体力学の問題に対して、Lagrange表示によって与えられる移動境界を考慮するために導入されたものである。従来の固体力学におけるA L E法では、この流体力学におけるA L E法の拡張として、基本的にEuler表示の変形記述から出発している [2][3]。そのため、歪弾性型の材料構成則に基づく速度型表示された問題に対しては有効であるが、本研究で考える超弾性体は、材料構成則が自然状態を基準にした歪エネルギー関数によって表わされるため、速度型表示では問題を正確に記述することができない。そこで本研究では、従来のA L E法と異なり基本的に変形をLagrange表示によって記述するA L E型の変形記述を与える。本研究では、このA L E型の変形記述に基づき、任意なメッシュ再配置を考慮した非圧縮超弾性

体の大変形問題に対する定式化を行ない、混合型有限要素法に適用する。

また、節点位置の自動的な決定方法として、変形状態に応じて局所的な要素のゆがみが緩和されるように節点位置を再配置する適応型節点再配置手法を提案する。

2. 変分法的定式化

Lagrange型変形記述において、変形は、自然状態の物質配置 R_x から変形後の空間配置 R_y への写像である変形写像 ϕ によって定義される。適当な物質座標系と空間座標系を導入すると、変形勾配テンソル F と変形写像のヤコビアン J (変形前後の体積比) は次式(1)(2)で与えられる。

$$F^a_A = \partial \phi^a / \partial X^A, \quad (1)$$

$$J = \{ \det(g_{ab}) / \det(G_{AB}) \}^{1/2} \det(F^a_A). \quad (2)$$

ここで、 X は物質座標、 G_{AB} 、 g_{ab} はそれぞれ物質座標系、空間座標系の共変計量テンソルである。また、大文字指標は物質座標系成分を表わし、小文字指標は空間座標系成分を表わす。非圧縮条件は、体積一定の条件として変形写像のヤコビアン $J = 1$ により表わされる。いま、この非圧縮条件を非圧縮条件式 $G(J)$ を用いて次のように表わす。

$$G(J) = 0. \quad (3)$$

ここで、 $G(J)$ に対しては次式(4)が要求される。

$$G(1) = 0, \quad G'(1) = 1. \quad (4)$$

非圧縮超弾性体の境界値問題は、このようなLagrange型変形記述によって得られる変形写像 ϕ を未知関数とする問題として定式化される。非圧縮条件を満たす変形に対して定義された非圧縮超弾性体の歪エネルギー密度関数を $W(F)$ 、外力として保存力を仮定することにより得られる外力ポテンシャルエネルギーを $\Pi_{ext}(\phi)$ とする。非圧縮条件式 $G(J)$ に対して、物理的には圧力を意味するLagrange乗数 p を導入することにより、

非圧縮超弾性体の境界値問題は次式 (5) で定義される ϕ と p を独立な未知関数とする汎関数 $\Pi(\phi, p)$ の停留問題となる。

$$\Pi(\phi, p) = \int_{R_X} \{W(\tilde{F}) - p G(J)\} dX + \Pi_{\text{ext}}(\phi). \quad (5)$$

ここで、 \tilde{F} は、文献 [1] に従って歪エネルギー密度関数の局所的な有意性を確保するため、積の形で体積成分を分離した次式 (6) により定義される変形勾配テンソルである。

$$\tilde{F}^a_A = J^{-1/3} F^a_A. \quad (6)$$

このとき、制約条件は、変形写像 ϕ に対する幾何学的境界条件のみである。この ϕ と p に関する汎関数 $\Pi(\phi, p)$ の第 1 変分を計算すると、次の 2 つの弱表現が得られる。

$$\begin{aligned} N^\circ(\phi, p; \eta) &= \{D_\phi \Pi(\phi, p)\} \eta \\ &= \int_{R_X} \left\{ \bar{\tau}^{ab}(\tilde{F}) - \frac{1}{3} \bar{\tau}^{cd}(\tilde{F}) g_{cd} g^{ab} - p J G'(J) g^{ab} \right\} \eta_{(a,b)} dX \\ &\quad + \delta \Pi_{\text{ext}}(\eta) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} N^\circ(\phi, p; \zeta) &= \{D_p \Pi(\phi, p)\} \zeta \\ &= \int_{R_X} \zeta G(J) dX = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \eta_{(a,b)} &= \frac{1}{2} (\eta^c_{|b} g_{ac} + \eta^c_{|a} g_{bc}), \\ \bar{\tau}^{ab}(\tilde{F}) &= \left[2 F^a_A F^b_B \frac{\partial W(F)}{\partial C_{AB}} \right]_{F = \tilde{F}}, \\ \delta \Pi_{\text{ext}}(\eta) &= \{D_\phi \Pi_{\text{ext}}(\phi)\} \eta. \end{aligned}$$

