

外部写像関数で電荷を配置する代用電荷法

桂田 祐史 (KATSURADA, MASASHI)

明治大学 理工学部数学科

§1. 序

ここでは平面における解析的な Jordan 閉曲線 Γ の内部領域 Ω における Dirichlet 問題

$$(1-1) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = f & \text{on } \Gamma, \end{cases}$$

の近似解を代用電荷法を使って求めることを考える。すなわち、 Ω の外部に電荷点といわれる点 $\{y_j\}_{j=1}^N$ を取り、

$$u^{(N)}(x) = \sum_{j=1}^N Q_j \log|x - y_j|$$

の形の関数の中から近似解を選ぶ。ここで、 $\{Q_j\}_{j=1}^N$ は collocation method により決定される。すなわち境界 Γ 上に点 $\{x_j\}_{j=1}^N$ を取り、その上で近似解 $u^{(N)}$ の値が厳密解 u の値 ($= f(x_j)$) と等しくなるように $\{Q_j\}$ を選ぶ:

$$(1-2) \quad u^{(N)}(x_j) = f(x_j) \quad (j = 1, \dots, N).$$

これは N 個の未知数 $\{Q_j\}_{j=1}^N$ についての連立一次方程式である。

この方法は一見してシンプルであるが、電荷点 $\{y_j\}_{j=1}^N$ と拘束点 $\{x_j\}_{j=1}^N$ をどう配置するかについて、具体的にほとんど何も述べていないことに注意しよう。今回の発表でも分かるように配置の仕方によって近似解の精度は大

大きく異なる。代用電荷法において電荷点、拘束点の配置法は基本的な問題である。

筆者は、 $\{x_j\}, \{y_j\}$ の配置を Ω の内部写像関数を用いて定めた場合の収束・誤差評価について発表しているが ([5],[6])、ここでは天野要氏の説に従い、外部写像関数

$$\Psi : \{w \in \mathbb{C}; |w| \geq \rho\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \Omega$$

を用いて

$$x_j = \Psi(\rho\omega^{j-1}), \quad y_j = \Psi(R\omega^{j-1}) \quad (j = 1, \dots, N)$$

と配置した場合を考える (ただし $\omega = \exp(2\pi i/N)$, $i = \sqrt{-1}$ であり、 \mathbb{R}^2 と \mathbb{C} を同一視した表現を用いている)。内部写像関数を用いた場合と同様の exponential convergence が得られるが、応用を考えるとこちらの方が重要であると考えられる。

Γ の解析性により、ある $R_2 \in (0, \rho)$ に対して Ψ は領域 $\{w; |w| \geq R_2\}$ まですべて等角に拡張されることがわかる。

§2. 準備

この節では今回の結果を理解するために必要な既知の結果をまとめておこう。まず記号をいくつか用意する。これは以下の節でも一貫して使われる。

記号 1. $r > 0$ に対し

$$\gamma_r = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| = r\},$$

$$D_r = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| < r\},$$

また、 $r \in [R_2, +\infty)$ に対して、

$$\Gamma_r = \Psi(\gamma_r),$$

$$\Omega_r = \Gamma_r \text{ の内部領域,}$$

と定義する。さらに

$$\gamma = \gamma_\rho, \quad D = D_\rho,$$

とする。 $(\Gamma = \Gamma_\rho, \Omega = \Omega_\rho)$ となることに注意

記号 2. 定義域が Γ_r を含む関数 v に対し $S^1 \equiv \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上の関数 v_r を

$$v_r(\theta) = v(\Psi(re^{2\pi i\theta})), \quad \theta \in S^1$$

により定める。

記号 3. S^1 上で定義された関数 v の Fourier 係数を $\hat{v}(n)$ で表す。すなわち、

$$v(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{v}(n) e^{2\pi i n \theta}, \quad \theta \in S^1.$$

領域 Ω が円板 D_ρ そのものである場合は、[3],[4] で調べられた。今回の結果を理解するために必要な結果をいくつか紹介しよう。

(a) $R \neq 1, R^N - \rho^N \neq 1$ ならば、collocation equation (1-2) により、一意に近似解 $u^{(N)}$ が定まる。

