

一次元移流拡散高次精度五点差分スキームの安定性解析

電気通信大学大学院 ((株) アーク情報システム) 名古屋 靖一郎 (Seiichiro Nagoya)

電気通信大学情報工学科

牛島 照夫 (Teruo Ushijima)

1. はじめに

空間一次元の定数係数線形移流拡散方程式の初期値問題に対して差分法を適用し、近似的に解くことを考える。移流項及び拡散項の差分化は、五点公式で二次以上の精度をもつものとする。移流項の差分公式の一般形を β と λ という二つのパラメタを用いて表し、これを (β, λ) スキームと呼ぶ。このスキームは $\beta = \frac{1}{6}$ のとき三次精度であり、さらに $\lambda = 1$ とすると河村スキームとなるものである。拡散項の差分公式の一般形は ξ というパラメタを用いて表し、 $\xi = 0$ のとき二次中心差分、 $\xi = \frac{1}{12}$ のとき四次中心差分となる。時間項は前進差分を用いる。このように離散化した移流拡散スキームに対して、その安定性を意味するフォン・ノイマン条件の必要十分条件を空間刻みと時間刻みに対する条件として与え、さらに ϵ -安定という概念を導入し、三次精度移流差分公式について考察する。この ϵ -安定という概念は、しかるべき範囲の長波長成分を除けば、その他の計算可能なフーリエ成分は安定に計算できることを意味している。

この ϵ -安定条件を基準にしてバーガース方程式のシミュレーション計算を実施したところ、河村スキームと標準的な三次精度風上スキームの間に顕著な差がある事を確認したのでそれを報告する。

2. 導 入

(1) 連続問題 (E)

初期値 $\phi_0(x)$ 、非負定数 u, K と正定数 L は適当に与えられているものとする。

$$(E) \left\{ \begin{array}{l} \text{次の移流拡散方程式を満たす } \phi = \phi(t, x) \text{ を求めよ:} \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} = K \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, t > 0, \\ \phi(t, 0) = \phi(t, L), \phi_x(t, 0) = \phi_x(t, L), \quad t > 0, \\ \phi(0, x) = \phi_0(x), \quad 0 \leq x \leq L. \end{array} \right.$$

(2) 差分公式

一階微分商 $\phi'(x)$ の近似差分式 $(D_h^{(\beta, \lambda)}\phi)(x)$ を次の(2.1)式によって定義する.

$$(2.1) \quad (D_h^{(\beta, \lambda)}\phi)(x) = \frac{(T_{\frac{h}{2}}^+\phi)(x) - (T_{\frac{h}{2}}^+\phi)(x-h)}{h}.$$

これを (β, λ) スキームと呼ぶ. ここで, 作用素 $T_{\frac{h}{2}}^+$ は次式で与えられる:

$$(T_{\frac{h}{2}}^+\phi)(x) = \frac{\phi(x+h) + \phi(x)}{2} - \beta[(1+\lambda)(\phi(x+h) - 2\phi(x) + \phi(x-h)) - \lambda(\phi(x+2h) - 2\phi(x+h) + \phi(x))].$$

テーラー展開できる関数 $\phi = \phi(x)$ に対して,

$$(2.2) \quad (D_h^{(\beta, \lambda)}\phi)(x) - \phi'(x) = \left(\frac{1}{3!} - \beta\right)\phi^{(3)}(x)h^2 + \beta\left(\frac{1}{2} + \lambda\right)\phi^{(4)}(x)h^3 + \left(\frac{1}{5!} - \frac{\beta}{4}\right)\phi^{(5)}(x)h^4 + O(h^5)$$

となる. $(\beta, \lambda) = (\frac{1}{6}, 0), (\frac{1}{6}, 1)$ はそれぞれ三次風上差分, 河村スキームと呼ばれている. この差分公式は, 二次以上四次以下の精度をもつ一階微分商を近似する五点差分公式のある一般形であり, 三次以上の精度をもつ公式はすべて表している.