また、 $D_f X$ は X の f についての Fréchet 微分を表わし、 $'|'$ は共変微

分を表わす。さらに、 η 、 ζ はそれぞれ ϕ 、 p の許容変分である。式(7)(8)はそれぞれ平衡方程式、非圧縮条件式の弱表現となっている。

ALE型変形記述においては、物質配置と空間配置の両方に独立な仮想的な参照配置 R_z を導入し、参照配置から物質配置への写像 χ と参照配置から空間配置への写像 ϕ を考える(図1参照)。この時、変形写像 ϕ は次の合成写像として表わされる。

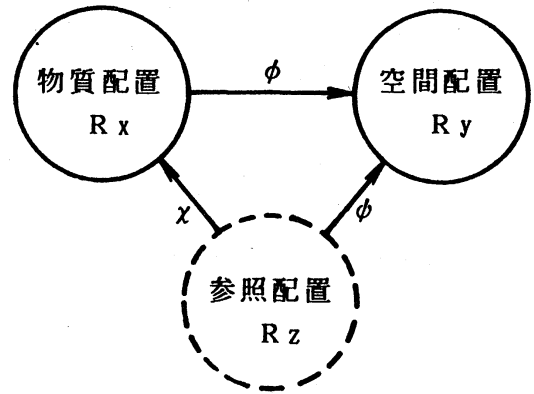


図1 ALE法における配置と写像

$$\phi = \phi \circ \chi^{-1} . \quad (9)$$

いま、 χ 、 ϕ は1対1の上への写像であり、初期形状を変えないように χ の値域は物質配置に一致するものとする。このとき、変形写像 ϕ を未知関数とするLagrange型変形記述により定式化された問題は、 ϕ あるいは χ を未知関数とする問題とすることができる。いま、 χ を固定して ϕ を未知関数とする時は、物質座標系を χ^{-1} で座標変換を行い、参照座標系で変形を記述するLagrange型変形記述を意味している。一方、 ϕ を固定して χ を未知関数とする時は、空間配置における点に注目し、その点の変形前の物質配置における位置を未知量とする一種のEuler型変形記述を意味している。

この χ 、 ϕ を用いて式(7)(8)を書き改める。

$$N^\circ(\phi, p; \eta) = N^\circ(\chi, \phi, p; \eta) = 0 , \quad (10)$$

$$N^\circ(\phi, p; \zeta) = N^\circ(\chi, \phi, p; \zeta) = 0 . \quad (11)$$

ここで、圧力 p は参照配置上で定義された関数と考える。いま、 χ 、 ϕ の両方を同時に独立な未知関数として方程式(10)(11)を解くことはできない。なぜなら、式(10)(11)は元来一つの未知関数である変形写像 ϕ を χ と ϕ に分解して考えているものであり、一つの変形写像 ϕ に合成され

る χ , ϕ の組合せは唯一に決定できないためである。したがって, χ , ϕ のただ一つの組合せが一つの変形写像 ϕ に対応するように χ , ϕ に制約条件を導入し, χ , ϕ の組を未知関数と考える必要がある。また, ϕ に対する幾何学的境界条件は合成写像 $\phi \circ \chi^{-1}$ に課せられる。