(b) 境界値 f の滑らかさに応じた誤差評価が得られる。

(b-i) f の Fourier 級数が絶対収束するならば、 $N \rightarrow +\infty$ とする時、近似解 $u^{(N)}$ は厳密解 u に一様収束する:

$$\|u - u^{(N)}\|_{L^\infty(\gamma)} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow +\infty).$$

(b-ii) $\alpha > 1$ なる定数 α に対して f_ρ の Fourier 係数 $\hat{f}_\rho(n)$ が $\hat{f}_\rho(n) = O(|n|^{-\alpha})$ ($n \rightarrow \pm\infty$) なる評価を満たす時、

$$\|u - u^{(N)}\|_{L^\infty(\gamma)} = O(N^{-\alpha+1}) \quad (N \rightarrow +\infty).$$

(b-iii) $r_0 > \rho$ なる定数 r_0 に対して f_ρ の Fourier 係数 $\hat{f}_\rho(n)$ が

$$(2-1) \quad \hat{f}_\rho(n) = O((\rho/r_0)^{|n|}) \quad (n \rightarrow \pm\infty)$$

なる評価を満たす時、1 より小さい正数 τ が存在して

$$\|u - u^{(N)}\|_{L^\infty(\gamma)} = O(\tau^N) \quad (N \rightarrow +\infty).$$

ここで $\tau = \max\{\rho/R, (\rho/r_0)^{1/2}\}$.

このうち (b-iii) は注釈が必要であろう。Fourier 係数が指数減少するとは実解析的ということであるから、「円板領域の場合境界値が実解析的ならば

指数収束する」ということであるが、条件をわざわざ (2-1) のように記したのは、幾何学的に次のような意味があって考えやすいからである。

$$(2-2) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } D = D_\rho, \\ u = f & \text{on } \gamma = \gamma_\rho, \end{cases}$$

の解 u が D_{r_0} まで調和に拡張できる。

後で比較するために (b-iii) を少し詳しく、次の形に書き換えておくと便利であろう。

(b-iii)' $r_0 \in (\rho, R^2/\rho)$ なる定数 r_0 に対して f_ρ の Fourier 係数 $\hat{f}_\rho(n)$ が $\hat{f}_\rho(n) = O((\rho/r_0)^{|n|})$ ($n \rightarrow \pm\infty$) なる評価を満たす時、

$$\|u - u^{(N)}\|_{L^\infty(\gamma)} \leq C(\rho/r_0)^{N/2} \|u\|_{L^\infty(\gamma_{r_0})}.$$

が成り立つ。ここで C は N によらない定数。

[4],[5] で扱った「内部写像関数を用いて電荷を配置する代用電荷法」にも言及しておこう。 $\Phi: D_\rho \rightarrow \Omega$ を Ω の内部写像関数とする。 Γ の解析性により、 $\exists R_1 > \rho$ s.t. Φ は D_{R_1} まで等角に拡張できる。それを同じ記号 Φ で表すことにして、電荷点、拘束点を

$$x_j = \Phi(\rho\omega^{j-1}), \quad y_j = \Phi(R\omega^{j-1})$$

で定めるものである (R は $R \in (\rho, R_1)$ なるように取る)。こうした場合も今回の「外部写像関数を用いた代用電荷法」とよく似た結果が得られる。しかし近似解法としては外部写像関数を用いる方がより自然であろう。例えば、実際の例では写像関数は何らかの近似解法で求めねばならないことが多いわけであるが、内部写像関数を用いる場合は、それをさらに問題領域の外部まで解析接続する必要があり、多少の面倒が伴うことが根拠としてあげられる。

§3. 主定理の陳述

まず標語的に述べると、「sup ノルムのかわりに Sobolev 的なノルムを採用し、漸近的な誤差評価で我慢することになれば、円板領域の場合と似た結果を得ることができる」。すなわち (a) R についてのある仮定の下で、 N を十分大きく取れば任意の境界値に対して collocation equation (1-2) は一意可解になる。(b) r_0 を $r_0 \in (\rho, \rho^2/R_2)$ なる数とする時、 $f_\rho \in X_{r_0/\rho, t}$ なる境界値に対しては (この記号の意味はすぐ後に解説する)、次の形の誤差評価を得る:

$$\|f - u^{(N)}\|_{H^s(\Gamma)} \leq CN^p(\rho/r_0)^{N/2} \|u\|_{H^t(\Gamma_{r_0})}$$

