数理解析研究所講究録
第745巻1991年220-231

混合気体における蒸発・凝縮およびその過程を伴う流れ場に対する弱非線形一般論
-気体論方程式に対する漸近解析と流体力学方程式系-

鳥取大学工学部　大西善元 (Yoshimoto Onishi)

1. はじめに

凝縮気体と非凝縮気体から成る混合気体系の蒸発・凝縮過程およびその過程を伴う流れ場における気体の振舞いは、非凝縮気体の存在によって大きな影響を受ける。特に、系の Knudsen 数 Kn が小さい場合には、この影響は大きい。この理由は、蒸発・凝縮過程の物理的機構が、非凝縮気体の濃度によって、大きく変化する、つまり、非凝縮気体の濃度が小さい値から徐々に大きくなるにつれ、それが系の Knudsen 数程度の値を境にして、気体論的効果による蒸発・凝縮過程から、凝縮気体の拡散能力に依存した拡散機構へと移行するからである[1-4]。その結果、後者においては、蒸発・凝縮量は、前者の場合に比べて、格段に小さくなってしまう。この物理的機構の大きな変化が問題の解析を困難にし、特に、ここで述べる弱非線形問題の場合には、非凝縮気体の全ての濃度をカバーできる解析は期待し難く（文献3,4参照)、現状では、濃度が $O(1)$ 以上の場合とそれより小さい場合に分けて解析を行なわなければならない結果となっている。線形問題の場合には、この種の困難はそれほど大きくはなく、非凝縮気体の濃度が $O(1)$ 程度の場合はもちろんのこと[5]、全ての濃度をカバーできる気体論的解析も文献6に与えられている。これらの解析は、凝縮相界面における拡散反射条件の下での BGK 型 Boltzmann 方程式[7]に基づいたもので、系の静止平衡からのずれ ϵ が小さく、かつ、$\epsilon \ll Kn^N$ (Nは任意の正整数) なる場合（流体力学的レベルでは系の Reynolds 数 Re が非常に小さい場合に対応）の系の振舞いを適切に記述する線形一般論となっている。そして、具体的な問題の扱いが、いちいち気体論方程式から出発せずとも直接流体力学的レベルにおいてできるように、次のような部分を、Knudsen 数展開による特異摂動法で、系統的に導き出している: すなわち、(1) 混合気体の巨視的運動を支配する方程式（この場合は Stokes 型方程式）; (2) この巨視的方程式に対する凝縮相界面上での適切な境界条件; (3) 凝縮相界面近傍において形成される Knudsen 層（気体論的境界層）内で必要となる巨視的方程式の解に対する Knudsen 層補正解; (4) 応力テンソルと熱流束およびエネルギーベクトルの公式。最近、この一般論を、同じく拡散反射条件の下での BGK 型 Boltzmann 方程式から、$\epsilon \sim Kn$ なる場合（流体力

学的レベルでは有限 Re の場合）に拡張した弱非線形解析が文献 8,9 で与えられ、混合気体の巨視的運動を支配する方程式（この場合 Navier-Stokes 型方程式)、それに適切な界面上での境界条件、Knudsen 層補正解および文献 9 では応力テンソルと熱流束・エネルギーベクトルの公式を与えている。文献 8 の一般論は、非凝縮気体の濃度が 0 の極限で、文献 9 のそれは濃度が $O(1)$ 又はそれ以上の場合に適用可能である。ここでは、物理的に最も興味のある場合、すなわち、濃度が $O(1)$ より小さい場合の一般論について考える。この場合は次のような理由で非常に厄介である。つまり、非凝縮気体の濃度が小さくなってくると、非凝縮気体の分子は蒸気分子との衝突によって凝縮面近くに追いやられ、そこでかなり大きな分圧および数密度勾配を形成する結果、たとえ全般的には弱非線形問題であっても部分的に現われるこの強い非線形性を考慮しなければならないからである。一応、文献 10 で、濃度が $O(1)$ より小さい場合をカバーできる一般的な弱非線形解析が与えられているが、ここではこの一般論を、多少手直しし、応力テンソルと熱流束・エネルギーベクトルの公式を追加して、完備した形で示す。

さて、混合気体（凝縮気体 A ＋非凝縮気体 B ）と凝縮相（任意形状、任意配置）から成る系を考える。系のある静止平衡状態からのずれ ϵ も、系の Knudsen 数 Kn もまた非凝縮気体の濃度も小さく、かつ、それらはすべて同程度の大きさであるとして、この場合の気体の漸近的振舞いを BGK 型 Boltzmann 方程式に基づいて一般的な形で調べる。この方程式に対する凝縮相界面上での境界条件として拡散反射条件をとる: つまり、両気体分子共、凝縮相との相互作用の結果、凝縮相の速度 U_{iW} と温度 T_W で特性づけられる平衡分布をもち、数密度は気体 A については T_W に対応する飽和蒸気数密度 N_W^A(圧力は飽和蒸気圧力 P_W^A)、気体 B については凝縮相界面を通して正味の流量が零と言う条件で決まる値をもつ。ここでの系の Knudsen 数が小さいと言う条件は、凝縮気体 A の量が十分入っており、その気体分子の平均自由行路が系の代表長 L に比べて小さいと言うことである。さらに、$\epsilon \sim Kn$ の条件は系の Reynolds 数 Re が $O(1)$ を意味する。この理由は、一般に、ずれ ϵ は系の Mach 数 Ma と同程度で、しかも $Re \sim Ma/Kn$ なる関係があるからである。このとき、問題は弱いながらも非線形問題となる。因に、線形理論では $Ma \sim Kn^N$(N: 任意の正整数）で、よって $Re \to 0$ となることは明らかである。

