数理解析研究所講究録
第 745 巻 1991 年 110-128

Approximate equations for long waves of water surface — あるいは，長い水面波の構造

大阪大学理学部数学教室
鹿野 忠良 KANO Tadayoshi

§1. 二次元流の長い水面波は，無次元化した時，次の方程式で記述される [3]：

$$(1.1) \quad \delta^2 \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0 \quad \text{in } \Omega(t)$$

$$(1.2) \quad \varphi_y = 0, \quad y = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{aligned} &(1.3) \quad \delta^2 \left(\varphi_t + \frac{1}{2}\varphi_x^2 + y\right) + \frac{1}{2}\varphi_y^2 = 0 \\ &(1.4) \quad \gamma_t + \delta^2 \varphi_x \gamma_x - \frac{1}{\delta^2}\varphi_y = 0 \end{aligned}\right\} y = 1 + \delta^2\gamma$$

ここに $\Omega(t) = \{(x, y) : x \in \mathbb{R},\ 0 < y < 1 + \delta^2\gamma\}$，無次元パラメータ $\delta = h/\lambda = $ (水深)/(波長) であり，$\varphi = \varphi(t, x, y)$ は速度ポテンシャルである。また $y = 1 + \delta^2\gamma$ が水面を記述する。

さて，所謂 Dirichler-Neumann map

$$\varphi_x\big|_{y=1+\delta^2\gamma} \longmapsto \varphi_y\big|_{y=1+\delta^2\gamma}$$

の kernel を δ に関して展開することによって，水面で成立する方程式（1.3）-（1.4）の展開が得られる。それを $O(\delta^2)$ 迄とった時 KdV 方程式が得られ，こうして所謂 long waves of water surface の近似方程式としての KdV 方程式に対しひとつの（数学的）正当性が示された［1］。

ここでは，上の D-N map の δ に関する高次展開があたえる方程式（1.3）-（1.4）の展開が，結局は，KdV 方程式のひとつの系列で記述されることを述べ，それによって，二次元流の長い水面波が，本質的に KdV 方程式で記述される構造をもつことを述べる。

簡単にいえば，上の（方程式の）展開の δ^{2N} の係数である $\{\gamma, u=\varphi_x|_{y=1+\delta^2\gamma}\}$ の微分多項式は，$f=(\gamma+u)/2$，$g=(\gamma-u)/2$ に関する所謂 KdV hierarchy の，第 N 次の項の組合せで表される。

§2 <u>思考実験</u>　状況を鮮明にするために，実際とはちがう，次のような"理想型"の方程式を考えよう。すなわち，方程式の展開が，$F_1 = \frac{3}{2}f^2 + \frac{1}{3}f_{xx}$ を flux とする KdV eq. に属する KdV hierarchy で表されたとする：

$$(2.1) \qquad f_t + f_x + \frac{\delta^2}{2}F_{1,x} + \frac{\delta^4}{2}F_{2,x} + \cdots = 0,$$

ここに $f, F_1, F_2, \cdots, F_n, \cdots$ は，KdV-hierarchy $\{f_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ である：

$$f_{n,x} = f_x f_{n-1} + 2f f_{n-1,x} + \frac{1}{3} f_{n-1,xxx},$$

$$(2.2) \qquad \begin{aligned} &f_0 = 1 \quad , f_1 = f \\ &f_2 = F_1 = \frac{3}{2}f^2 + \frac{1}{3}f_{xx} \\ &f_3 = F_2 = \frac{3}{2}f^3 + ff_{xx} + \frac{1}{2}f_x^2 + \frac{1}{9}f_{xxxx} \\ &\cdots \end{aligned}$$

今，特に $f(0) = \varphi(x) = \frac{3}{2}\varphi^2(x) + \frac{1}{3}\varphi_{xx}(x)$，すなわち"solitary wave"

$$(2.3) \qquad \varphi(x) = \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,x\right)$$