H^s は通常の Sobolev 空間である。また p は r_0, R, ρ, s, t で定まる定数である。

$f_\rho \in X_{r_0/\rho, t}$ とは、Dirichlet 問題 (1-1) の厳密解 u が Ω_{r_0} まで調和に拡張されて、 $u|_{\Gamma_{r_0}} \in H^t(\Gamma_{r_0})$ ということである。

§2 で紹介した円板領域の場合の結果とは、採用しているノルムが異なるので直接の比較は出来ないが、 $r_0 > \rho$ の場合は $(\rho/r_0)^{N/2}$ が主たる収束因子になるところは同じである。なお、 $r_0 = \rho$ の場合は $(\rho/r_0)^{N/2} = 1$ なので、 N^p が重要になるが、この場合に p の部分を具体的に書き下すと次の形の誤差評価式が得られる。

$$\|f - u^{(N)}\|_{H^s(\Gamma)} \leq CN^{\max\{s-t, -t\}} \|f\|_{H^t(\Gamma)}.$$

この結果は Arnold-Wendland [1] で扱われた境界要素法による近似解の誤差評価とよく似ている。

以下、得られた結果を完全な形で述べよう。まず関数空間を導入する。

記号. S^1 上の有限 Fourier 級数全体の集合をノルム

$$\|v\|_{\epsilon, s} = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{v}(n)|^2 \epsilon^{2|n|} \underline{n}^{2s} \right)^{1/2}$$

で完備化してできる Hilbert 空間を $X_{\epsilon, s}$ で表す。ここで $\underline{n} = \max\{2\pi|n|, 1\}$.

$\epsilon = 1$ ならば $X_{\epsilon, s}$ は通常の Sobolev 空間になる: $X_{1, s} = H^s(S^1)$. また $\epsilon > 1$ ならば $X_{\epsilon, s}$ に属する関数は実解析的である。

さらに、index を辞書的順序で比較する、すなわち

$$(a_1, b_1) < (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 < a_2 \text{ or } (a_1 = a_2 \text{ and } b_1 < b_2).$$

という順序を導入すると

$$(\varepsilon_1, s_1) > (\varepsilon_2, s_2) \Rightarrow X_{\varepsilon_1, s_1} \subset X_{\varepsilon_2, s_2} \text{ (compact な埋め込み)}$$

定理. R を

$$\rho < R < \rho^2/R_2, \quad R \neq 1, \quad \Gamma_R \text{ の容量} \neq 1$$

を満たすように選ぶとき、以下の (1), (2) が成り立つ。

(1) 十分大きい任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し、方程式 (C) は常に一意可解である。

(2) r_0, t を

$$(\rho, 1/2) < (r_0, t) < (\rho^2/R_2, -1/2), \quad r_0 \leq R^2/\rho$$

を満たす数とすると、 $f_\rho \in X_{r_0/\rho, t}$ なる f に対して次の誤差評価が得られる:

$$\|f - u^{(N)}\|_{H^s(\Gamma)} \leq CN^p (\rho/r_0)^{N/2} \|f_\rho\|_{r_0/\rho, t},$$

ただし

$$p = \begin{cases} \max\{s-t, -t\} & r_0 = \rho \text{ の時} \\ \max\{s-t, s-1, -1\} & r_0 = R^2/\rho \text{ の時} \\ s-t & \text{それ以外の場合.} \end{cases}$$

ここで C は f や N によらない定数。 $r_0 = \rho$ の時 s は $s < t$ を満たすものとする。

証明は [5], [6] と同様に Arnold-Wendland [1] の方法による。

考察 1. Jordan 曲線の容量.

