

軸対称 3次元問題の境界要素法解析

北海道大学工学部	本間 利久 (Toshihisa Honma)
北海道大学工学部	五十嵐 一 (Hajime Igarashi)
東京大学工学部	槌本 昌則 (Masanori Tsuchimoto)
附属原子力工学研究施設	

1. はじめに

理工学の分野において生じる様々な物理現象を定量的かつ定性的に把握するためには、解析対象となる現象と考察空間を数学的にモデル化し、現象の支配方程式を決定し、さらにそれらを適当な境界条件または初期条件のもとで解かなければならない。

特に上記支配方程式の代表的な微分演算子の一つに、未知関数にラプラシアンと変数 $1/r^2$ および定数 k が作用する軸対称ヘルムホルツ型微分演算子がある。このヘルムホルツ型演算子は、特に波動現象や拡散現象を解析する際に頻繁に現れるため、この演算子に基づく方程式を精度よく解析することは、物理現象の解明に大きな役割を果たすものと考えられる。

たとえば、工学分野においてはトカマク型核融合炉や共振器等のように、ヘルムホルツ型方程式によって支配される現象が現れる、軸対称性を有する多くの装置がある。これらの装置における波動現象や電磁界問題を解析する有効な手法の一つに境界要素法がある。

本研究は、上記の軸対称ヘルムホルツ型方程式を境界要素法によって解析する際の基礎となる種々の基本解の関係を、物理および応用数学的側面から調べることを目的とする。そのためにまず、軸対称 3次元ヘルムホルツ型方程式の基本解の表示式を、3次元の基本解からリング状のソースを用いた物理的な考察を通じて一般的に定義する。また基本解のもうひとつの表示式として、ヘルムホルツ型方程式のフーリエ変換・ハンケル変換を用いて数学的に導出する。さらに、物理的考察から定義された基本解表示式とヘルムホルツ型方程式の積分変換から求めた基本解表示式が同等であることを示す。

2. ヘルムホルツ型方程式

ヘルムホルツ型方程式は、軸対称の物理的現象を解析する際に様々な表現形式をとって現れる。ヘルムホルツ型に分類される具体的な方程式を Table 1 に示す。

ただしこの表において、方程式はすべて円筒座標系 (r, θ, z) で記述されており、また軸対称性 $\partial/\partial\theta = 0$ が考慮されている。さらに k は定数であり、 ϕ および ψ はスカラー関数を表している。ただし ψ はベクトル量と関連した関数であり、任意のベクトル \mathbf{A} の θ 成分と r との積 rA_θ を表している。またTable 1において演算子 L は

$$L = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (1)$$

と定義されている。この L はシャフラノフ演算子として知られており、核融合プラズマの電磁流体的(MHD)平衡を解析する際によく現れる。また、軸対称形におけるラプラシアン ∇^2 と L との間には、スカラー関数 u に対して次のような関係

$$\frac{1}{r} L u = \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) \frac{u}{r}, \quad (2)$$

ただし

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

が成り立っている。

次に、Table 1のケースAからGまでの方程式によって表される具体的な物理現象について説明する。Aはポテンシャル場を記述するラプラス方程式であり、イオンビーム解析等の静電界問題や熱伝導問題[1]を解析する際の基礎となる。Bはプラズマの軸対称MHD平衡問題[2]を解析する際に重要な支配方程式となるグラード・シャフラノフ方程式である。Cは超音波等のスカラー波動の支配方程式である。Dは導波管や共振器内の電磁波動[3]を支配する方程式となる。Eは核融合装置内でのプラズマシース領域の解析に適用される線型化ポアソン-ボルツマン方程式[4,5]である。Fは超電導物質への磁束の侵入現象を記述するロンドン方程式[6]となる。Gはプラズマ表面波をモード解析[7]する際に現れる方程式である。

3. 基本解の物理的考察

上で述べたように、物理現象を境界要素法を用いて数値的に解析するためには、各々の現象を支配する方程式に対応した基本解を求めなければならない。本節では、AからGまでの方程式の基本解を3次元の基本解から物理的な考察を通して定義する。