を初期値とする (2.1) の解をみてみよう。

$\bar{H}_1$ は次を満す:

(2.4)
$$\bar{H}_{1,t} + \bar{H}_{1,x} + \frac{\delta^2}{2}\left(3f\bar{H}_{1,x} + \frac{1}{3}\bar{H}_{1,xxx}\right) + \frac{\delta^4}{2}\left(3f\bar{H}_{2,x} + \frac{1}{3}\bar{H}_{2,xxx}\right) + \frac{\delta^{2N}}{2}\left(3f\bar{H}_{N,x} + \frac{1}{3}\bar{H}_{N,xxx}\right) + \cdots = 0.$$

これと, $f(0) = \bar{H}_1(0)$ より, ただちに

(2.5) $$\bar{H}_1(t) = f(t) + O(\delta^4)$$

がわかる。この事実から, ただちに $\bar{H}_2$ が次をみたすことがわかる:

(2.6) $$\bar{H}_{2,t} + \bar{H}_{2,x} + \frac{\delta^2}{2}\left(3f\bar{H}_{2,x} + \frac{1}{3}\bar{H}_{2,xxx}\right) = O(\delta^4).$$

実際,

$$\bar{H}_{2,tx} = \left(f_x\bar{H}_1 + 2f\bar{H}_{1,x} + \frac{1}{3}\bar{H}_{1,xxx}\right)_t$$

(2.7)
$$= -\bar{H}_{2,xx} - \frac{\delta^2}{2}\Big\{\bar{H}_1\bar{H}_{1,xx} + f_x\left(3f\bar{H}_{1,x} + \frac{1}{3}\bar{H}_{1,xxx}\right) + 2\bar{H}_{1,x}^2 + 2f\left(3f\bar{H}_{1,x} + \frac{1}{3}\bar{H}_{1,xxx}\right)_x + \frac{1}{3}\left(3f\bar{H}_{1,x} + \frac{1}{3}\bar{H}_{1,xxx}\right)_{xxx}\Big\} + O(\delta^4)$$

の右辺第二項を (2.5) で近似すればよい。実際、

$$F_1 F_{1,xx} = (f + O(\delta^4)) F_{1,xx} = f F_{1,xx} + O(\delta^4)$$

$$F_{1,x}^2 = (f + O(\delta^4))_x F_{1,x} = f_x F_{1,x} + O(\delta^4)$$

$$3 f F_{1,x} + \frac{1}{3} F_{1,xxx} =$$

$$= 3 f (f_x + O(\delta^4)) + \frac{1}{3} (f + O(\delta^4))_{xxx} = F_{1,x} + O(\delta^4).$$

から

$$(2.8) \qquad F_{2,t} + F_{2,x} + \frac{\delta^2}{2} \left(3 f F_{1,x} + \frac{1}{3} F_{1,xxx} \right) = O(\delta^4)$$

を得るから、これと (2.6) から、ただちに

$$(2.9) \qquad F_2(t) = F_1(t) + O(\delta^4) = f(t) + O(\delta^4),$$

がわかる。実際、 $F_2(0) = F_1(0) = f(0)$ から、

$F_2 - F_1$, $F_2 - f$ がみたす方程式の非斉次項 $= O(\delta^4)$ が、 $F_2(t) - F_1(t) = O(\delta^4)$ をあたえる。故に (2.8) から (2.6) は明らか。

このようにして、(2.3) を初期値とする (2.1) の解は、

$$(2.10) \qquad f_t + f_x + \frac{\delta^2}{2} f_x + \frac{\delta^4}{2} f_x = O(\delta^6)$$

をみたす、すなわち、 $O(\delta^6)$ 誤差で、

$$\bar{f}_3(t, x) = \varphi \left(x - \left(1 + \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^4}{2}\right) x \right)$$