同様に, 二階微分商 $\phi''(x)$ の近似差分式 $(D_{h\bar{h}}^\xi\phi)(x)$ を次の(2.3)式によって定義する. $\xi = 0$ で二次中心差分, $\xi = \frac{1}{12}$ で四次中心差分となる.

$$(2.3) \quad (D_{h\bar{h}}^\xi\phi)(x) = \frac{1}{h^2}[\phi(x+h) - 2\phi(x) + \phi(x-h) - \xi\{\phi(x+2h) - 4\phi(x+h) + 6\phi(x) - 4\phi(x-h) + \phi(x-2h)\}].$$

$$(2.4) \quad (D_{h\bar{h}}^\xi\phi)(x) - \phi''(x) = \left(\frac{2}{4!} - \xi\right)\phi^{(4)}(x)h^2 + \left(\frac{2}{6!} - \frac{\xi}{6}\right)\phi^{(6)}(x)h^4 + O(h^6).$$

この差分公式は, 二次以上四次以下の精度をもつ二階微分商を近似する五点差分公式の一般形であり, すべての二次以上の精度をもつ公式を表している.

(3) 離散問題 $(E_h^\tau)_\xi^{(\beta, \lambda)}$

空間方向に, 刻み幅 h , 分割数 $2N$ の等間隔メッシュで分割し $(h = \frac{L}{2N})$, 時間方向には, 刻み幅 τ の等間隔メッシュで計算する. そして, 初期値問題 (E) に対して, 時間項は前進差分, 移流項は(2.1), 拡散項は(2.3)により離散化する. この問題を $(E_h^\tau)_\xi^{(\beta, \lambda)}$ と呼ぶ.

$$(E_h^\tau)_\xi^{(\beta, \lambda)} \left\{ \begin{array}{l} \text{初期データ } \phi_k^0, k = 1, \dots, 2N \text{ を適当に与えて, 次式を満たす } \phi_k^n \text{ を求めよ.} \\ D_\tau \phi_k^n + u D_h^{(\beta, \lambda)} \phi_k^n = K D_{h\bar{h}}^\xi \phi_k^n, \quad k = 1, 2, \dots, 2N, \\ \phi_0^n = \phi_{2N}^n, \quad \phi_{-1}^n = \phi_{2N-1}^n, \quad \phi_{2N+1}^n = \phi_1^n, \quad \phi_{2N+2}^n = \phi_2^n. \end{array} \right.$$

ここで, $D_\tau \phi_k^n = \frac{\phi_k^{n+1} - \phi_k^n}{\tau}$ である. また, 差分公式は $\phi_k^n = \phi(n\tau, kh)$ として適用する.

(4) ε -安定条件

実数 θ を $\frac{\pi m}{N}$, $m = 0, \dots, N$ として初期データ

$$\phi_k^0 = \exp(k\theta i)$$

を与える ($i^2 = -1$) と, 移流拡散スキーム $(E_h^\tau)_\xi^{(\beta, \lambda)}$ の解は

$$\phi_k^n = G^n \exp(k\theta i)$$

と書ける. ここで増幅係数 G は $\theta, \beta, \lambda, \xi$ に依存する複素定数である. 定数 ε を区間 $[0, 2]$ の中にとる. 増幅率 $|G|$ が $\varepsilon \leq 1 - \cos \theta$ を満たす全ての实数 θ に対して, $|G| \leq 1$ となるための必要十分条件を求める. その条件をここでは ε -安定条件と呼ぶことにする. また, 特に $\varepsilon = 0$ のときをフォン・ノイマン条件と呼ぶ.