軸対称系での基本解は、Fig. 1に示すようなリング状のソースにとりて定義することができる[8]。すなわち軸対称ヘルムホルツ型方程式の基本解の場合、3

次元の基本解 $t \exp(-kR)/R$ をリングソース上で積分すればよい(ただし t は θ 方向の単位ベクトル、 R はソース点とフィールド点の距離である)。これより軸対称形におけるヘルムホルツ型方程式の各々の基本解は Table 2 に示された表現形式となることがわかる。

Table 2 において、 (a, b) はソース点の (r, z) 座標、 δ はディラックのデルタ関数、 n は 0 以上の整数であり、ソース点とフィールド点との距離 R は以下のように定義されている。

$$R^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta + (z - b)^2. \quad (3)$$

Table 2 より、基本解が満たすべき方程式を一般化して表記すると

$$\frac{1}{r} \left(L - k^2 - \frac{n^2 - 1}{r^2} \right) \sigma^* = -\delta(r - a) \delta(z - b), \quad (4)$$

となることがわかる。一方、上記定義による基本解の一般形は Table 2 より

$$\sigma^* = \frac{ar}{4\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\exp(-kR)}{R} \cos(n\theta) d\theta, \quad (5)$$

と表すことができる。ここで、 k は複素数を含む任意の定数である。

4. 方程式の積分変換による基本解の導出

基本解が満たす方程式の一般形 (4) に積分変換を施すことにより数学的に基本解の一般形が導出できる [9]。以下にその手順を説明するために、基本解の導出で用いる積分変換を以下のように定義する。

$$\text{フーリエ変換} \quad ; F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-j\omega z} dz, \quad (6)$$

$$\text{フーリエ逆変換} \quad ; f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega z} d\omega, \quad (7)$$

$$\text{ハンケル変換} \quad ; H_n[h(r), \xi] = \int_0^{\infty} h(r) r J_n(r\xi) dr, \quad (8)$$

$$\text{ハンケル逆変換} \quad ; h(r) = \int_0^{\infty} H_n[h(r), \xi] \xi J_n(r\xi) d\xi. \quad (9)$$

ここで、 J_n は n 次の第一種ベッセル関数であり、ハンケル変換において次のような関係式

$$H_n[\beta_n h(r), \xi] = -\xi^2 H_n[h(r), \xi], \quad \beta_n \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2}, \quad (10)$$

がある。(4)式の左辺(LHS)は $n \geq 0$ なる条件のもとで

$$LHS = \left(\beta_n + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) \frac{\sigma^*}{r}. \quad (11)$$

ように変形されるので、(4)式の両辺に r 方向に関してはハンケル変換、 z 方向に関してはフーリエ変換を施すと

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left\{ \left(\beta_n + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) \frac{\sigma^*}{r} r J_n(r\xi) e^{-j\omega z} \right\} dr dz \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left\{ \delta(r-a) \delta(z-b) r J_n(r\xi) e^{-j\omega z} \right\} dr dz. \end{aligned} \quad (12)$$

となる。さらに(12)式の左辺(LHS)は(10)式より次のように変形される。

$$\begin{aligned} LHS &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) \frac{\sigma^*}{r} r J_n(r\xi) e^{-j\omega z} \right\} dr dz + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left\{ \beta_n \frac{\sigma^*}{r} r J_n(r\xi) e^{-j\omega z} \right\} dr dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) e^{-j\omega z} H_n \left[\frac{\sigma^*}{r}, \xi \right] - \xi^2 H_n \left[\frac{\sigma^*}{r}, \xi \right] e^{-j\omega z} \right\} dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (-\omega^2 - k^2 - \xi^2) e^{-j\omega z} H_n \left[\frac{\sigma^*}{r}, \xi \right] dz \\ &= -(\omega^2 + k^2 + \xi^2) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega z} H_n \left[\frac{\sigma^*}{r}, \xi \right] dz. \end{aligned} \quad (13)$$

一方、(12)式の右辺(RHS)は次のように変形される。

$$\begin{aligned} RHS &= - \int_0^{\infty} \delta(r-a) r J_n(r\xi) e^{-j\omega b} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z-b) e^{-j\omega(z-b)} dz \right\} dr \\ &= -e^{-j\omega b} \int_0^{\infty} \delta(r-a) r J_n(r\xi) dr = -e^{-j\omega b} a J_n(a\xi). \end{aligned} \quad (14)$$