で近似されるのである。

このようにして、KdV hierarchy の各項 f, F_1, F_2, ・・・がみたす KdV 方程式；

$$(2.11)_n \qquad \begin{aligned} & f_t + f_x + \frac{\delta^2}{2}\left(3ff_x + \frac{1}{3}f_{xxx}\right) = O(\delta^4) \\ & F_{n,t} + F_{n,x} + \frac{\delta^2}{2}\left(3fF_{n,x} + \frac{1}{3}F_{n,xxx}\right) = O(\delta^4), \end{aligned}$$

$n=1,2,\cdots$，を解くことによって，(2.3) を初期値とする (2.1) の解は，$\psi\left(x - \sum_{j=0}^{N}\left(\frac{\delta^2}{2}\right)^N t\right)$ によってかぎりなく近似される。

実際，

$$\begin{aligned} F_{2,x} &= f_x F_1 + 2fF_{1,x} + \frac{1}{3}F_{1,xxx} \\ &= 3ff_x + \frac{1}{3}f_{xxx} + O(\delta^4) \end{aligned}$$

から (2.1) は

$$(2.12) \qquad f_t + f_x + \frac{\delta^2}{2}\left(3ff_x + \frac{1}{3}f_{xxx}\right) + \frac{\delta^4}{2}\left(3ff_x + \frac{1}{3}f_{xxx}\right) = O(\delta^6)$$

とかけるが，$F_2(t) = F_1 + O(\delta^4)$ とかきなおして (2.4) を入れれば

$$(2.13) \qquad F_{1,t} + F_{1,x} + \frac{\delta^2}{2}\left(3fF_{1,x} + \frac{1}{3}F_{1,xxx}\right) + \frac{\delta^4}{2}\left(3fF_{1,x} + \frac{1}{3}F_{1,xxx}\right) = O(\delta^6)$$

これより，$\bar{F}_1(t) = f(t) + O(\delta^6)$ がわかる，… 等。

勿論，一般の初期値 $f(0) = \zeta(x)$ に対しては，こう簡単ではない。そこで

$$\bar{f}_t + \bar{f}_x + \frac{\delta^2}{2}\left(3\bar{f}\bar{f}_x + \frac{1}{3}\bar{f}_{xxx}\right) = 0, \ \bar{f}(0) = f(0)$$

の解 $\bar{f}(t)$ を利用する。まず (2.11)，から $\bar{F}_1(t) - f(t) = u$ がみたす，次の方程式を得：

$$u_t + u_x + \frac{\delta^2}{2}\left(3fu_x + \frac{1}{3}u_{xxx}\right) = O(\delta^4)$$

ここで $f(t) = \bar{f}(t) + O(\delta^4)$ に注意すれば

$$u_t + u_x + \frac{\delta^2}{2}\left(3\bar{f}u_x + \frac{1}{3}u_{xxx}\right) = O(\delta^4).$$

これより

(2.14) $\quad u(t) = Z_1(t,x) + O(\delta^4)$, i.e. $\bar{F}_1(t) = f(t) + Z_1 + O(\delta^4)$

ただし Z_1 は $u(0) = \frac{3}{2}\zeta^2(x) + \frac{1}{3}\zeta_{xx}(x) - \zeta(x)$ と $\bar{f}(t)$ から定まる既知函数 ―――― を (2.5) のどおりに得る。

すなわち，$Z_1(t,x)$ 等を右辺にもつ非斉次 KdV 方程式の系列を解くことによって，上同様の議論がなされる。例えば，(2.7) に於て (2.14) の近似を

用いれば，Z_1 の貢献分を $\tilde{Z}_1$ とかく時，

(2.15) $$F_{2,t}+F_{2,x}+\frac{\delta^2}{2}\left(3fF_{1,x}+\frac{1}{3}F_{1,xxx}+\tilde{Z}_1\right)=O(\delta^4)$$，