2. 基礎方程式と境界条件

今考えている問題の記述においては、ある一つの静止平衡状態を基準状態として、弱非線形振舞いをする諸量についてはこの状態からの摂動量を、そして非線形振舞いをする諸

量については無次元量を導入する。導入されたこれらの諸量に対して BGK 型 Boltzmann 方程式[7]を書くと

$$\tilde{k}\,\xi_i\frac{\partial\phi^A}{\partial x_i}=(1+n^A)(\phi_e^A-\phi^A)+\tilde{k}\,b\,a_{21}\hat{N}^B(\phi_e^{AB}-\phi^A), \tag{2.1}$$

$$\tilde{k}\,\xi_i\frac{\partial\Phi^B}{\partial x_i}=a_{21}(1+n^A)(\Phi_e^{BA}-\Phi^B)+\tilde{k}\,b\,\tilde{a}_{22}\hat{N}^B(\Phi_e^B-\Phi^B), \tag{2.2}$$

$$\begin{bmatrix} n^A \\ (1+n^A)u_i^A \\ \frac{3}{2}(1+n^A)\tau^A+(1+n^A){u_i^A}^2 \end{bmatrix}=\int\begin{bmatrix} 1 \\ \xi_i \\ \xi^2-\frac{3}{2} \end{bmatrix}\phi^A\,E\,d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \tag{2.3}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{N}^B \\ \hat{N}^B u_i^B \\ \frac{3}{2}\hat{N}^B\tau^B+M\hat{N}^B{u_i^B}^2 \end{bmatrix}=\int\begin{bmatrix} 1 \\ \xi_i \\ M\xi^2-\frac{3}{2} \end{bmatrix}\Phi^B\,\tilde{E}\,d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \tag{2.4}$$

$$p^A=n^A+\tau^A+n^A\tau^A, \tag{2.5}$$

$$\hat{P}^B=\hat{N}^B(1+\tau^B), \tag{2.6}$$

$$E(1+\phi_e^A)=\pi^{-3/2}\frac{(1+n^A)}{(1+\tau^A)^{3/2}}\exp\Big\{-\frac{(\xi_i-u_i^A)^2}{1+\tau^A}\Big\}, \tag{2.7}$$

$$\tilde{E}\Phi_e^B=(\frac{\pi}{M})^{-3/2}\frac{\hat{N}^B}{(1+\tau^B)^{3/2}}\exp\Big\{-\frac{M(\xi_i-u_i^B)^2}{1+\tau^B}\Big\}, \tag{2.8}$$

$$\phi_e^{AB}=\phi_e^A(n^A=n^A,\,u_i^A=u_i^{AB},\,\tau^A=\tau^{AB}), \tag{2.9}$$

$$\Phi_e^{BA}=\Phi_e^B(\hat{N}^B=\hat{N}^B,\,u_i^B=u_i^{BA},\,\tau^B=\tau^{BA}), \tag{2.10}$$

$$u_i^{AB}=u_i^{BA}=\mu_A u_i^A+\mu_B u_i^B, \tag{2.11}$$

$$\tau^{AB}=\tau^A+2\mu_A\mu_B(\tau^B-\tau^A)+\frac{2}{3}\mu_B^2(u_i^A-u_i^B)^2, \tag{2.12}$$

$$\tau^{BA}=\tau^B+2\mu_A\mu_B(\tau^A-\tau^B)+\frac{2}{3}\mu_A\mu_B(u_i^B-u_i^A)^2, \tag{2.13}$$

$$M=\frac{m_B}{m_A},\qquad \mu_A=\frac{m_A}{m_A+m_B},\quad \mu_B=\frac{m_B}{m_A+m_B},\quad a_{21}=\frac{\kappa_{AB}}{\kappa_{AA}},\quad \tilde{a}_{22}=\frac{\kappa_{BB}}{\kappa_{AA}},$$

$$E=\pi^{-3/2}\exp(-\xi^2),\qquad \tilde{E}=(\pi/M)^{-3/2}\exp(-M\xi^2),\qquad \xi^2=\xi_i\xi_i,$$

そして

$$\tilde{k}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}Kn,\qquad Kn=\frac{\tilde{l}^A}{L},\qquad \tilde{l}^A=\frac{(8R_AT_0/\pi)^{1/2}}{N_0^A\kappa_{AA}}, \tag{2.14}$$

ここで、$f^A=N_0^A(2R_AT_0)^{-3/2}E(1+\phi^A)$ と $f^B=N_0^B(2R_AT_0)^{-3/2}\tilde{E}\Phi^B$ は気体 A および気体 B 分子の分布関数、$\bar{\xi}_i=(2R_AT_0)^{1/2}\xi_i$ は分子の速度、$X_i=Lx_i$ は直交座標系で、$U_i^A=(2R_AT_0)^{1/2}u_i^A$, $T^A=T_0(1+\tau^A)$, $N^A=N_0^A(1+n^A)$, $P^A=P_0^A(1+p^A)$ はそれぞれ気体 A の平均速度、温度、数密度、分圧を表わし、$U_i^B=(2R_AT_0)^{1/2}u_i^B$,

$T^B = T_0(1+\tau^B)$, $N^B = N_0^B\hat{N}^B$, $P^B = P_0^B\hat{P}^B$は気体 B の対応する諸量を表わす。$F_e^A = N_0^A(2R_AT_0)^{-3/2}E(1+\phi_e^A)$ と $F_e^{AB} = N_0^A(2R_AT_0)^{-3/2}E(1+\phi_e^{AB})$ は気体 A の局所分布関数、$F_e^B = N_0^B(2R_AT_0)^{-3/2}\tilde{E}\Phi_e^B$ と $F_e^{BA} = N_0^B(2R_AT_0)^{-3/2}\tilde{E}\Phi_e^{BA}$ は気体 B の局所分布関数である。$\tilde{l}^A$は基準状態での気体 A の平均自由行路を表わす。κ_{AA}, κ_{BB}, κ_{AB} は分子間衝突に関係した量で、基準状態における成分気体 S (S=A,B) の粘性係数 η^S および混合気体の拡散係数 D_{AB} と

$$\eta^A = \frac{P_0^A}{N_0^A\kappa_{AA}}, \qquad \eta^B = \frac{P_0^B}{N_0^B\kappa_{BB}}, \qquad D_{AB} = \frac{(m_A+m_B)\mathrm{k}T_0}{m_Am_B(N_0^A+N_0^B)\kappa_{AB}},$$