Jordan 曲線 Γ の容量とは、単位円の外部を Γ の外領域に写す写像関数 g を

$$g(z) = c_1 z + c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots$$

と Laurent 展開したときの $|c_1|$ のことである。容量については次のことが成立する ([2])。

- (1) 円周の容量は半径に等しい。
 (2) $\sup\{\Gamma\text{の内領域に含まれる円の半径}\} \leq \Gamma\text{の容量} \leq \inf\{\Gamma\text{を含む円板の半径}\}$
 (3) 容量 $\neq 1$ の Jordan 閉曲線 Γ 上の Hölder 連続関数 Q が

$$\int_{\Gamma} E(x, y)Q(y)ds_y = 0 \quad (\forall x \in \Gamma\text{の内領域})$$

を満たすならば、 $Q = 0$ on Γ .

(2) から、「 Γ_R の容量 $\neq 1$ 」という条件は、問題をスケールリングすることにより簡単に満足させられるので、応用に際してはあまり問題ないことが分かる。

(3) は定理の証明で使われるもので、「 Γ_R の容量 $\neq 1$ 」という条件の由来となるものである。

考察 2. 滑らかさについての条件について.

定理の仮定は結構複雑であるが、 $(\rho, 1/2) < (r_0, t)$, $r_0 \leq \rho^2/R_2$, $(\rho, s) < (r_0, t)$ は納得できるものである。問題は、

$$R < \rho^2/R_2, \quad (r_0, t) < (\rho^2/R_2, -1/2)$$

である。 R, r_0 , がともに ρ^2/R_2 で押えられているが、これが本当に必要であるかどうかはまだ分からない。今のところ、この条件を外すと収束が証明できないのだが、これまでの数値実験の結果では必要性の証拠は見当たらなかった。これは領域の境界 Γ の解析性の仮定を省けるかどうかに関わることなので影響が大きい。

考察 3. 内部写像関数を用いた場合の結果との比較.

既に述べたように、実際の応用を考えると外部写像関数 Ψ を用いた電荷・拘束点配置の方が実現が容易で使いやすいが、その他にも両者の差はある。外部写像関数 Ψ を用いた場合は境界 Γ における誤差評価しか得られないのに対し、内部写像関数 Φ を用いた場合は境界以外の場所における誤差についても直接の評価が得られていることが大きな相違点としてあげられる。すなわち、

$$\|u - u^{(N)}\|_{H^s(\Gamma_r)} \leq CN^p(r/r_0)^{N/2} \|u\|_{H^t(\Gamma_{r_0})}$$