さらに, 弱表現 (10) (11) は, ϕ , χ , p に関して非線形であることから, 線形化により得られる増分形の弱表現を用い, 非線形解析を行なう。物質配置における χ の増分を U , 空間配置における ϕ の増分を v , 圧力 p の増分を q とする。式 (10) (11) における χ , ϕ , p を $\chi + U$, $\phi + v$, $p + q$ に置き換え, U , v , q の 2 次以上の項を高次の微小量として無視することにより, 次式 (12) (13) の増分形の弱表現が得られる。

$$\begin{aligned} N^\circ(\chi + U, \phi + v, p + q) & \\ &= N^\circ(\chi, \phi, p) + \{D_{\chi} N^\circ(\chi, \phi, p)\} U \\ &+ \{D_{\phi} N^\circ(\chi, \phi, p)\} v + \{D_p N^\circ(\chi, \phi, p)\} q \\ &= 0, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} N^\circ(\chi + U, \phi + v, p + q) & \\ &= N^\circ(\chi, \phi, p) + \{D_{\chi} N^\circ(\chi, \phi, p)\} U \\ &+ \{D_{\phi} N^\circ(\chi, \phi, p)\} v + \{D_p N^\circ(\chi, \phi, p)\} q \\ &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

いま, ϕ に関する Fréchet 微分は, 通常 Lagrange 型変形記述に基づく定式化で現われる増分変位に対する剛性の項に一致する。一方, χ に関する Fréchet 微分は, 初期形状におけるメッシュの再配置に対する感度の一種であると考えられる。また, χ は初期形状を変えないことから, その増分である U は次式が要求される。

$$U \cdot n = 0 \quad \text{on} \quad \partial R \chi \tag{14}$$

n は境界 ∂R_x 上の単位法線ベクトル, " \cdot " はベクトル内積を表わす. この x に関する Fréchet 微分は, 基本的には変数変換の操作を考え, 参照座標を基準とし微分の連鎖則を用いることにより求めることができる. ゴム弾性体で用いられる超弾性構成則では, 応力が変形履歴に無関係に現在の変形勾配テンソルによって一意に決定され, 粒子の持つ状態量を必要としない. したがって, 領域における材料の均質性を仮定すれば, 歪エネルギー密度関数から求められる応力の x に関する Fréchet 微分は, 変形勾配テンソルの Fréchet 微分を用いて表わすことができる. この時, 通常の ALE 法で現われる応力の移流項 [2] や応力の空間分布の投影操作 [3] を導入する必要がなくなるため, メッシュ更新に伴う精度の低下は生じない.

以上のような ALE 定式化は, Haber [4] が Euler-Lagrange 混合型変形記述という形で, 線形弾性体の大変形問題に対して与えた定式化の 1 つの拡張であると考えられる.

3. 有限要素近似

本研究では, 変位場についてはアイソパラメトリック仮定に基づき, 初期形状, 変位, 変形後形状を同じ内挿関数で近似する. いま, アイソパラメトリック変換における親要素から初期形状への写像を χ , 親要素から変形後形状への写像を ϕ に対応させれば, アイソパラメトリック仮定に基づく変形の記述が, 本研究における ALE 型変形記述の自然な有限要素近似となる. すなわち, 通常のアイソパラメトリック仮定に基づく Lagrange 型変形記述では, 参照座標上の親要素から物質配置への写像 χ を固定して, 参照座標から空間配置への写像 ϕ を未知関数として求めているのに対して, 本研究における ALE 型変形記述では, 親要素から物質配置への写像 χ も可変とすることになる. また, 近似問題において, 物質配置への写像 χ を変化させることは変形写像 ϕ の近似空間を変えることに対応する.

本研究では平面歪問題を考え, 平面歪状態は, 面に対する法線方向の

変位を0とする変位場を用いることにより考慮する。

非圧縮材料の混合型有限要素における変位場と圧力場の補間関数の組合せについては、BB条件の成立が要求される[1]。本研究では線形問題におけるBB条件を満たす要素として、図2に示す変位場を三角形一次要素を4つ組み合わせた6節点複合要素とし、圧力を要素内定数とする要素を用いる。この要素では、形状関数が区分的1次関数であることから、アイソパラメトリック写像は、小要素が潰れるまで1対1写像が保たれる。したがって、この要素は要素形状が大きく変化する大変形解析に適しているものと考えられ、数値実験によっても、その大変形問題に対する有効性が示されている[1]。さらに、この要素は数値積分点数が少なく、計算効率の面でも有利である。また、非圧縮条件式は、この要素に合わせて $G(J) = J - 1$ を用いる。