従って，

$$F_2=F_1+Z_2+\frac{\delta^2}{2}\tilde{\tilde{Z}}_1+O(\delta^4)$$，

ただし Z_2 は $(F_2-F_1)(0)$，$\tilde{\tilde{Z}}_1$ は $\tilde{Z}_1$ の関与する分。
(2.15)は

$$F_{2,t}+F_{2,x}+\frac{\delta^2}{2}\left(3fF_{2,x}+\frac{1}{3}F_{2,xxx}+\tilde{Z}_2\right)=O(\delta^4)$$

とかいてもよい。

次節でみる様に，長い水面波方程式の実際の展開はただひとつの KdV hierarchy で記述する事は出来ない。各 δ^{2N} 次の係数である微分多項式に，KdV hierarchy からの過不足があり，そのために，その過不足に応じて複数の KdV flux とそれに属する KdV hierarchies の一次結合を用いた記述が必要である。従って $\{F_1, F_2, \cdots\}$ の他に，別の KdV flux G_1, H_1, … に属する KdV hierarchies $\{G_1, G_2, \cdots\}, \{H_1, H_2, \cdots\}$ … の連立系に対して上と同様の考察をすることになる。表示がその分複雑になるが，考察の方向は全く同様である。

§3. 方程式の展開の実際. 序節に云った f, g は、次の方程式をみたす：

$$
\begin{aligned}
& f_t + f_x + \frac{\delta^2}{2}\left(\frac{3}{2}f^2 + \frac{1}{3}f_{xx}\right)_x + \frac{\delta^4}{2}\left(ff_{xx} + \frac{1}{2}f_x^2 + \frac{2}{15}f_{xxxx}\right)_x + \\
& + \frac{\delta^6}{2}\left(f^2 f_{xx} + ff_x^2 + \frac{1}{3}\left(2ff_{xxxx} + 4f_x f_{xxx} + 3f_{xx}^2\right) + \frac{17}{315}f_{xxxxxx}\right)_x - \\
& - \frac{\delta^2}{2}\left(\frac{1}{2}g^2 + \frac{1}{3}g_{xx}\right)_x - \frac{\delta^4}{2}\left(gg_{xx} + \frac{3}{2}g_x^2 + \frac{2}{15}g_{xxxx}\right)_x - \\
& - \frac{\delta^6}{2}\left(g^2 g_{xx} + 3gg_x^2 + \frac{1}{3}\left(2gg_{xxxx} + 6g_x g_{xxx} + 3g_{xx}^2\right) + \frac{17}{315}g_{xxxxxx}\right)_x - \\
& - \frac{\delta^2}{2}(fg)_x + \frac{\delta^4}{2}\left(gf_{xx} + f_x g_x - fg_{xx}\right)_x + \\
& + \frac{\delta^6}{2}\Big((2fg + g^2)f_{xx} - (2fg + f^2)g_{xx} + 2(f+g)f_x g_x + \\
& \qquad + gf_x^2 - 3fg_x^2 + \frac{1}{3}\left(2gf_{xxxx} + 4g_x f_{xxx} - 2f_x g_{xxx} - 2fg_{xxxx}\right)\Big)_x = \\
& \qquad\qquad = O(\delta^8)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& g_t - g_x - \frac{\delta^2}{2}\left(\frac{3}{2}g^2 + \frac{1}{3}g_{xx}\right)_x - \frac{\delta^4}{2}\left(gg_{xx} + \frac{1}{2}g_x^2 + \frac{2}{15}g_{xxxx}\right)_x - \\
& - \frac{\delta^6}{2}\left(g^2 g_{xx} + gg_x^2 + \frac{1}{3}\left(2gg_{xxxx} + 4g_x g_{xxx} + 3g_{xx}^2\right) + \frac{17}{315}g_{xxxxxx}\right)_x + \\
& + \frac{\delta^2}{2}\left(\frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{3}f_{xx}\right)_x + \frac{\delta^4}{2}\left(ff_{xx} + \frac{3}{2}f_x^2 + \frac{2}{15}f_{xxxx}\right)_x + \\
& + \frac{\delta^6}{2}\left(f^2 f_{xx} + ff_x^2 + \frac{1}{3}\left(2ff_{xxxx} + 6f_x f_{xxx} + 3f_{xx}^2\right) + \frac{17}{315}f_{xxxxxx}\right)_x +
\end{aligned}
$$