なる関係で結び付いている[1–4,7]。m_A と m_B は気体 A 及び気体 B の分子の質量、R_A は気体 A の気体定数、k は Boltzmann 定数である。T_0は基準状態での温度、N_0^S および P_0^S は、同じく、基準状態での気体 S の数密度および圧力を表わす。b は $b\tilde{k} = N_0^B/N_0^A$で導入された $O(1)$ の量で、$b\to 0$ なる極限では文献 8 の結果に帰着し、凝縮気体の振舞いのみに関しては文献 11 に与えられた結果に帰着する。

摂動分布関数 ϕ^A と Φ^B に対する凝縮相界面での条件は、n_iをこの面での外向き単位法線ベクトルとすれば、$\xi_in_i > 0$ なる分子に対して、

$$\phi^A = \phi_W^A \equiv \phi_e^A(n^A = n_W^A,\, u_i^A = u_{iW},\, \tau^A = \tau_W), \tag{2.15}$$

$$\Phi^B = \Phi_W^B \equiv \Phi_e^B(\hat{N}^B = \hat{N}_W^B,\, u_i^B = u_{iW},\, \tau^B = \tau_W), \tag{2.16}$$

ここで、$F_W^A = N_0^A(2R_AT_0)^{-3/2}E(1+\phi_W^A)$, $F_W^B = N_0^B(2R_AT_0)^{-3/2}\tilde{E}\Phi_W^B$ は界面からのそれぞれ気体 A 及び気体 B の反射分子のもつ分布関数である。$U_{iW} = (2R_AT_0)^{1/2}u_{iW}$, $T_W = T_0(1+\tau_W)$ は凝縮相の速度 $(U_{iW}n_i = 0)$ 及び温度で、$N_W^A = N_0^A(1+n_W^A)$ はその温度に対応する気体 A の飽和蒸気数密度である。ここで重要なことは n_W^A (N_W^A) は τ_W (T_W) の一意的な関数であるということである。N_0^Aを温度 T_0に対応する飽和蒸気数密度と選べば、Clapeyron-Clausius の関係式[12]から次のような関係が得られる：

$$n_W^A = (\gamma-1)\,\tau_W + (\frac{1}{2}\gamma^2 - 2\gamma + 1)\,\tau_W^2 + \ldots, \tag{2.17a}$$

そして

$$p_W^A = \gamma\,\tau_W + \gamma(\frac{\gamma}{2} - 1)\,\tau_W^2 + \ldots, \tag{2.17b}$$

ここで、$P_W^A = P_0^A(1+p_W^A)$ は温度 T_Wに対応する飽和蒸気圧力、$\gamma = h_L/(R_AT_0)$ 、そして h_Lは気体 A の単位質量当りの潜熱である。いくつかの物質に対する γ の値については

文献 3 を参照されたい。$N_W^B = N_0^B \hat{N}_W^B$ は境界面を通しての正味の流量が零、すなわち、凝縮相界面で $U_i^B n_i = 0$ と言う条件から定まる数密度で

$$\hat{N}_W^B = -2(\pi M)^{1/2}(1+\tau_W)^{-1/2}\int_{\xi_i n_i<0} \xi_i n_i\, \Phi^B(\xi_i,\, x_i = x_{iW})\, \tilde{E}\, d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \tag{2.18}$$

で与えられ、解の一部として定まるものである。上式に現われる $x_{iW}\,(= X_{iW}/L)$ は凝縮相界面を表わす位置ベクトルである。

3. 解析方法の概略

一般に、Knudsen 数が小さい系においては、分布関数及びそれから導かれる流体力学的諸量（密度、速度、温度、圧力等）は、通常の流体力学的長さ L で変化する部分と分子の平均自由行路 $\tilde{l}^A$ 程度で変化する部分の 2 つに分けられる。前者は Hilbert 部分又は流体力学的部分と呼ばれ、比較的穏やかな変化をする。後者は Knudsen 層部分（今の場合、より正確には Knudsen 層補正部分）と呼ばれ、急激な変化を担う部分である。分布関数の Hilbert 部分の解析からは気体の巨視的運動を支配する方程式が導かれ、その Knudsen 層補正部分の解析からは巨視的方程式に対する境界条件と Knudsen 層内で Hilbert 部分に対する補正を担う補正解が出てくる[13-15]。さて、上記流体力学的諸量の摂動量および無次元量をそれぞれ g および $\hat{G}$ で代表させることにすれば、Knudsen 数が小さい ($\tilde{k} \ll 1$) 系に対して、g および $\hat{G}$ は次の形で気体論方程式系から求められる:

$$g = g_H(x_i) + g_K(\eta,\zeta_1,\zeta_2), \qquad \hat{G} = \hat{G}_H(x_i) + \hat{G}_K(\eta,\zeta_1,\zeta_2), \tag{3.1}$$

$$\tilde{k}\,\eta\, n_i = x_i - x_{iW}(\zeta_1,\zeta_2), \tag{3.2}$$

ここで、g_H および $\hat{G}_H$ は $O(1)$ 程度の長さで変化する Hilbert 部分、g_K および $\hat{G}_K$ は $O(\tilde{k})$ 程度の長さで変化する Knudsen 層補正部分で、凝縮相界面近くの Knudsen 層内でそれぞれ g_H および $\hat{G}_H$ に対する補正解を表し、Knudsen 層の外側にゆくにつれ速やかに消滅する (g_K, $\hat{G}_K \to 0$ as $\eta \to \infty$)。$x_{iW}(\zeta_1,\zeta_2)$ は既述の凝縮相界面を表わす座標で、η は n_i 方向に引き伸ばされた座標、ζ_1, ζ_2 は $\eta = \text{const.}$ 面上の座標パラメータである。諸量のそれぞれの部分は、a_{21}, $\tilde{a}_{22} \sim O(1)$ および $N_0^B/N_0^A \sim O(\tilde{k})$ を考慮して、次のような $\tilde{k}$ による展開形で順次定められる:

$$g_H = \tilde{k} g_{H1} + \tilde{k}^2 g_{H2} + \ldots, \qquad g_K = \tilde{k} g_{K1} + \tilde{k}^2 g_{K2} + \ldots, \tag{3.3}$$

$$\hat{G}_H = \hat{G}_{H0} + \tilde{k}\hat{G}_{H1} + \ldots, \qquad \hat{G}_K = \hat{G}_{K0} + \tilde{k}\hat{G}_{K1} + \ldots, \tag{3.4}$$