この要素を用いてGalerkin法に基づき弱表現(12)(13)について有限要素離散化を行なう。 $[\eta]$, $[\zeta]$, $[U]$, $[v]$, $[q]$ をそれぞれ η , ζ , U , v , q に対応するベクトルとすれば、弱表現(12)(13)に現われる項は、離散化により次のように表わすことができる。

$$N^{\circ}(\chi, \phi, p; \eta) = [\eta]^t \{ [f^{int}] - [f^{ext}] \}, \quad (15)$$

$$N^{\circ}(\chi, \phi, p; \zeta) = -[\zeta]^t [r], \quad (16)$$

$$\{ D_{\chi} N^{\circ}(\chi, \phi, p; \eta) \} U = [\eta]^t [K^{AD}][U], \quad (17)$$

$$\{ D_{\phi} N^{\circ}(\chi, \phi, p; \eta) \} v = [\eta]^t [K^{LD}][v], \quad (18)$$

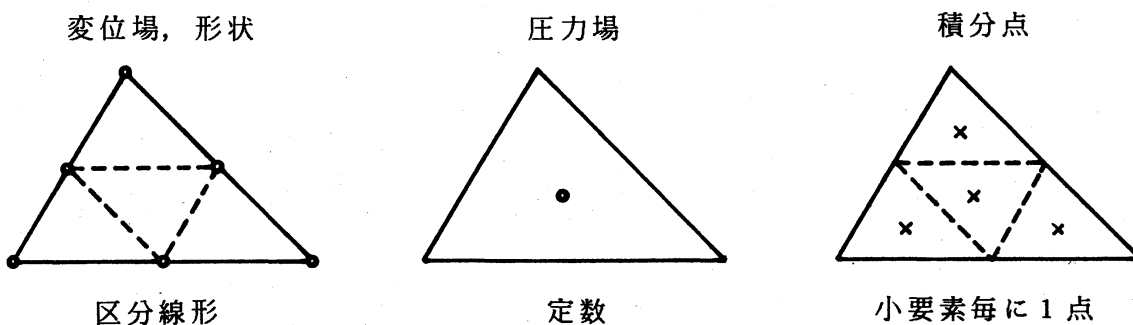


図2 有限要素

$$\{D_x N^o(x, \phi, p; \zeta)\} U = [\zeta]^t [K^{AP}] [U], \quad (19)$$

$$\{D_\phi N^o(x, \phi, p; \zeta)\} v = [\zeta]^t [K^{LP}] [v], \quad (20)$$

$$\{D_p N^o(x, \phi, p; \eta)\} q = [\eta]^t [K^{LP}] [q], \quad (21)$$

$$\{D_p N^o(x, \phi, p; \zeta)\} q = 0. \quad (22)$$

ここで、 $[K]$ は $[K]$ の転置行列を表わす。(15)~(22)をまとめると次のマトリックス表示が得られる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} [K^{LD}] & [K^{LP}]^t \\ [K^{LP}] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [v] \\ [q] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [K^{AD}] \\ [K^{AP}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [U] \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} [f^{ext}] - [f^{int}] \\ [r] \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (23)$$

いま、各変位自由度に対して物質配置と空間配置のどちらかが未知量で、他方が既知量であることを仮定し、未知量と既知量を整理すれば、式(23)は次式(24)のように書き改めることができる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} [K^{LD}]_{11} & [K^{AD}]_{12} & [K^{LP}]_1^t \\ [K^{LD}]_{21} & [K^{AD}]_{22} & [K^{LP}]_2^t \\ [K^{LP}]_1 & [K^{AP}]_2 & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [v]_1 \\ [U]_2 \\ [q] \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} [f^{ext}]_1 - [f^{int}]_1 \\ [f^{ext}]_2 - [f^{int}]_2 \\ [r] \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} [K^{AD}]_{11} & [K^{LD}]_{12} \\ [K^{AD}]_{21} & [K^{LD}]_{22} \\ [K^{AP}]_1 & [K^{LP}]_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [U]_1 \\ [v]_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (24)$$