(13)、(14)式から次のような式が導出される。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega z} H_n \left[\frac{\sigma^*}{r}, \xi \right] dz = \frac{a J_n(a\xi) e^{-j\omega b}}{\omega^2 + k^2 + \xi^2}. \quad (15)$$

さらに (15) 式にフーリエ逆変換を施すと次の式が得られる.

$$H_n \left[\frac{\sigma^*}{r}, \xi \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a J_n(a\xi)}{\omega^2 + k^2 + \xi^2} e^{j\omega(z-b)} d\omega. \quad (16)$$

またこの式にハンケル逆変換を行うと次の式が得られる.

$$\sigma^* = \frac{ar}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi J_n(a\xi) J_n(r\xi)}{\omega^2 + k^2 + \xi^2} e^{j\omega(z-b)} d\omega d\xi. \quad (17)$$

さらに、(17) 式の ω についての積分はコーシーの留数定理より実行することができるから、

$$\sigma^* = \frac{ar}{2} \int_{\xi=0}^{\infty} \frac{\xi J_n(r\xi) J_n(a\xi) \exp(-\sqrt{\xi^2 + k^2} |z-b|)}{\sqrt{\xi^2 + k^2}} d\xi, \quad (18)$$

と表現でき、 ξ のみの積分表示となる。以上の結果から、それぞれの方程式に対応した基本解は Table 3 に示すようになることがわかる。

5. 基本解表示式の同等性

3 節の物理的考察から定義された基本解の表示式 (5) 式、あるいは 4 節の微分方程式の積分変換から直接得られた基本解の表示式 (18) 式を境界要素法解析において使用するためには、上記 2 つの基本解表示式が同一のものであり、どちらを使用してもさしつかえないことを示す必要がある。以下 (5) 式と (18) 式の同等性を示す。

(5) 式において $R^2 = \rho^2 + \zeta^2$ とおく。ただし

$$\begin{cases} \rho = (r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta)^{1/2} \\ \zeta = |z-b| \end{cases} \quad (19)$$

である。さらに (5) 式の被積分関数 f を次のように定義する。

$$f(\rho, \theta, \zeta) = \frac{\exp(-kR)}{R} \cos(n\theta). \quad (20)$$

(20) 式で定義した関数 $f(\rho, \theta, \zeta)$ を ρ についてのフーリエ・ベッセル変換を用いて、次のように表示する。

$$f(\rho, \theta, \zeta) = \int_{\xi=0}^{\infty} \xi \left\{ \int_{\lambda=0}^{\infty} f(\lambda, \theta, \zeta) J_0(\lambda\xi) J_0(\rho\xi) \lambda d\lambda \right\} d\xi. \quad (21)$$

このとき(20)式より

$$\frac{\exp(-kR)}{R} \cos(n\theta) = \int_{\xi=0}^{\infty} \left\{ \xi J_0(\rho\xi) \cos(n\theta) \int_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \zeta^2}} \exp(-k\sqrt{\lambda^2 + \zeta^2}) J_0(\lambda\xi) d\lambda \right\} d\xi. \quad (22)$$

(22)式の λ についての積分は実行することができて

$$\int_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \zeta^2}} \exp(-k\sqrt{\lambda^2 + \zeta^2}) J_0(\lambda\xi) d\lambda = \frac{\exp(-\zeta\sqrt{\xi^2 + k^2})}{\sqrt{\xi^2 + k^2}} \quad (23)$$

となる。さらにフーリエ変換(6)と、(22), (23)式より次の関係が成立することがわかる。

$$\begin{aligned} & \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\exp(-kR)}{R} \cos(n\theta) d\theta \\ &= \int_{\xi=0}^{\infty} \left\{ \frac{\xi \exp(-\zeta\sqrt{\xi^2 + k^2})}{\sqrt{\xi^2 + k^2}} \int_{\theta=0}^{2\pi} J_0\left(\sqrt{(r\xi)^2 + (a\xi)^2 - 2(r\xi)(a\xi)\cos\theta}\right) \cos(n\theta) d\theta \right\} d\xi. \quad (24) \end{aligned}$$

(24)式の θ に関する積分は、ベッセル関数の加法定理を用いて次のように実行できる。

$$\begin{aligned} & \int_{\theta=0}^{2\pi} J_0\left(\sqrt{(r\xi)^2 + (a\xi)^2 - 2(r\xi)(a\xi)\cos\theta}\right) \cos(n\theta) d\theta \\ &= J_0(r\xi) J_0(a\xi) \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos(n\theta) d\theta + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m(r\xi) J_m(a\xi) \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta \\ &= 2\pi J_n(r\xi) J_n(a\xi) \quad (25) \end{aligned}$$