3. 結果

定理 1 (安定性) $\beta, \lambda, \xi \geq 0$ のとき, 問題 $(E_h^\tau)_\xi^{(\beta, \lambda)}$ のフォン・ノイマン条件は

$$(3.1) \quad c^2 \leq 2d \leq \frac{1 - 4\beta\mu c}{\eta}$$

である. ここで, $\mu = 2\lambda + 1$, $\eta = 4\xi + 1$, $c = \frac{u\tau}{h} \geq 0$, $d = \frac{K\tau}{h^2} \geq 0$ である. 即ち, $4\beta\mu u + \frac{2\eta K}{h} > 0$, $u > 0$ のとき,

$$(3.2) \quad \tau \leq \min \left(\frac{h}{4\beta\mu u + \frac{2\eta K}{h}}, \frac{2K}{u^2} \right)$$

である.

逆に, $\beta, \xi \geq 0$ のとき, 問題 $(E_h^\tau)_\xi^{(\beta, \lambda)}$ のフォン・ノイマン条件が式 (3.1) で与えられる λ の範囲は,

$$(3.3) \quad \begin{cases} \beta = 0 \text{ のとき, } \lambda \text{ は任意の実数,} \\ \beta > 0 \text{ のとき, } \lambda \geq \max \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left(\frac{\beta(1+2\beta) - \xi}{\beta\sqrt{1+4\beta+8\beta^2}} - 1 \right) \right), \end{cases}$$

である。□

定理2 (ε -安定性) $\beta, \lambda, \xi \geq 0$ のとき, 与えられた定数 $\varepsilon \in [0, 2]$ について, 問題 $(E_h^\tau)_{\xi}^{(\beta, \lambda)}$ の ε -安定条件は, c, d, μ, η は定理1と同様のパラメタとして,

$$(3.4) \quad \begin{cases} -4\{d + (2\xi d + c\beta\mu)\varepsilon\} + 4\varepsilon\{d + (2\xi d + c\beta\mu)\varepsilon\}^2 + c^2(2 - \varepsilon)(1 + 2\beta\varepsilon)^2 \leq 0, \\ 2d \leq \frac{1 - 4\beta\mu c}{\eta}. \end{cases}$$

即ち, $4\beta\mu u + \frac{2\eta K}{h} > 0, u > 0$ のとき,

$$(3.5) \quad \tau \leq \min \left(\frac{h}{4\beta\mu u + \frac{2\eta K}{h}}, \frac{4\{(1 + 2\varepsilon\xi)K + \beta\mu u \varepsilon h\}}{4\varepsilon \left\{ (1 + 2\varepsilon\xi) \frac{K}{h} + \beta\mu u \varepsilon \right\}^2 + u^2(2 - \varepsilon)(1 + 2\beta\varepsilon)^2} \right)$$

である。□

$\xi = 0$ としたときの定理1の証明を [1] に示した。 $\xi > 0$ のときも同様の方法により証明できる。また, 定理2の証明は [2] に示した。

4. 非線形シミュレーション

$u = u(t, x)$ についての方程式であるバーガース方程式

$$(4.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, t > 0,$$

に対して, u_0 は定数として, $u = u_0 + u_1$ とおく。また, $L = K = 1$ とおくと, レイノルズ数 $R = \frac{Lu_0}{K}$ は $R = u_0$ となり, 方程式は次の様に正規化される。

$$(4.2) \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} + (R + u_1) \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, t > 0.$$

この方程式に対して, 初期値 $u_1(0, x) = A \sin(2\pi m x)$ とした場合を考える。ただし, $A = \alpha R$ ($0 < \alpha < 1$), m は適当なモード数とする。そして, 以下の三次精度の風上スキームの安定性比較シミュレーションを行った。空間方向節点数 $2N$ ($h = \frac{1}{2N}$) とし,

$$(4.3) \quad D_\tau(u_1)_k^n = -(R + u_1) D_h^{(\beta, \lambda)}(u_1)_k^n + D_{h\bar{h}}^\xi(u_1)_k^n, \quad k = 1, \dots, 2N, n > 0,$$