ここで、 $[v]_1$ 、 $[U]_2$ 、 $[q]$ は未知ベクトルであり、 $[v]_2$ 、 $[U]_1$ は既

知ベクトルである。式(24)は、未知数と方程式の数が一致した連立一次方程式である。このように変位自由度毎に未知量を物質配置か空間配置に振り分けるものとする、未知ベクトルに対して離散化された変形写像は唯一に決定される。すなわち、このような未知数の取り方が近似空間において χ , ϕ の組合せを一意に ϕ に対応させる一つの制約条件となっている。

また、既知ベクトル $[v]_2$, $[U]_1$ によって任意のメッシュの移動量を与えることができる。 $[v]_2$ によってメッシュの移動量を与えるとき空間配置のメッシュが規定され、それに適合する物質配置のメッシュが未知数として解かれることになる。逆に $[U]_1$ によってメッシュの移動量を与えるとき、物質配置のメッシュが更新され空間配置のメッシュが未知数となる。式(24)の右辺第2項は、通常Lagrange型変形記述に基づく有限要素解析において増分変位に対する変位制御を行なうときに現われる等価節点力ベクトルと同様なメッシュ更新に対する等価節点力ベクトルを意味している。従来のリゾーニング(rezoning)法によるメッシュ更新[5]では、メッシュ更新前の物理量を適当に補間してメッシュ更新後の値とするのみで、メッシュ更新に伴う近似空間の変化による近似解の影響を考慮することができなかつた。本定式化では、メッシュ更新に対する等価節点力ベクトルが、近似空間の変化による影響を含む予測子となっているためメッシュ更新に伴う余分な収束計算過程の必要がない。

本研究では、非線形解析法にはNewton-Raphson法を増分的に用い、不釣合い力が0となるように収束計算を行なう。また、収束判定にはベクトルの全成分の絶対値のうちの最大値をとるノルムを用い、不釣合い力のノルムが内力のノルムに対して 10^{-5} となるまで反復計算を行なう。このとき、30回の反復計算で収束しない場合には計算不可能と見なし、計算を中止する。

4. 適応型節点再配置

超弾性体の大変形問題におけるALE法では、空間配置だけではなく

物質配置におけるメッシュも同時に考慮し、メッシュの再配置を行わなければならない[6]。しかしながら、事前に変形を予想し、何らかのメッシュの平滑化によって物質配置と空間配置のメッシュが同時に潰れないように節点再配置を行なうことは困難である。したがって、適応型手法のような自動的な節点再配置のアルゴリズムが不可欠なものとなる。本研究では、大変形に伴って生じる局所的な要素のゆがみを緩和するための方法として、物質配置における節点位置を変形状態に応じて再配置する適応型手法を提案する。

従来、線形問題における適応型節点再配置法としては、近似誤差の事後評価に基づく方法[7]が提案されている。この方法では、応力集中が生ずる部分の要素サイズが小さくなるように節点の再配置が行なわれるため、大変形問題に適用した場合、要素の潰れが生じ易い特異点の付近の要素サイズが小さくなり、要素の潰れを助長する結果となってしまう。そこで本研究では、要素の潰れの原因となる要素のゆがみのパターンと枠無差別性を持つ運動学的な物理量である剛体回転量の関係に注目し、要素内の剛体回転量のばらつきによって要素のゆがみを定量化することを考える。平面歪問題においては、要素 k のゆがみを表わす測度 θ_k を剛体回転角に関する測度として次式(25)により定義する。

$$\theta_k = \int_{\Omega_k} (w - \bar{w}_k)^2 dX . \quad (25)$$

ここで w は剛体回転角、 \bar{w}_k は要素 k における平均剛体回転角、 Ω_k は要素 k の物質配置における領域を表わす。

要素毎のゆがみをこの θ_k によって評価し、事後誤差評価に基づく適応型要素分割手法における r -法[7]と同様に、物質配置における節点位置を θ_k が各要素等配分となるよう物質配置における要素形状がゆがまないように移動する。本研究では、頂点節点 i の新しい節点位置 X_{n_i} を次式(26)に基づき決定する。

$$X_{n_i} = \frac{\sum_{k=1}^M (\theta_k / A_k) X_{g_k}}{\sum_{k=1}^M (\theta_k / A_k)} \quad (26)$$

ここで M は節点 i に接する総要素数, X_{g_k} , A_k はそれぞれ要素 k の物質配置における重心位置および面積である. また中間節点については, 新しい頂点節点の位置 X_{n_i} を用いて, それぞれ要素辺の midpoint となるように決定する. なお, 剛体回転角は変形勾配テンソルを極分解することによって求める.