(24)、(25)式より結局、基本解(5)は

$$\frac{ar}{4\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\exp(-kR)}{R} \cos(n\theta) d\theta = \frac{ar}{2} \int_{\xi=0}^{\infty} \frac{\xi J_n(r\xi) J_n(a\xi) \exp(-\sqrt{\xi^2 + k^2} |z-b|)}{\sqrt{\xi^2 + k^2}} d\xi, \quad (26)$$

となり、基本解(18)式と一致することがわかる。以上により、2種類の基本解が同一のものであることが証明できた。

6. まとめ

本報告では、3次元の基本解を用いた物理的考察から定義されたヘルムホルツ型方程式の基本解と、ヘルムホルツ型方程式をフーリエ変換およびハンケル変換することによって得られる基本解が同等であることを示した。

参考文献

- 1 L. C. Wrobel and C. A. Brebbia : "Axisymmetric Potential Problems", New Developments in Boundary Element Methods (ed. C. A. Brebbia) Butterworths, London, 1980, pp. 77-89.
- 2 M. Tsuchimoto, T. Honma, S. Yatsu, T. Kasahara and I. Kaji : "An Analysis of Nonlinear MHD Equilibria of Compact Tori by Using Boundary Element Method", IEEE Trans. Magn., Vol. Mag-24, No.1, January, 1988, pp. 248-251.
- 3 M. Tsuchimoto, T. Honma, and A. Yoneta : "Boundary Element Analysis of Axisymmetric Resonant Cavities", IEEE Trans. Magn. Vol. Mag-24, No. 6, November, 1988, pp. 2500-2502.
- 4 M. Tsuchimoto, T. Honma, S. Tanaka and K. Miya : "Boundary Element Analysis of the Axisymmetric Neutron Diffusion Equation", Trans. IEE Japan, Vol. 109, No. 5/6, May/June, 1989, pp. 65-70.
- 5 A. Yoneta, M. Tsuchimoto and T. Honma : "An Analysis of Axisymmetric Modified Helmholtz Equation by Using Boundary Element Method", IEEE Trans. Magn., Vol. Mag-26, No. 2, March, 1990, pp. 1015-1018.
- 6 T. Honma, A. Yoneta, M. Tsuchimoto and K. Miya : "Boundary Element Analysis of Magnetic Fields of Axisymmetric Superconducting Materials", Mechanical Modellings of New Electromagnetic Materials, to be published.
- 7 M. Tsuchimoto, T. Honma, and K. Miya : "Dispersion Relation of Toroidal Plasma Surface Waves in a Quasi-Electrostatic State", IEEE Trans. Plasma Sci., to be published.
- 8 M.D. Greenberg : "Application of Green's Function in Science and Engineering", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1971.
- 9 M. Tsuchimoto, K. Miya, T. Honma and H. Igarashi : "Fundamental Solutions of the Axisymmetric Helmholtz-type Equations", Appl. Math. Modelling, Vol. 14, October, 1990.

Table 1 Variation of the Helmholtz-type equation

Case	Name of the equation	Form of the equation
A	Scalar Laplace equation [1]	$\frac{1}{r}\left(L + \frac{1}{r^2}\right)\phi = 0$
B	Vector Laplace equation [2]	$\frac{1}{r}L\psi = 0$
C	Scalar Helmholtz equation [3]	$\frac{1}{r}\left(L + k^2 + \frac{1}{r^2}\right)\phi = 0$
D	Vector Helmholtz equation	$\frac{1}{r}\left(L + k^2\right)\psi = 0$
E	Scalar modified Helmholtz equation [4, 5]	$\frac{1}{r}\left(L - k^2 + \frac{1}{r^2}\right)\phi = 0$
F	Vector modified Helmholtz equation [6]	$\frac{1}{r}\left(L - k^2\right)\psi = 0$
G	Plasma surface wave equation [7]	$\frac{1}{r}\left(L - \frac{n^2 - 1}{r^2}\right)\psi = 0$