ここで、g_{Hm}, g_{Km} $(m=1,2,\ldots)$ および$\hat{G}_{Hm}$, $\hat{G}_{Km}$ $(m=0,1,\ldots)$ は $O(1)$ の量である。$\hat{G}_H$, $\hat{G}_K$ は強い非線形性を担うため $\tilde{k}^0$ 次から始まっている[8]。

解析の詳細は省いて、ここでは重要な結果だけを以下の節にまとめることにする。

4. 巨視的方程式系（Navier-Stokes 型流体力学方程式系）

流体力学的諸量の Hilbert 部分は次の方程式系で支配される:

第 1 近似に対しては

$$\frac{\partial p_{H1}}{\partial x_i}=0, \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial u^A_{iH1}}{\partial x_i}=0, \tag{4.2}$$

$$u^A_{jH1}\frac{\partial u^A_{iH1}}{\partial x_j}=-\frac{1}{2}\frac{\partial p_{H2}}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\Delta u^A_{iH1}, \tag{4.3}$$

$$u^A_{jH1}\frac{\partial \tau^A_{H1}}{\partial x_j}=\frac{1}{2}\Delta \tau^A_{H1}, \tag{4.4}$$

$$u^A_{jH1}\frac{\partial p^A_{H1}}{\partial x_j}=\frac{1}{2\mu_B a_{21}}\Delta p^A_{H1}, \tag{4.5}$$

$$n^A_{H1}=p^A_{H1}-\tau^A_{H1}, \tag{4.6}$$

そして

$$\left.\begin{aligned}
&\hat{N}^B_{H0}=\hat{P}^B_{H0}=1+\frac{1}{b}(p_{H1}-p^A_{H1}),\\
&\hat{N}^B_{H0}u^B_{iH1}=\hat{N}^B_{H0}u^A_{iH1}+\frac{1}{2\mu_B b\, a_{21}}\frac{\partial p^A_{H1}}{\partial x_i},\\
&u_{iH1}=u^A_{iH1},\\
&\tau_{H1}=\tau^B_{H1}=\tau^A_{H1}.
\end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

第 2 近似に対しては

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(u^A_{iH2}+n^A_{H1}u^A_{iH1})=0, \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}
u^A_{jH1}\frac{\partial u^A_{iH2}}{\partial x_j}&+(u^A_{jH2}+n^A_{H1}u^A_{jH1})\frac{\partial u^A_{iH1}}{\partial x_j}+Mb\hat{N}^B_{H0}u^B_{jH1}\frac{\partial u^B_{iH1}}{\partial x_j}=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(p_{H3}-bp_{H2})\\
&+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}(e^A_{ijH2}-\frac{1}{3}\delta_{ij}e^A_{llH2})+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}[(\tau^A_{H1}-ba_{21}\hat{N}^B_{H0}+\frac{b}{a_{21}}\hat{N}^B_{H0})e^A_{ijH1}]\\
&+\frac{b}{4a_{21}}[1-\mu_B(a_{21}-1)]\frac{\partial}{\partial x_j}[\hat{N}^B_{H0}(e^B_{ijH1}-\frac{1}{3}\delta_{ij}e^B_{llH1})-\hat{N}^B_{H0}e^A_{ijH1}]\\
&-\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\Delta\tau^A_{H1}+\frac{(1+Ma_{21})}{2M{a_{21}}^2}\frac{\partial}{\partial x_i}\Delta p^A_{H1},
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$u_{jH1}^{A}\frac{\partial\tau_{H2}^{A}}{\partial x_j}+(u_{jH2}^{A}+n_{H1}^{A}u_{jH1}^{A}+b\hat{N}_{H0}^{B}u_{jH1}^{B})\frac{\partial\tau_{H1}^{A}}{\partial x_j}-\frac{2}{5}u_{jH1}^{A}\frac{\partial p_{H2}}{\partial x_j}$$
$$=\frac{1}{2}\triangle\tau_{H2}^{A}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\left[\tau_{H1}^{A}-\left(ba_{21}-\frac{b}{Ma_{21}}\right)\hat{N}_{H0}^{B}\right]\frac{\partial\tau_{H1}^{A}}{\partial x_j}\right\}+\frac{1}{5}e_{ijH1}^{A}e_{ijH1}^{A}, \tag{4.10}$$

$$u_{jH1}^{A}\frac{\partial p_{H2}^{A}}{\partial x_j}+(u_{jH2}^{A}+n_{H1}^{A}u_{jH1}^{A}+b\hat{N}_{H0}^{B}u_{jH1}^{B})\frac{\partial p_{H1}^{A}}{\partial x_j}-u_{jH1}^{A}\frac{\partial p_{H2}}{\partial x_j}$$
$$=\frac{1}{2\mu_B a_{21}}\left\{\triangle p_{H2}^{A}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\tau_{H1}^{A}\frac{\partial p_{H1}^{A}}{\partial x_j}\right)-\triangle p_{H2}\right\}, \tag{4.11}$$