5. 数値計算例

本研究では超弾性材料構成則としては, 等方性のゴム弾性体に対する 1 つの表現である Mooney-Rivlin 材料を考える. この材料構成則は, 次式 (27) の歪エネルギー密度関数により定義される.

$$W(I_1, I_2) = c_1(I_1 - 3) + c_2(I_2 - 3) \quad (27)$$

ここで, I_1 , I_2 はそれぞれ右 Cauchy-Green 変形テンソルの第 1・2 不変量である. Mooney-Rivlin 材料の材料定数 c_1 , c_2 は, 以下の計算では $c_1 = 1.5$, $c_2 = 0.5$ とする.

図 3 のような平面歪の押し込み問題の解析を行なった. 横 2, 高さ 1 の長方形領域の 3 辺をローラー支持し, 長辺の端部から長さ 1 の部分を x_1 方向には固定し, x_2 方向には変位量 v で一様に押し込む. 要素分割は 8×4 , 12×6 , 16×8 , 20×10 の 4 種の四辺形分割を用い, 特異点 A を考慮して図 4 に示すように各小四辺形を三角形要素に分割する. この問題を用いて, Lagrange 法と適応型節点再配置手法を用いた ALE 法の比較検討を行なう.

表 1 に Lagrange 法と ALE 法によって得られた計算可能な最大変位と, $v = 0.4$ における押し込み力を示す. Lagrange 法, ALE 法ともに最大変位は要素分割が細かくなるに連れて小さくなっている. また, 要素分割 20×10 以外では ALE 法が Lagrange 法より大きな最大変位を与えている. さらに, 粗い要素分割では ALE 法によって最大変位が大きく改善され

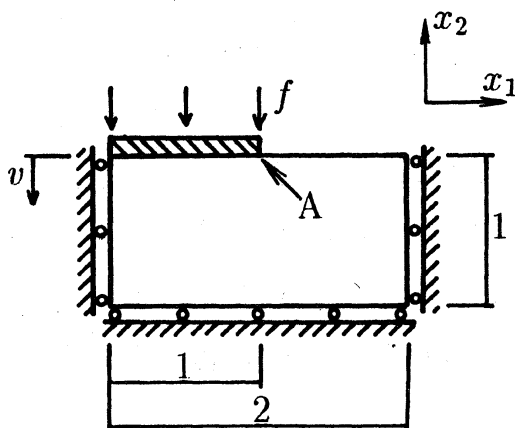


図3 解析モデル

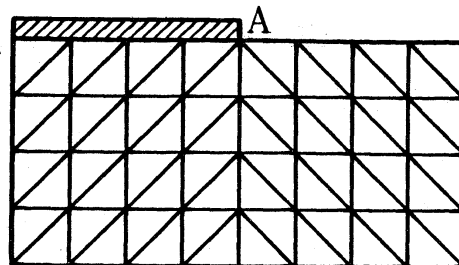


図4 要素分割パターン

表1 計算可能最大変位と $v=0.4$ における荷重

要素分割	Lagrange 法		ALE 法	
	最大変位	$f(v=0.4)$	最大変位	$f(v=0.4)$
8 × 4	0.506	34.6	0.675	35.3
12 × 6	0.463	32.9	0.548	30.3
16 × 8	0.435	32.3	0.470	29.0
20 × 10	0.411	31.7	0.356	-

ているのに対して、要素分割が細かくなるに連れて改善の割合が小さくなっている。さらに、 $v=0.4$ における押し込み力は、Lagrange法ではかなり緩やかに収束しているのに対して、ALE法の場合は速い収束を示しているものと考えられる。

要素分割 16 × 8の場合について、Lagrange法とALE法によって得られた変位 $v=0.4$ における物質配置及び空間配置のメッシュを図5、6に示す。空間配置におけるメッシュのみを比べた場合、ALE法の方が局所的な要素のゆがみが特異点Aの付近で大きくなっているように見られる。しかしながら、このようなゆがみの大きな要素の要素サイズは、適応型節点再配置手法によって比較的小さくなっている。