の形の評価が、ある区間 ($\exists \rho$) に含まれる r について成立する。

§4. 数値実験結果の紹介

1) 楕円領域の場合

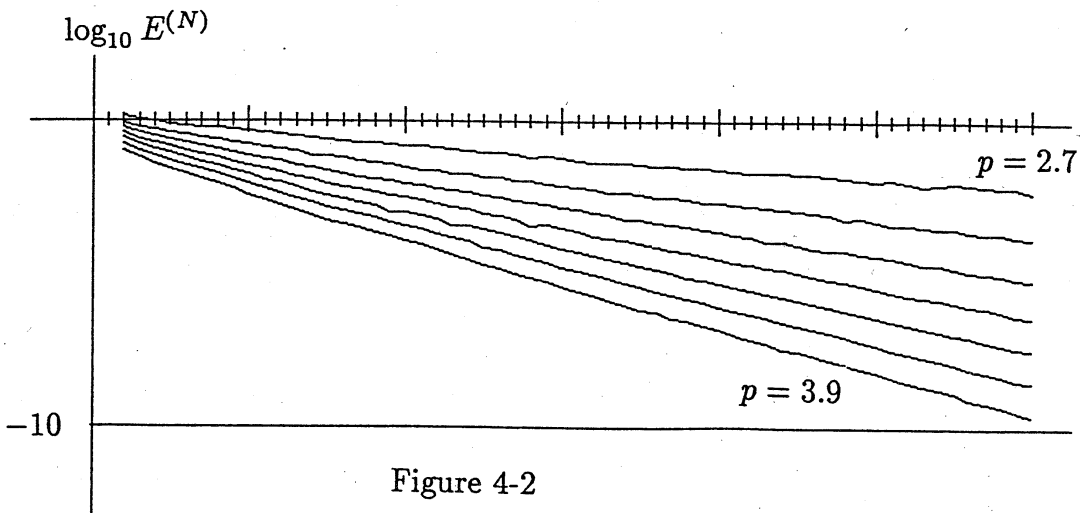
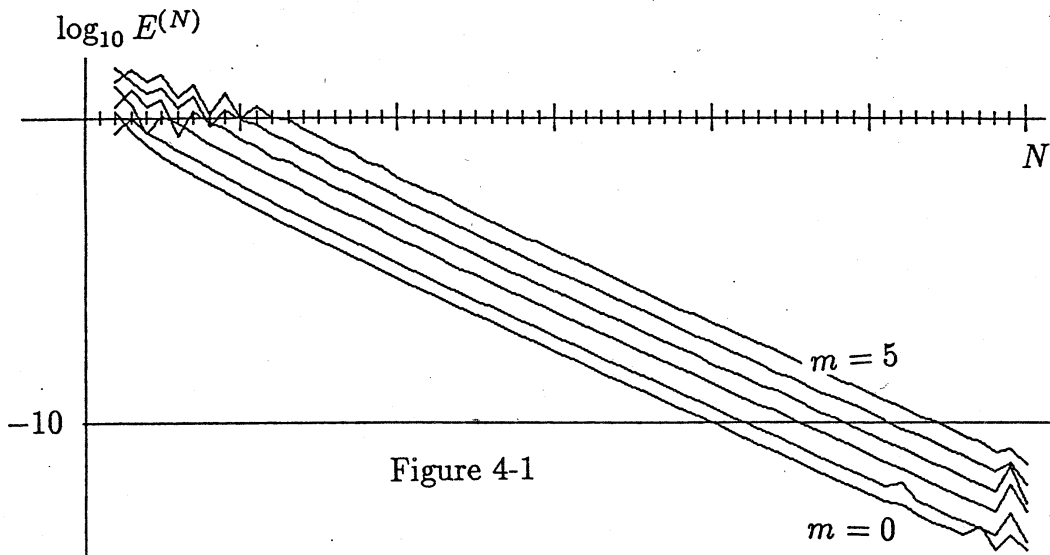
$\Psi(w) = w + 1/w$ を考える。これは $|w| > 1$ を $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$ に等角に写像する。

$\rho =$ とした時の Ω_ρ を Ω とする。すなわち

$$\Omega = \{(x, y); x^2/(\rho + 1/\rho)^2 + y^2/(\rho - 1/\rho)^2 < 1\}.$$

$R = 3$, $f(re^{i\theta}) = r^m \cos m\theta$ の場合が 4-1 図である ($m = 0, 1, \dots, 5$ について計算してある)。

$R = 4$, $f(z) = \log|z - p|$ の場合が 4-2 図である ($p = 2.7, 2.9, \dots, 3.9$ について計算してある)。



いずれも exponential convergence が確かめられる。円板領域の場合の数値実験結果は [3] で発表したか、それとよく似ている。

2) 楕円領域を少し摂動した領域の場合

$\Psi(w) = w - 1/2 + 1/(w - 1/2)$ とした時の Ω_ρ を Ω とする。 Ψ は $|w - 1/2| > 1$ で等角である。

$\rho = 1.51$ の場合の領域を 4-3 図に、また $R = 8$ で、1) と同じ $f(re^{i\theta}) = r^m \cos m\theta$ という境界値についての近似解を計算したときの結果を 4-4 図に示す。この例では $R < \rho^2/R_2$ が満足されていない (従って定理の守備範囲以外である) にも関わらず、そうでない場合と同様に収束していることを注意しておく。