と離散化したスキームを陽的に解く。但し、移流項の離散化は三次風上差分と河村スキームの二種類とし、値 $R + u_1$ の正負に依存する風上法を用いる。また、拡散項は二次中心差分とする。境界条件は次の周期条件とする。

$$(4.4) \quad (u_1)_0^n = (u_1)_{2N}^n, \quad (u_1)_{-1}^n = (u_1)_{2N-1}^n, \quad (u_1)_{2N+1}^n = (u_1)_1^n, \quad (u_1)_{2N+2}^n = (u_1)_2^n.$$

このようにして得られた二種類の離散問題をそれぞれ三次風上スキーム、河村スキームと呼ぶ事にする。この二種類のスキームに対して、

$$(4.5) \quad \sum_{k=1}^{2N} |(u_1)_k^n|^2 \begin{cases} > \sum_{k=1}^{2N} |(u_1)_k^0|^2 \dots \text{”発散”}, \\ \leq \sum_{k=1}^{2N} |(u_1)_k^0|^2 \dots \text{”未発散”}, \end{cases}$$

という判定条件により、安定性を調べた。

ε と h を固定した時、(3.5) の右辺で与えられる τ を安定限界と呼ぶ事にする。 $K = 1$ とし、 $u = 100, 1000, 10000$ と変えた三つの場合について、 ε を 0.0 から 1.8 まで 0.2 おきの安定限界を図 1, 2, 3 にそれぞれ示した。縦軸が τ で、横軸が h である。左図は三次風上スキーム、右図は河村スキームの場合である。

図 3 によれば、 $u = 10000, K = 1$ の時、 $\varepsilon = 0.2$ に対応するモードは、空間刻み幅 $h = \frac{1}{160}$ に対して時間刻み幅 $\tau = 1.0E-7$ ととると三次風上スキームでは不安定であるが、河村スキームでは安定である。そこで、これを基準にしてレイノルズ数 $R = 10000$ とし、 $\varepsilon = 0.2$ に対応するモード数 m についての初期値をとり、上述の非線形シミュレーション 2 ケースを、三次風上スキームと河村スキームに対して行った。 $\alpha = 0.1$ とした時の解の挙動をそれぞれ図 4 と図 5 に示す。

図の上段は解 $(u_1)_k^n$ を時間ステップ n 毎にプロットしたもので、発散しない限り描いた。下段はその時間ステップ毎の解の各離散フーリエ成分の大きさを線分により表したものであり、左から長い波長の成分順に並べた。また、図 5 の上段の数字 1000 は最大反復回数を表す。結果としては、三次風上スキームは図 4 の通り、1 回の反復で発散したが、河村スキームでは図 5 に示す様に 1000 回の反復でも発散していない。また、注意すべき事として、図 5 のフーリエ成分について、初期モードの半分の波長をもつモードが反復が進むにつれ生成されている様子が伺える。これは二次の移流項をもつ方程式の非線形性によるためであり、長い波長の成分からその半分の短い波長の成分が生成されたと考えられる。

最後に、 ε, N が与えられた時、 ε -安定なモード m は

$$N \geq m \geq \frac{\cos^{-1}(1 - \varepsilon)}{\pi} \cdot N$$

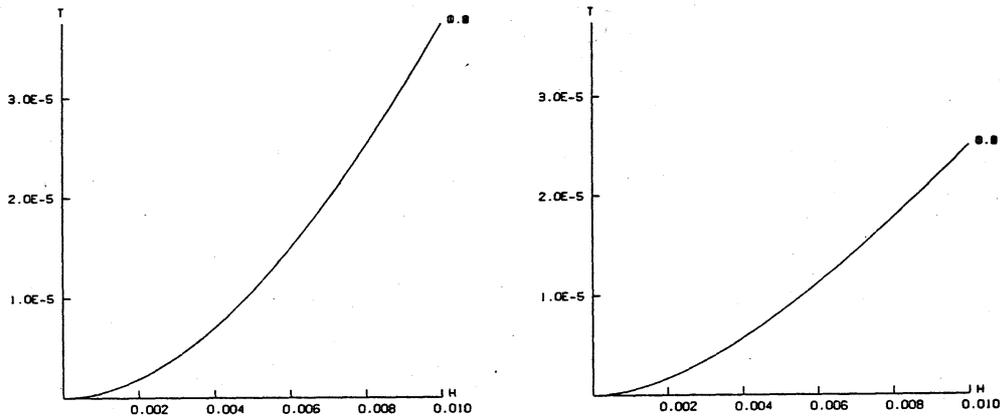


図1 安定限界, $u = 100$ (左図: 三次風上スキーム, 右図: 河村スキーム)