$$n_{H2}^{A}=p_{H2}^{A}-\tau_{H2}^{A}-n_{H1}^{A}\tau_{H1}^{A}, \tag{4.12}$$

そして

$$\left.\begin{aligned}
&\hat{P}_{H1}^{B}=p_{H1}+\frac{1}{b}(p_{H2}-p_{H2}^{A}), \qquad \hat{N}_{H1}^{B}=\hat{P}_{H1}^{B}-\hat{N}_{H0}^{B}\tau_{H1}^{B},\\
&\hat{N}_{H0}^{B}u_{iH2}^{B}=\hat{N}_{H0}^{B}u_{iH2}^{A}-\frac{1}{2\mu_B a_{21}}\frac{\partial\hat{P}_{H1}^{B}}{\partial x_i}-[\hat{P}_{H1}^{B}+\hat{N}_{H0}^{B}(n_{H1}^{A}-\tau_{H1}^{A})](u_{iH1}^{B}-u_{iH1}^{A}),\\
&\hat{N}_{H0}^{B}\tau_{H2}^{B}=\hat{N}_{H0}^{B}\tau_{H2}^{A}-\frac{1}{3\mu_A\mu_B b\,a_{21}}\left[u_{jH1}^{A}\frac{\partial p_{H1}^{A}}{\partial x_j}+\frac{1}{2b\,a_{21}\hat{N}_{H0}^{B}}\left(\frac{\partial p_{H1}^{A}}{\partial x_i}\right)^2\right],\\
&u_{iH2}=u_{iH2}^{A}+b\hat{N}_{H0}^{B}(u_{iH1}^{B}-u_{iH1}^{A})=u_{iH2}^{A}+\frac{1}{2\mu_B a_{21}}\frac{\partial p_{H1}^{A}}{\partial x_i},\\
&\tau_{H2}=\tau_{H2}^{A},
\end{aligned}\right\} \tag{4.13}$$

ここで、$U_i=(2R_AT_0)^{1/2}u_i$, $T=T_0(1+\tau)$, $P=P_0(1+p)$ はそれぞれ混合気体の平均質量流速、温度および圧力を表わし、$P_0=P_0^A+P_0^B$ ととってある。それぞれの摂動量の Hilbert 部分 u_{iH}, τ_H, p_H は (3.3) のように展開されている。また、e_{ijHm}^{S} $(m=1,2,\ldots)$ は $e_{ijHm}^{S}=(\partial u_{iHm}^{S}/\partial x_j+\partial u_{jHm}^{S}/\partial x_i)$ で定義される速度場 u_{iHm}^{S} の歪速度テンソル、$\triangle$ は Laplace 微分作用素 $(\partial^2/\partial x_j\partial x_j)$ 、δ_{ij} は Kronecker デルタである。

5. 巨視的方程式系に対する凝縮相界面での境界条件

上記の巨視的方程式系に対する凝縮相界面 $(x_i=x_{iW})$ での適切な境界条件は、t_i を凝縮相界面上の任意の一つの単位接線ベクトルとして、次のようになる:

第1近似に対しては

$$u_{iH1}^{A}t_i=u_{iW1}t_i, \tag{5.1a}$$

$$\hat{N}_{H0}^{B}u_{iH1}^{A}n_i=-\frac{1}{2\mu_B b\,a_{21}}n_i\frac{\partial p_{H1}^{A}}{\partial x_i}, \tag{5.1b}$$

$$\begin{bmatrix}p_{H1}^{A}-p_{W1}^{A}\\ \tau_{H1}^{A}-\tau_{W1}\end{bmatrix}=u_{iH1}^{A}n_i\begin{bmatrix}C_4^*\\ d_4^*\end{bmatrix}. \tag{5.2}$$

第2近似に対しては

$$(u_{iH2}^A - u_iW_2)t_i = -k_0 e_{ijH1}^A n_i t_j - K_1 t_j \frac{\partial \tau_{H1}^A}{\partial x_j} + K_2 t_j \frac{\partial}{\partial x_j}(u_{iH1}^A n_i) - \tilde{k}^A t_j \frac{\partial p_{H1}^A}{\partial x_j}, \quad (5.3a)$$

$$\hat{N}_{H0}^B (u_{iH2}^A + n_{H1}^A u_{iH1}^A) n_i = \frac{1}{2\mu_B a_{21}} n_i \frac{\partial \hat{P}_{H1}^B}{\partial x_i} - (\hat{P}_{H1}^B - \hat{N}_{H0}^B \tau_{H1}^A) u_{iH1}^A n_i$$
$$- \frac{1}{2\mu_B b\, a_{21}} \left[2\bar{\kappa} n_i \frac{\partial p_{H1}^A}{\partial x_i} + n_i n_j \frac{\partial^2 p_{H1}^A}{\partial x_i \partial x_j} - \Delta p_{H1}^A \right] \frac{1}{\alpha} \delta_p^B, \quad (5.3b)$$

$$\begin{bmatrix} p_{H2}^A - p_{W2}^A \\ \tau_{H2}^A - \tau_{W2} \end{bmatrix} = (u_{iH2}^A + n_{H1}^A u_{iH1}^A) n_i \begin{bmatrix} C_4^* \\ d_4^* \end{bmatrix} + n_i \frac{\partial \tau_{H1}^A}{\partial x_i} \begin{bmatrix} C_1 \\ d_1 \end{bmatrix} - 2\bar{\kappa} u_{iH1}^A n_i \begin{bmatrix} C_7^* \\ d_7^* \end{bmatrix}$$
$$+ (u_{iH1}^A n_i)^2 \begin{bmatrix} C_8^* \\ d_8^* \end{bmatrix} + \tau_{W1} u_{iH1}^A n_i \begin{bmatrix} \frac{1}{2} C_4^* \\ \frac{3}{2} d_4^* \end{bmatrix} + p_{W1}^A u_{iH1}^A n_i \begin{bmatrix} 0 \\ -d_4^* \end{bmatrix}$$
$$+ b\, a_{21} \hat{N}_{H0}^B u_{iH1}^A n_i \begin{bmatrix} C_{10} \\ d_{10} \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