$$+\frac{\delta^2}{2}(fg)_x+\frac{\delta^4}{2}(gf_{xx}-f_xg_x-fg_{xx})_x+$$

$$+\frac{\delta^6}{2}\Bigg((2fg+g^2)f_{xx}-(2fg+f^2)g_{xx}+3gf_x^2-fg_x^2-$$

$$-2(f+g)f_xg_x+$$

$$+\frac{1}{3}\left(2gf_{xxxx}+2g_xf_{xxx}-4f_xg_{xxx}-2fg_{xxxx}\right)\Bigg)_x=O(\delta^8).$$

次の様に10個の flux を定義する：

$F_1=\frac{3}{2}f^2+\frac{1}{3}f_{xx}$, $F_{11}=\frac{3}{2}f^2+\frac{7}{30}f_{xx}$, $F_{12}=\frac{3}{2}f^2+\frac{13}{30}f_{xx}$,

$G_1=\frac{3}{2}g^2+\frac{1}{3}g_{xx}$, $G_{11}=\frac{3}{2}g^2+\frac{7}{30}g_{xx}$, $G_{12}=\frac{3}{2}g^2+\frac{13}{30}g_{xx}$,

$P_{11}=gf+f_{xx}$: $P_{11,x}=(gf+f_{xx})_x=\left(g_x+g\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)f$,

$P_{12}=gf+\frac{1}{2}f_{xx}$; $Q_{11}=fg+\frac{1}{2}g_{xx}$, $Q_{11,x}=\left(f_x+f\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)g$,

$Q_{12}=fg+2g_{xx}$.

これらを用いると，前頁の f の展開は、次の様に書かれる：

$$f_t+f_x+\frac{\delta^2}{2}F_{1,x}+$$

$$+\frac{\delta^4}{2}\left\{\left(f_xF_{11}+2fF_{11,x}+\frac{7}{30}F_{11,xxx}\right)-\left(f_xF_{12}+2fF_{12,x}+\frac{13}{30}F_{12,xxx}\right)\right\}+$$

$$- \frac{\delta^2}{2}\left\{\left(\frac{23}{18}G_{12,x} - \frac{17}{18}G_{11,x}\right) + \left(2P_{12,x} - P_{11,x}\right)\right\} -$$

$$- \frac{\delta^4}{2}\left\{\frac{260}{9}\left(g_x G_1 + \frac{1}{13} g G_{1,x} + \frac{10}{130} G_{1,xxx}\right) - \right.$$

$$- \frac{143}{18}\left(g_x G_{11} + \frac{1}{13} g G_{11,x} + \frac{7}{130} G_{11,xxx}\right) -$$

$$- \frac{377}{18}\left(g_x G_{12} + \frac{1}{13} g G_{12,x} + \frac{13}{130} G_{12,xxx}\right) -$$

$$- \left[\left(g P_{11} + \frac{1}{4} P_{11,xx}\right)_x - \left(g P_{12} + \frac{1}{2} P_{12,xx}\right)_x\right] -$$

$$\left. - \left[\left(f Q_{11} + Q_{11,xx}\right)_x - \left(f Q_{12} + \frac{1}{4} Q_{12,xx}\right)_x\right]\right\} =$$

$$= O(\delta^6) .$$

前節の考え方で f, g に対する近似が逐次成功するためには，上に用いた（そして以降に用いる）flux の夫々が，少くとも $O(\delta^4)$ の誤差で精密に記述出来なければならない。

ところで我々は，[1] に於て長い水面波の近似方程式として KdV 方程式を得た時，初期値 $f(0) = O(1)$, $g(0) = O(\delta^2)$ を課した。