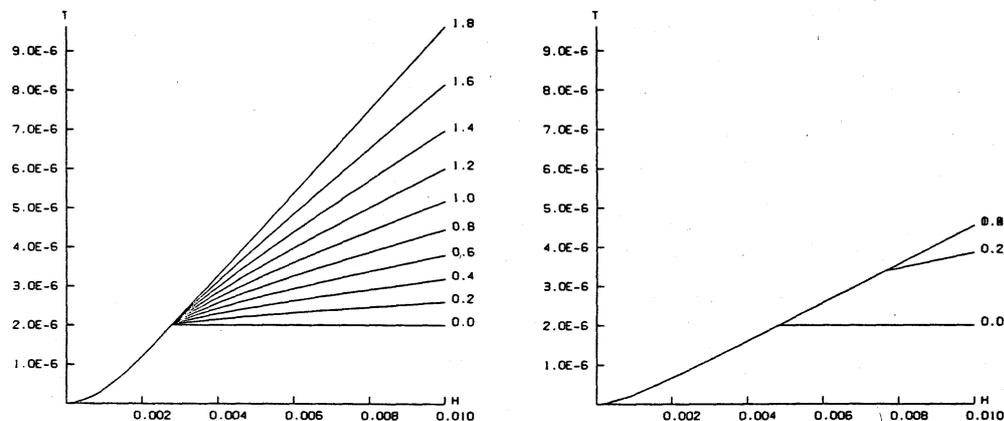


図2 安定限界, $u = 1000$ (左図: 三次風上スキーム, 右図: 河村スキーム)

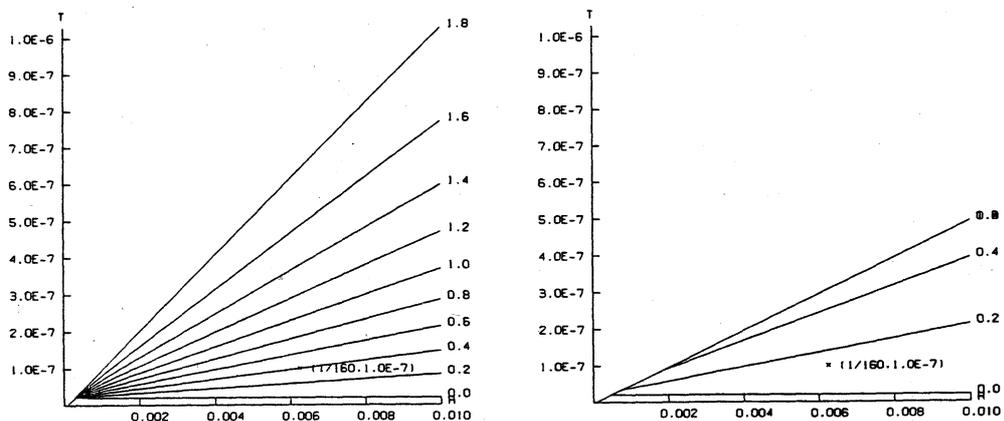


図3 安定限界, $u = 10000$ (左図: 三次風上スキーム, 右図: 河村スキーム)

で与えられる事に注意する。上述のシミュレーションでは, $\varepsilon = 0.2$, $N = 80$ であるから, ε -安定なモードは

$$80 \geq m \geq m_0 = 17 \left(\geq \frac{\cos^{-1}(0.8)}{\pi} \cdot 80 = 16.3 \dots > m_0 - 1 \right)$$