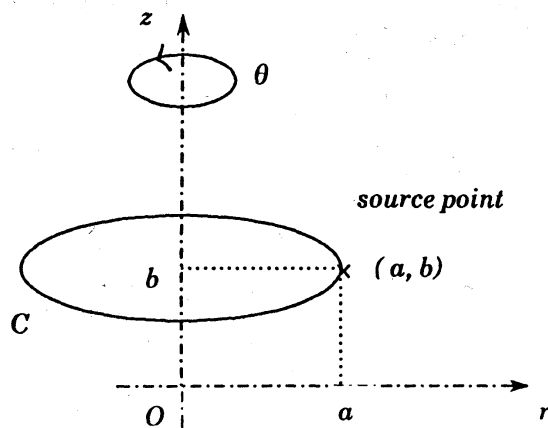


Fig. 1 Cylindrical coordinates and a ring source

Table 2 Fundamental solution from the physical aspect

Case	Equation for fundamental solution	Fundamental solution
A	$\frac{1}{r} \left(L + \frac{1}{r^2} \right) r^* = -\delta(r-a) \delta(z-b)$	$r^* = \frac{ar}{4\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{1}{R} d\theta$
B	$\frac{1}{r} L s^* = -\delta(r-a) \delta(z-b)$	$s^* = \frac{ar}{4\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\cos \theta}{R} d\theta$
C	$\frac{1}{r} \left(L + k^2 + \frac{1}{r^2} \right) \mu^* = -\delta(r-a) \delta(z-b)$	$\mu^* = \frac{ar}{4\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\exp(-jkR)}{R} d\theta$
D	$\frac{1}{r} \left(L + k^2 \right) v^* = -\delta(r-a) \delta(z-b)$	$v^* = \frac{ar}{4\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\exp(-jkR)}{R} \cos \theta d\theta$
E	$\frac{1}{r} \left(L - k^2 + \frac{1}{r^2} \right) \tau^* = -\delta(r-a) \delta(z-b)$	$\tau^* = \frac{ar}{4\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\exp(-kR)}{R} d\theta$
F	$\frac{1}{r} \left(L - k^2 \right) w^* = -\delta(r-a) \delta(z-b)$	$w^* = \frac{ar}{4\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\exp(-kR)}{R} \cos \theta d\theta$
G	$\frac{1}{r} \left(L - \frac{n^2-1}{r^2} \right) z^* = -\delta(r-a) \delta(z-b)$	$z^* = \frac{ar}{4\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\cos(n\theta)}{R} d\theta$

Table 3 Fundamental solution from the mathematical aspect

Case	n	k	Fundamental solution from mathematical aspect
A	0	0.0	$r^* = \frac{ar}{2} \int_{\xi=0}^{\infty} P_0(r,a,\xi) U(\xi,1) d\xi$
B	1	0.0	$s^* = \frac{ar}{2} \int_{\xi=0}^{\infty} P_1(r,a,\xi) U(\xi,1) d\xi$
C	0	jk	$\mu^* = \frac{ar}{2} \left[\int_{\xi=0}^k -j \xi P_0(a,r,\xi) U(j, k^2 - \xi^2) d\xi + \int_{\xi=k}^{\infty} \xi P_0(a,r,\xi) U(1, \xi^2 - k^2) d\xi \right]$
D	1	jk	$v^* = \frac{ar}{2} \left[\int_{\xi=0}^k -j \xi P_1(a,r,\xi) U(j, k^2 - \xi^2) d\xi + \int_{\xi=k}^{\infty} \xi P_1(a,r,\xi) U(1, \xi^2 - k^2) d\xi \right]$
E	0	k	$\tau^* = \frac{ar}{2} \int_{\xi=0}^{\infty} \xi P_0(r,a,\xi) U(1, \xi^2 + k^2) d\xi$
F	1	k	$w^* = \frac{ar}{2} \int_{\xi=0}^{\infty} \xi P_1(r,a,\xi) U(1, \xi^2 + k^2) d\xi$
G	n	0.0	$z^* = \frac{ar}{2} \int_{\xi=0}^{\infty} \xi P_n(r,a,\xi) U(\xi,1) d\xi$

where $P_n(r,a,\xi) = J_n(r\xi) J_n(a\xi)$ $U(x,y) = \frac{\exp(-x\sqrt{y}|z-b|)}{\sqrt{y}}$