すなわち　$f(t) = O(1)$,　$g(t) = O(\delta^2)$ である。
これから、上の f, g に対する展開をみれば、(2.11)、
が f, F_{1} に対して成立することがわかる。
次に、f を $O(\delta^4)$ 迄精密に記述しようとすれば

$$\frac{\delta^4}{2}\left(ff_{xx}+\frac{1}{2}f_x^2+\frac{2}{15}f_{xxxx}\right)_x,\ -\frac{\delta^2}{2}\left(\frac{1}{2}g^2+\frac{1}{3}g_{xx}\right)_x,\ -\frac{\delta^2}{2}(fg)_x$$

を、f, g で $O(\delta^4)$ 誤差で近似することを要する。
ところが

(3.1)
$$ff_{xx}+\frac{1}{2}f_x^2+\frac{2}{15}f_{xxxx}=F_{21}-F_{22}$$
$$\frac{1}{2}g^2+\frac{1}{3}g_{xx}=\frac{23}{18}G_{12}-\frac{17}{18}G_{11}$$
$$fg=2P_{12}-P_{11}$$
$$F_{21,x}=f_xF_{11}+2fF_{11,x}+\frac{7}{30}F_{11,xxx}$$
$$F_{22,x}=f_xF_{12}+2fF_{12,x}+\frac{13}{30}F_{12,xxx}$$

である。我々は何よりもまず、$g(t)$ の $O(\delta^2)$ 迄の表示を要する。　まず、g の展開から

(3.2)　$$g_t-g_x-\frac{\delta^2}{2}G_{1,x}+\frac{\delta^2}{2}\left(\frac{1}{2}f^2+\frac{1}{3}f_{xx}\right)_x=O(\delta^4)$$

しかるに

(3.3)　$$\frac{1}{2}f^2+\frac{1}{3}f_{xx}=\frac{23}{18}F_{12}-\frac{17}{18}F_{11}$$

であり

$$
(3.4)\qquad
\begin{aligned}
&F_{11,t}+F_{11,x}+\frac{\delta^2}{2}\left(3fF_{1,x}+\frac{7}{30}F_{1,xxx}\right)=O(\delta^4)\\
&F_{12,t}+F_{12,x}+\frac{\delta^2}{2}\left(3fF_{1,x}+\frac{13}{30}F_{1,xxx}\right)=O(\delta^4)
\end{aligned}
$$

が成立。そこで (2.11)$_1$ とこれらとの差をとって, (2.14) を用いれば (勿論,本節の f, F_1, に対する!),

$$
(3.5)\qquad
\begin{aligned}
&F_{11}(t)=f(t)+\left(f(0)-\frac{3}{2}f^2(0)-\frac{7}{30}f_{xx}(0)\right)+\frac{\delta^2}{2}\tilde{\Phi}_{11}+O(\delta^4)\\
&F_{12}(t)=f(t)+\left(f(0)-\frac{3}{2}f^2(0)-\frac{13}{30}f_{xx}(0)\right)+\frac{\delta^2}{2}\tilde{\Phi}_{12}+O(\delta^4)
\end{aligned}
$$

を得。但、$\tilde{\Phi}_{11}$, $\tilde{\Phi}_{12}$ は $f(0)$, $\bar{F}(t)$ のみの函数。従って (3.2), (3.5) 及 $f(t)=\bar{F}(t)+O(\delta^4)$ から, $g(t)$ は $O(\delta^4)$ 誤差で, $g(0)$, $f(0)$, $\bar{F}(t)$ による表示を与えられる。従って

$$
G_{1,t}+G_{1,x}+\frac{\delta^2}{2}\left(3gG_{1,x}+\frac{1}{3}G_{1,xxx}\right)+\frac{\delta^2}{2}\Phi_1=O(\delta^4),
$$