また、変位 $v=0.4$ に対応する物質配置において一様な正方格子となる座標曲線群によって表わした空間配置における変形図を図7に示す。

Lagrange法に比べてALE法では、特異点Aの付近の変形が非常にシャ

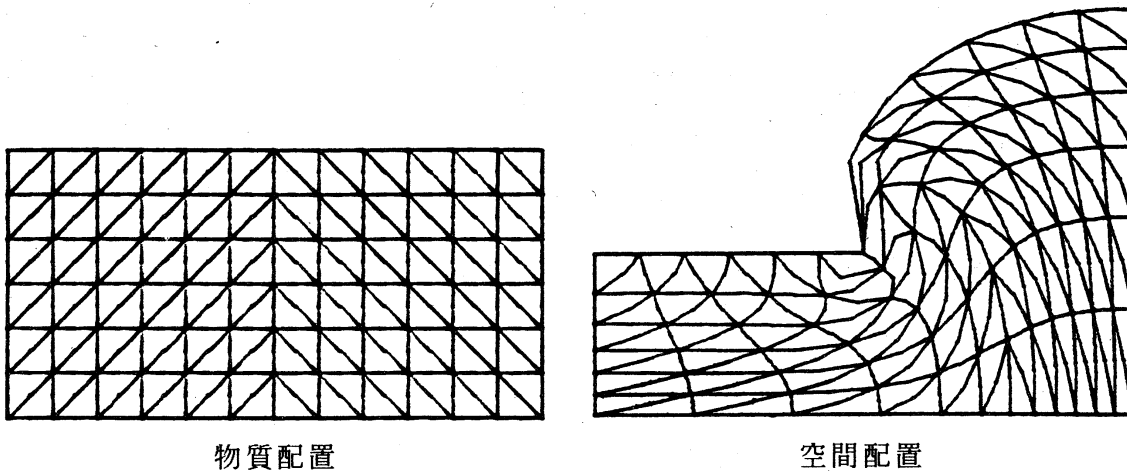


図5 Lagrange法によるメッシュ ($v = 0.4$)

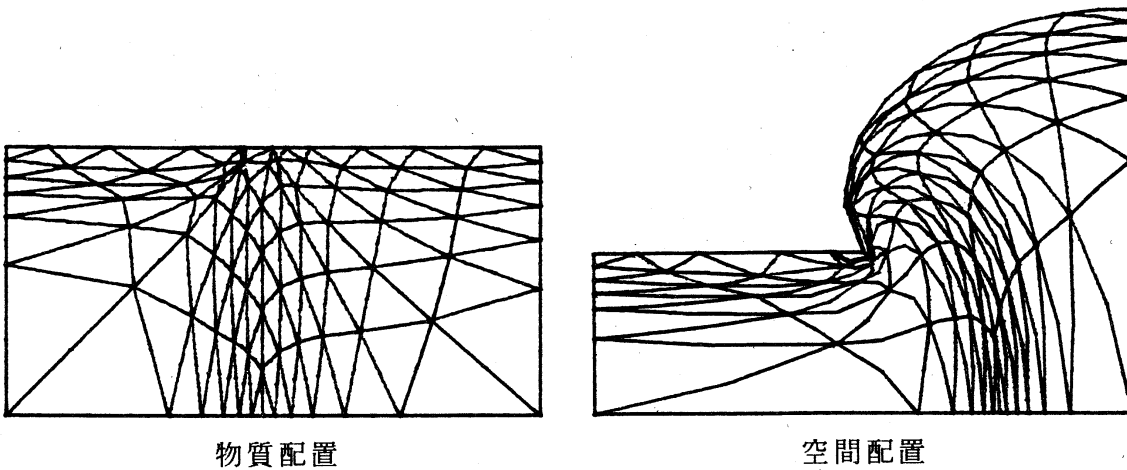


図6 ALE法によるメッシュ ($v = 0.4$)