ここで、$C_4^* = -2.132039$, $d_4^* = -0.446749$, $k_0 = -1.016191$, $K_1 = -0.383161$, $K_2 = -0.795186$, $C_1 = 0.558437$, $d_1 = 1.302716$, $C_7^* = C_7 + 2C_6 = 1.261137$, $d_7^* = d_7 + 2d_6 = 0.529115$, $C_8^* = C_8 - \beta_4^* C_4^* = -1.273029$, $d_8^* = d_8 - \beta_4^* d_4^* = -0.7557336$, および

$$\delta_p^B \equiv \alpha \int_0^\infty \tilde{Y}_p^B(\alpha\zeta_0)\, d\zeta_0, \qquad \alpha = a_{21}\sqrt{M},$$

で、$\beta_4^* = C_4^* - d_4^* = -1.685289$ である。u_{iW}, τ_W, p_W^Aは、例えば、

$$u_{iW} = \tilde{k}\, u_{iW1} + \tilde{k}^2\, u_{iW2} + \dots,$$

のように$\tilde{k}$で展開されている。定数k_0, K_1, K_2, d_4^*, C_4^*, d_1, C_1, d_6, C_6, d_7, C_7, d_8, C_8に関する詳細については例えば文献11および16を参照されたい。$\tilde{k}^A$, d_{10}, C_{10}は、m_B/m_Aおよびa_{21}には依存するが問題の幾何学には依らないという意味で、普遍定数である。これらの値についてはTable 1に、$\kappa_{AA} = \kappa_{AB}$, $m_B/m_A = 0.5, 1.0, 2.0$の場合の数値を示してある。また、δ_p^Bと$\tilde{Y}_p^B$はm_B/m_Aのみに依存する定数および関数で、文献8で既に解析されている。Table 2に、$m_B/m_A = 0.5, 1.0, 2.0$の場合におけるδ_p^Bと$\zeta = 0$での関数値$\tilde{Y}_p^B(0)$を示す。

6. Knudsen 層補正解

Knudsen 層内での Hilbert 部分に対する補正部分は、Hilbert 部分およびその導関数の凝縮相界面での値と後に述べる普遍関数とで表わされ、次の公式で与えられる:

無次元非線形諸量と摂動量の第1近似に対して

$$\hat{N}^B_{K0} = \hat{P}^B_{K0} \equiv 0, \tag{6.1}$$

$$u^A_{iK1} t_i = u^A_{iK1} n_i \equiv 0, \tag{6.2}$$

$$\hat{N}^B_{H0} u^B_{iK1} t_i = -\frac{1}{2\mu_B b\, a_{21}} t_j \frac{\partial p^A_{H1}}{\partial x_j} \tilde{Y}^B_p(\alpha\zeta), \tag{6.3a}$$

$$\hat{N}^B_{H0} u^B_{iK1} n_i \equiv 0, \tag{6.3b}$$

$$\begin{bmatrix} n^A_{K1} \\ \tau^A_{K1} \\ p^A_{K1} \end{bmatrix} = u^A_{iH1} n_i \begin{bmatrix} \Omega^*_4(\zeta) \\ \Theta^*_4(\zeta) \\ \Pi^*_4(\zeta) \end{bmatrix}. \tag{6.4}$$

第2近似に対しては

$$\begin{bmatrix} \hat{N}^B_{K1} \\ \hat{N}^B_{H0}\tau^B_{K1} \\ \hat{P}^B_{K1} \end{bmatrix} = \hat{N}^B_{H0} u^A_{iH1} n_i \begin{bmatrix} \tilde{\Omega}^B_4(\alpha\zeta) \\ \tilde{\Theta}^B_4(\alpha\zeta) \\ \tilde{\Pi}^B_4(\alpha\zeta) \end{bmatrix}, \tag{6.5}$$

$$u^A_{iK2} t_i = -e^A_{ij\,H1} n_i t_j\, Y_0(\zeta) - \frac{1}{2} t_j \frac{\partial \tau^A_{H1}}{\partial x_j} Y_1(\zeta) + t_j \frac{\partial}{\partial x_j}(u^A_{iH1} n_i)\left[\, 2\, Y_0(\zeta) + \frac{1}{2}\, d^*_4\, Y_1(\zeta)\,\right] - t_j \frac{\partial p^A_{H1}}{\partial x_j} \tilde{Y}^A(\zeta), \tag{6.6a}$$

$$u^A_{iK2} n_i = -(u^A_{iH1} n_i)^2\, \Omega^*_4(\zeta), \tag{6.6b}$$

$$\hat{N}^B_{H0} u^B_{iK2} n_i = -\frac{1}{2\mu_B b\, a_{21}} \left[\triangle p^A_{H1} - n_i n_j \frac{\partial^2 p^A_{H1}}{\partial x_i \partial x_j} - 2\bar{\kappa} n_i \frac{\partial p^A_{H1}}{\partial x_i} \right] \int_\zeta^\infty \tilde{Y}^B_p(\alpha\zeta_0) d\zeta_0, \tag{6.7}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n^A_{K2} \\ \tau^A_{K2} \\ p^A_{K2} \end{bmatrix} &= (u^A_{iH2} + n^A_{H1} u^A_{iH1}) n_i \begin{bmatrix} \Omega^*_4(\zeta) \\ \Theta^*_4(\zeta) \\ \Pi^*_4(\zeta) \end{bmatrix} + n_i \frac{\partial \tau^A_{H1}}{\partial x_i} \begin{bmatrix} \Omega_1(\zeta) \\ \Theta_1(\zeta) \\ \Pi_1(\zeta) \end{bmatrix} - 2\bar{\kappa} u^A_{iH1} n_i \begin{bmatrix} \Omega^*_7(\zeta) \\ \Theta^*_7(\zeta) \\ \Pi^*_7(\zeta) \end{bmatrix} \\ &\quad + (u^A_{iH1} n_i)^2 \begin{bmatrix} \Omega^*_8(\zeta) \\ \Theta^*_8(\zeta) \\ \Pi^*_8(\zeta) \end{bmatrix} + \tau_{W1} u^A_{iH1} n_i \begin{bmatrix} \Omega^*_9(\zeta) \\ \Theta^*_9(\zeta) \\ \Pi^*_9(\zeta) \end{bmatrix} + p^A_{W1} u^A_{iH1} n_i \begin{bmatrix} 0 \\ -\Theta^*_4(\zeta) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\quad + b\, a_{21} \hat{N}^B_{H0} u^A_{iH1} n_i \begin{bmatrix} \Omega_{10}(\zeta) \\ \Theta_{10}(\zeta) \\ \Pi_{10}(\zeta) \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{6.8}$$