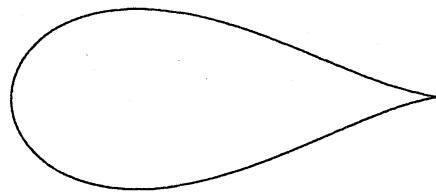


Figure 4-3 $\Omega_{1.51}$

$$\Psi(w) = w - 1/2 + 1/(w - 1/2)$$

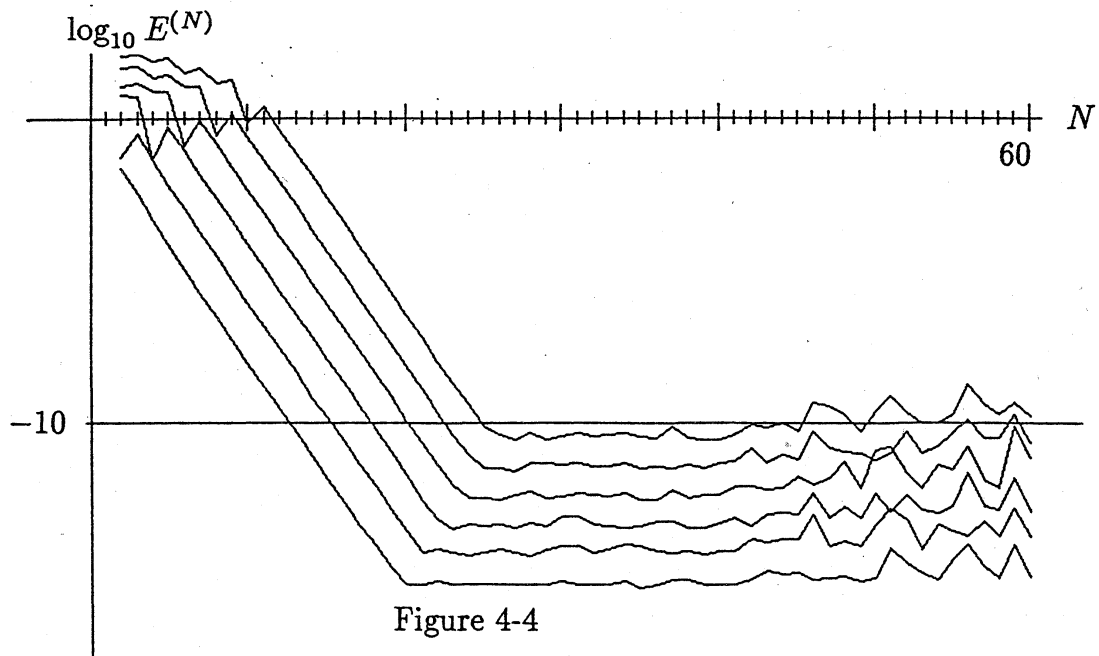


Figure 4-4

参考文献

- [1] Arnold, D.N. and W.L.Wendland, The convergence of spline collocation for strongly elliptic equations on curves, Numer. Math. 47(1985), 317-341.
- [2] Henrici,P., Applied and computational complex analysis, vol.3, Wiley-Interscience (1986).
- [3] Katsurada,M. and H.Okamoto, A mathematical study of the charge simulation method I, J.Fac.Sci.Univ.Tokyo, Sect.IA,Math.35(1988), 507-518.
- [4] Katsurada,M., A mathematical study of the charge simulation method II, J.Fac.Sci.Univ.Tokyo, Sect.IA.Math.36(1989),135-162.
- [5] 桂田祐史, "解析的境界を持つ Jordan における代用電荷法", 京都大学数理解析研究所考究録 (1989).
- [6] Katsurada, M., Asymptotic error analysis of the charge simulation method in Jordan regions with analytic boundaries, J.Fac.Sci.Univ.Tokyo, Sect.IA, Math.37 (1990), 635-657.

参考文献

- [1] Arnold, D.N. and W.L.Wendland, The convergence of spline collocation for strongly elliptic equations on curves, Numer. Math. 47(1985), 317-341.
- [2] Henrici, P., Applied and computational complex analysis, vol.3, Wiley-Interscience (1986).
- [3] Katsurada, M. and H.Okamoto, A mathematical study of the charge simulation method I, J.Fac.Sci.Univ.Tokyo, Sect.IA, Math.35(1988), 507-518.
- [4] Katsurada, M., A mathematical study of the charge simulation method II, J.Fac.Sci.Univ.Tokyo, Sect.IA, Math.36(1989), 135-162.
- [5] 桂田祐史, "解析的境界を持つ Jordan における代用電荷法", 京都大学数理解析研究所考究録 (1989).
- [6] Katsurada, M., Asymptotic error analysis of the charge simulation method in Jordan regions with analytic boundaries, J.Fac.Sci.Univ.Tokyo, Sect.IA, Math.37 (1990), 635-657.