Φ_1 : $f(0)$, $g(0)$, $\bar{F}(t)$ で定る既知函数,

がわかる。同様に

$$
G_{11,t}+G_{11,x}+\frac{\delta^2}{2}\left(3gG_{1,x}+\frac{7}{30}G_{1,xxx}\right)+\frac{\delta^2}{2}\Phi_{11}=O(\delta^4)
$$

$$
G_{12,t}+G_{12,x}+\frac{\delta^2}{2}\left(3gG_{1,x}+\frac{13}{30}G_{1,xxx}\right)+\frac{\delta^2}{2}\Phi_{12}=O(\delta^4)
$$

を得。Φ_{ij} は既知。

これより $G_{11}(t)$, $G_{12}(t)$ に対して (3.5) 相当の表現を得て, それを (3.1) に代入することにより, $\left(\frac{1}{2}g^2+\frac{1}{3}g_{xx}\right)$ の $O(\delta^2)$ 迄の精確な表示を得。

次に, (3.5) を (3.1) にもちこめば,

$$F_{21,x}=F_{11}+\Phi_{21}+\frac{\delta^2}{2}\Phi_{11}+O(\delta^4)$$

$$F_{22,x}=F_{12}+\Phi_{22}+\frac{\delta^2}{2}\Phi_{12}+O(\delta^4)$$

Φ_{1j}, Φ_{2j}, $j=1,2$: $f(0), g(0), \bar{f}$ の既知函数,

を得て, $\frac{\delta^2}{2}\left(ff_{xx}+\frac{1}{2}f_x^2+\frac{2}{15}f_{xxxx}\right)$ に対する $f(t)+\{f(0), g(0), \bar{f}(t)$ の既知函数$\}$ の表示を $O(\delta^4)$ 迄精密に得る。上の表示には F_1 を用いてもよい。

次に, 上の結果のうち, 特に

$$g(t)=\Xi_0+O(\delta^4)\ ;\ \Xi_0 \text{ は } g(0), f(0), \bar{f} \text{ のみの既知函数}$$

を用いると,

$$P_{12,t}+P_{12,x}+\frac{\delta^2}{2}\left(gF_1+\frac{1}{2}F_{1,xx}\right)_x=\tilde{\Xi}_1+O(\delta^4)$$

$\tilde{\Xi}_1$: $g(0), f(0), \bar{f}(t)$ のみの既知函数.

がわかる。P_{11} も同様の方程式をみたすことが

わかるから，これらを（3,1）の f_g の表現に用いて，f_g を $O(\delta^2)$ 迄精密に表示できる。これで，$f(t)$ を $O(\delta^4)$ 迄精密に記述した。

これにより，再び（3,5），（3,1）を用いれば，$g(t)$ が $O(\delta^6)$ まで表示され，従ってまた f の表示にもどれば $f(t)$ が $O(\delta^6)$ 迄精密に表示される，—— 等。

以上のプロセスに於る問題は，δ^{2N} の巾が高くなるに従って（3,1）の様な表示が複雑になる事の他に，"誤差"としてまとめていく項が個数を増して $O(\delta^{-2N})$ 程にも増えてしまえば，"近似"として意味をなさない，—— という点にある。その点の評価が必要であろう。

§4. <u>根拠</u>　以上の議論が余にも手工業的であって，果して，長い水面波の方程式がこの議論を保証する内在的論理をもつのか，—— という疑問がもたれるかもしれない。結論から言えば，以上の議論は，方程式そのものの構造に論拠をもつのである。以下，それをみよう。

元来,水面波の方程式は

$$\Gamma = 1+\delta^2\gamma, \quad \Phi = -t+\delta^2\varphi$$

について、次の型にかける [2]：

$$\Phi_t + \frac{1}{2}\Phi_x^2 + \Gamma = a(\Phi, \Gamma)$$

$$\Gamma_t + (\Gamma\Phi_x)_x = b(\Phi\Gamma).$$

ここに

$$a = \frac{1}{2}\frac{\left(\Phi_x A_\delta \ell - A_\delta(\ell\Phi_x)\right)^2}{\ell^2(1+\delta^2\Gamma_x^2)}$$

$$b = \frac{1}{\ell}(\ell A_\delta W - A_\delta \ell\cdot W) -$$

$$-\left(A_\delta(\ell C_\delta\tilde{u}) - A_\delta\ell\cdot C_\delta\tilde{u}\right),$$

$$W = A_\delta\ell\cdot\tilde{u} + \ell\cdot A_\delta\tilde{u}, \quad \tilde{u} = \frac{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A_\delta}{\delta}\Phi\right)}{\ell(1+\delta^2\Gamma_x^2)}$$