ここで

$$\begin{aligned} \zeta &= \int_0^\eta [1 + n^A(x'_i)] d\eta' \\ &= \eta + \tilde{k}\left\{ \left[\, (C^*_4 - d^*_4) u^A_{iH1} n_i + p^A_{W1} - \tau_{W1} \,\right] \eta + u^A_{iH1} n_i \int_0^\eta \Omega^*_4(\zeta_0)\, \mathrm{d}\zeta_0 \right\}, \end{aligned} \tag{6.9}$$

$\Omega^*_7 = 2\Omega_6 + \Omega_7$, $\Theta^*_7 = 2\Theta_6 + \Theta_7$, $\Omega^*_8 = \Omega_8 - \beta^*_4 \Omega^*_4$, $\Theta^*_8 = \Theta_8 - \beta^*_4 \Theta^*_4$,

$\Omega^*_9 = \Omega_9 + \Omega^*_4$, $\Theta^*_9 = \Theta_9 + \Theta^*_4$, $\Pi^*_4 = \Omega^*_4 + \Theta^*_4$, $\tilde{\Pi}^B_4 = \tilde{\Omega}^B_4 + \tilde{\Theta}^B_4$, $\Pi_1 = \Omega_1 + \Theta_1$,

$$\Pi_7^* = \Omega_7^* + \Theta_7^*, \quad \Pi_8^* = \Pi_8 - \beta_4^*\Pi_4^*, \quad \Pi_9^* = \Pi_9 + \Pi_4^*, \Pi_{10} = \Omega_{10} + \Theta_{10},$$

$$\Pi_8 = \Omega_8 + \Theta_8 + \beta_4^*\Theta_4^* + (d_4^* + \Theta_4^*)\Omega_4^*, \qquad \Pi_9 = \Omega_9 + \Theta_9 + \Omega_4^* - \Theta_4^*.$$

関数$Y_0, Y_1, \Omega_4^*, \Theta_4^*, \Omega_1, \Theta_1, \Omega_6, \Theta_6, \Omega_7, \Theta_7, \Omega_8, \Theta_8, \Omega_9, \Theta_9$は$\zeta$の普遍関数で、これらの関数の詳細については例えば文献 11,16 を参照されたい。また$\tilde{\Omega}_4^B$, $\tilde{\Theta}_4^B$, $\tilde{Y}^A$, Ω_{10}, Θ_{10}も、m_B/m_Aおよびa_{21}には依存するが問題の幾何学には依らないという意味で、最初の2つの関数は$\alpha\zeta$の普遍関数、後の3つの関数はζの普遍関数となっており、そして$\zeta \to \infty$で速やかに0になる。$\tilde{\Omega}_4^B$と$\tilde{\Theta}_4^B$については$\tilde{Y}_p^B$と同様文献8を参照されたい。関数$\tilde{Y}^A$, Ω_{10}, Θ_{10}については$\zeta = 0$での関数値のみをTable 1に示してある。ここでのHilbert部分は全て凝縮相界面上$(x_i = x_{iW})$で評価された値であることを再度注意しておく。

7. 応力テンソルと熱流束およびエネルギーベクトル

流体力学においては、物体に作用する力とか熱伝達量は重要な量である。そのためには、応力テンソルとか熱流束ベクトル等に対する公式が必要となってくる。これらは分布関数から求められるが、分布関数はまた、ここでの場合、流体力学的諸量で表わされる。したがって、この段階で多少の計算をしておけば、応力テンソルや熱流束ベクトルを流体力学的諸量で書き表わし、公式の形にしておくことができる。さて、$\sigma_{ij}^A = -P_0^A(\delta_{ij} + P_{ij}^A)$および$q_i^A = P_0^A(2R_AT_0)^{1/2}Q_i^A$を気体Aの応力テンソルおよび熱流束ベクトル、また、$\sigma_{ij}^B = -P_0^B\hat{P}_{ij}^B$および$q_i^B = P_0^B(2R_AT_0)^{1/2}\hat{Q}_i^B$を気体Bの対応する量とすれば、これらのHilbert部分に対する公式は次のようになる:

$$\begin{aligned}P_{ijH}^A = \tilde{k}\,p_{H1}^A\delta_{ij} + \tilde{k}^2\left(p_{H2}^A\delta_{ij} - e_{ijH1}^A\right) + \tilde{k}^3\Big\{&p_{H3}^A\delta_{ij} - (e_{ijH2}^A - \frac{1}{3}\delta_{ij}e_{llH2}^A)\\ &-[\tau_{H1}^A + b(\frac{1}{2}\mu_B - a_{21})\hat{N}_{H0}^B]\,e_{ijH1}^A + \frac{1}{2}b\,\mu_B\hat{N}_{H0}^B(e_{ijH1}^B - \frac{1}{3}\delta_{ij}e_{llH1}^B)\\ &+\Big(\frac{\partial^2\tau_{H1}^A}{\partial x_i\partial x_j} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\triangle\tau_{H1}^A\Big) - \frac{1}{2a_{21}}\Big(\frac{\partial^2 p_{H1}^A}{\partial x_i\partial x_j} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\triangle p_{H1}^A\Big)\Big\},\end{aligned} \tag{7.1}$$