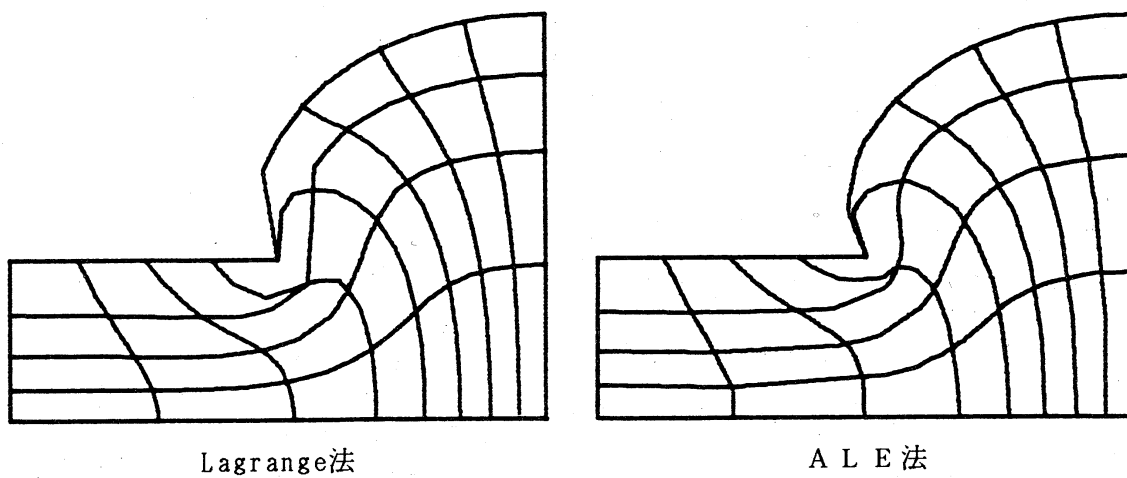


図7 変形図 ($v = 0.4$)

ープに捉えられている。以上のことから、図6で見られるALE法の空間配置におけるメッシュの比較的大きなゆがみは、適応型節点再配置により解析精度が向上し、変形がより鋭敏に捉えられるため生じたものと考えられ、ALE法における押し込み力の速い収束性を考え合わせると、適応型節点再配置手法は総合的によりよいメッシュを与えているものと考えられる。

6. 結び

Lagrange型変形記述に基づき定式化された問題である非圧縮超弾性体の大変形問題に対して、ALE型変形記述に基づく定式化を行なうことにより、合理的な節点再配置手法が得られた。また、このALE有限要素法と適応型節点再配置手法によって、従来の数値解析手法では解析が困難であった非圧縮超弾性体の大変形領域における高い精度の解を、比較的容易に得ることが可能となった。しかしながら、細かい要素分割の場合に対しては、本手法は現時点ではあまり有効ではなかったことから、今後の検討課題と考えられる。

参考文献

- [1] Yamada, T. and F. Kikuchi: "A Mixed Finite Element Method for Large Deformation Analysis of Incompressible Hyperelastic Materials," *Theoretical and Applied Mechanics*, vol. 39, pp61-73, 1990.
- [2] Liu, W.K., H. Chang, J.S. Chen and T. Belytschko: "Arbitrary Lagrangian-Eulerian Petrov-Galerkin Finite Element for Nonlinear Continua," *Com.Meths.Appl.Mech.Engng.*, vol. 68, pp.259-310, 1988.
- [3] Benson, D.J.: "An Efficient, Accurate, Simple ALE Method for Nonlinear Finite Element Programs," *Com.Meths.Appl.Mech.Engng.*, vol. 72, pp.305-350, 1989.
- [4] Haber, R.B.: "A Mixed Eulerian-Lagrangian Displacement Model

- for Large-Deformation Analysis in Solid Mechanics,"
Com.Meths.Appl.Mech.Engng., vol. 43, pp.277-292, 1984.
- [5] Cheng, J.H. and N. Kikuchi: "A Mesh Re-zoning Technique for
Finite Element Simulations for Metal Forming Processes,"
Int.J.Numer.Meth.Engng., vol.23, pp.219-228, 1986.
- [6] 山田貴博, 菊地文雄: "非圧縮超弾性体に対する A L E 有限要素法,"
構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 第14巻,
pp.31-36, 1990.
- [7] Diaz, A.R., N. Kikuchi and J.E. Taylor: "A Method of Grid
Optimization for Finite Element Methods,"
Com.Meths.Appl.Mech.Engng., vol. 41, pp.29-45, 1983.