である。A_δ は $\Delta\Phi = 0$ に対する,所謂 Dirichlet-Neumann map であり, C_δ は

$$A_\delta^{-1} = B_\delta = -A_\delta + C_\delta$$

で定義される作用素である [2]. これ等によって ℓ は

次の方程式で定められる：

$$\mathrm{I} = \frac{A_\delta}{\delta} \mathrm{L} \cong \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m} \delta^{2m} \left(\mathrm{L} \frac{\partial}{\partial x} \right)^{2m+1} \mathrm{L}$$

$$C_{2m} = 2 \left(\frac{1}{\pi} \right)^{2m+2} \left(2^{2m+2} - 1 \right) \zeta(2m+2)$$

ζ : Riemann zeta function.

これより，γ に対応して $\mathrm{L} = 1 + \delta^2 p$ なる p が定まる：

$$\mathrm{I} = 1 + \delta^2 \gamma \longleftrightarrow \mathrm{L} = 1 + \delta^2 p .$$

我々の論点は結局

$$\mathrm{L}\tilde{u} = \frac{\delta^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A_\delta}{\delta} \varphi \right)}{1 + \delta^2 \gamma_x^{\;2}} \cong \delta^2 \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m} \delta^{2m} \frac{\frac{\partial}{\partial x} \left((1 + \delta^2 p) \frac{\partial}{\partial x} \right)^{2m+1}}{1 + \delta^2 \gamma_x^{\;2}} \varphi$$

の正体の解明にある。それはそれは，$\left((1 + \delta^2 p) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2$ がいかなる作用素であるかの解明に尽る。

今，方程式に関係する函数達，微分作用素，パラメータ達に，次の様に weights を定義しよう：

$$p,\ \varphi,\ \cdots\ :\ 2\ ;\quad \frac{\partial}{\partial x}\ :\ 1\ ;\quad \delta\ :\ -1$$

そうすると　$O(\delta^{2n})$　の項の degree = weights の総和, は全て等しい。この考察を通して

$$\left((1+\delta^2 p)\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} + \delta^2\left[p_x + 2p\frac{\partial}{\partial x}\right] + \delta^4\left[\frac{1}{2}(p^2)_x + p^2\frac{\partial}{\partial x}\right]\right)\frac{\partial}{\partial x}$$

の n 乗が生成する　$O(\delta^{2n})$　の係数である（γ, φ の, 従って f, g の）微分多項式は, KdV hierarchy の n 次の項と同じ機構で生れることを知る。問題は, 対応する微分多項式の係数（数値）が一致しない（一般には）ところにある。そのために, 前節に述べた様な複数個の KdV flux とそれに属する hierarchies を要することとなり, $\S$ 2 の様に単純ではないのである。しかし, それにも拘らず, 上に述べた事実によって, 前節の解析は, 長い水面波が内包する論理（構造）に根拠をもっている。

参考文献

[1] T. KANO, T. NISHIDA : A mathematical justification for Korteweg-de Vries equation and Boussinesq equation of water surface waves, OSAKA J. MATH., 23 (1986), 389-413.

[2] T. KANO, T. NISHIDA : Water waves and Friedrichs expansion, LECT. NOTE Num. Appl. ANAL., 6 (1983), 39-57.

[3] T. KANO, L'équation de Kadomtsev-Petviashvili approchant les ondes longues de surface de l'eau en écoulement trois-dimensionel, Studies in MATH. APPL., 18 (1986), 431-444, North-Holland.