$$\begin{aligned}\hat{P}_{ijH}^B = \hat{P}_{H0}^B\delta_{ij} + \tilde{k}\,\hat{P}_{H1}^B\delta_{ij} + \tilde{k}^2\Big[&\hat{P}_{H2}^B\delta_{ij} - (1 - \frac{1}{2}\mu_A)\frac{1}{a_{21}}\hat{N}_{H0}^B(e_{ijH1}^B - \frac{1}{3}\delta_{ij}e_{llH1}^B)\\ &- \frac{1}{2}\mu_A\frac{1}{a_{21}}\hat{N}_{H0}^B e_{ijH1}^A - \frac{1}{2bM{a_{21}}^2}\Big(\frac{\partial^2 p_{H1}^A}{\partial x_i\partial x_j} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\triangle p_{H1}^A\Big)\Big],\end{aligned} \tag{7.2}$$

$$Q_{iH}^A = -\frac{5}{4}\tilde{k}^2\Big\{\frac{\partial\tau_{H1}^A}{\partial x_i} + \tilde{k}\Big[\frac{\partial\tau_{H2}^A}{\partial x_i} + (\tau_{H1}^A - ba_{21}\hat{N}_{H0}^B)\frac{\partial\tau_{H1}^A}{\partial x_i} - \frac{2}{5}\triangle u_{iH1}^A\Big]\Big\}, \tag{7.3}$$

$$\hat{Q}_{iH}^B = -\frac{5}{4}\tilde{k}^2\frac{1}{Ma_{21}}\hat{N}_{H0}^B\frac{\partial\tau_{H1}^B}{\partial x_i}. \tag{7.4}$$

また、気体 A のエネルギー流束を $h_i^A = P_0^A(2R_AT_0)^{1/2}H_i^A$、気体 B の対応する量を $h_i^B = P_0^B(2R_AT_0)^{1/2}\hat{H}_i^B$ とすれば、それらの Hilbert 部分は次式で与えられる:

$$H_{iH}^A = Q_{iH}^A + \frac{5}{2}u_{iH}^A + u_{jH}^A P_{ijH}^A + \frac{3}{2}u_{iH}^A p_H^A + (1+n_H^A)u_{iH}^A(u_{jH}^A)^2, \tag{7.5}$$

$$\hat{H}_{iH}^B = \hat{Q}_{iH}^B + u_{jH}^B \hat{P}_{ijH}^B + \frac{3}{2}u_{iH}^B \hat{P}_H^B + M\hat{N}_H^B u_{iH}^B (u_{jH}^B)^2. \tag{7.6}$$

残念ながら、ここでは、応力テンソルや熱流束ベクトルの Knudsen 層補正部分を挙げていないが、物体に作用する力や熱伝達量の計算には、その目的を十分果たすことを述べておく。

8. まとめ

以上のことから分かるように、具体的な問題を扱うに当たって、常に気体論方程式から出発する必要はなく、第 5 節における境界条件の下で第 4 節の方程式を解き、流体力学的諸量 g_H および $\hat{G}_H$ を求めればよい。その後、それらの解を使って第 6 節で与えられた一般的な Knudsen 層補正公式から補正解 g_K および $\hat{G}_K$ を求めれば、気体論方程式の Knudsen 数が小さい場合の漸近解として流体力学的諸量 $g = g_H + g_K$ および $\hat{G} = \hat{G}_H + \hat{G}_K$ が求まることになる。また、凝縮相界面における単位面積当りの蒸発・凝縮量 $\dot{m}$ も容易に次の式から求められる:

$$\begin{aligned}\dot{m} &= m_A N_0^A (2R_AT_0)^{1/2}\,(1+n^A)\,u_i^A n_i \\ &= m_A N_0^A (2R_AT_0)^{1/2}\left[\tilde{k}\,u_{iH1}^A n_i + \tilde{k}^2\,(\,u_{iH2}^A + n_{H1}^A u_{iH1}^A\,)n_i + O(\tilde{k}^3)\right].\end{aligned}$$

参考文献

1) Y. Onishi: in *Rarefied Gas Dynamics* **2** (1984) pp.875-884.

2) Y. Onishi: J. Fluid Mech. **163** (1986) 171.

3) Y. Onishi: in *Rarefied Gas Dynamics* **117** (1989) pp.470-491.

4) Y. Onishi: in *Rarefied Gas Dynamics* **117** (1989) pp.492-513.

5) 大西・曽根：日本航空宇宙学会第 15 期年会講演集 (1984) 128.

6) 大西：第 20 回流体力学講演会講演集 (1988) 174.

7) B.B. Hamel: Phys. Fluids **8** (1965) 418.

8) Y. Onishi: J. Phys. Soc. Japan **55** (1986) 3080.

9) 大西：第 21 回流体力学講演会講演集 (1989) 166.

10) 大西：第 18 回流体力学講演会講演集 (1986) 106.

11) Y. Onishi & Y. Sone: J. Phys. Soc. Japan **47** (1979) 1676.
12) L.D. Landau & E.M. Lifshitz: *Statistical Physics*, Pergamon, (1969) §82.
13) H. Grad: in *Transport Theory*, American Math. Soc., (1969) pp.269-308.
14) Y. Sone: in *Rarefied Gas Dymanics* **1** (1969) pp.243-253.
15) Y. Sone: in *Rarefied Gas Dymanics* **2** (1971) pp.737-749.
16) Y. Sone & Y. Onishi: J. Phys. Soc. Japan **44** (1978) 1981.

Table 1 $(\kappa_{AA} = \kappa_{AB})$

m_B/m_A	$\tilde{k}^A$	d_{10}	C_{10}	$\tilde{Y}^A(0)$	$\Omega_{10}(0)$	$\Theta_{10}(0)$
0.5	1.30586	1.67983	0.28461	-0.8472	1.1517	-0.9982
1.0	1.00000	1.33448	0.24993	-0.5858	0.8694	-0.7105
2.0	0.86601	1.14527	0.22196	-0.4624	0.7304	-0.5703

Table 2

m_B/m_A	δ_p^B	$\tilde{Y}_p^B(0)$
0.5	0.38985	0.55051
1.0	0.48711	0.58579
2.0	0.66035	0.63397