で与えられる。

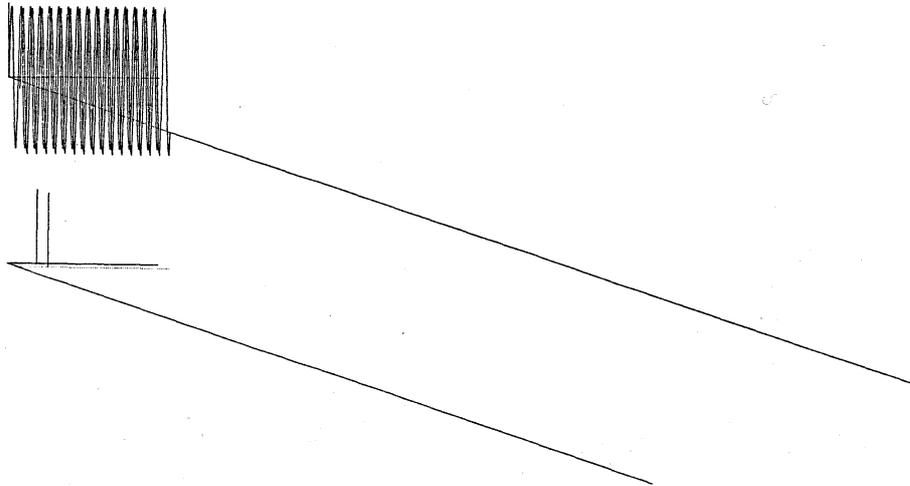


図4 非線形シミュレーション (三次風上スキーム)

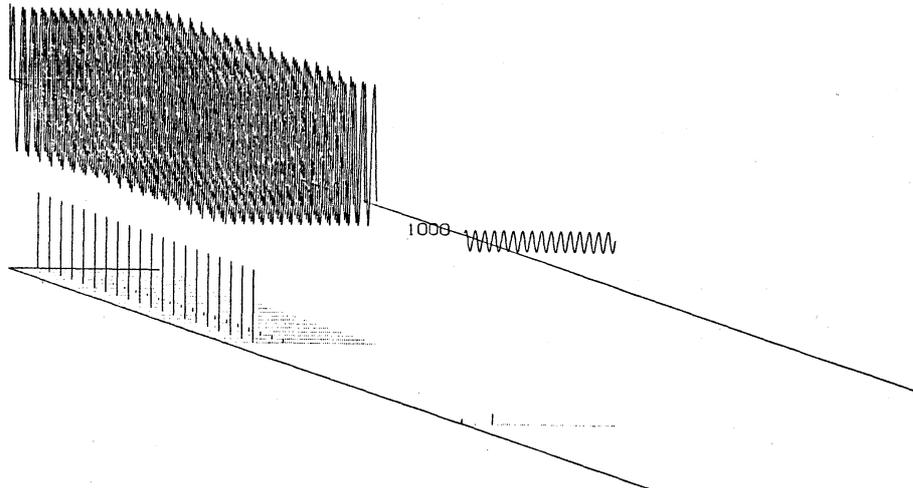


図5 非線形シミュレーション (河村スキーム)

さらに附言すれば、 ε が一定でも、刻み h が細くなればなる程、安定なモード数の下限は上昇する事になる。この事から、河村スキームの良さは、計算可能な十分細かい離散モデルを特定して考える時に始めて表面に出て来る性質であると思われる。通常の三次精度スキームとの比較の議論は、このようにデリケートである。

5. まとめ

ナビエ・ストークス方程式のように移流項が二次の非線形項を持つ場合には、自然に長波長成分から短波長成分が生成されるので短波長成分の安定性は差分スキームにとって本質

的である。 ε -安定性は ε に応じて仕切られる長い波長成分を無視した安定性であり、移流拡散スキームの有効性を議論する際に有用なものであることが、レイノルズ数の大きな時のバーガス方程式に対する三次風上スキームと河村スキームの比較考察から分かった。

[参考文献]

- [1] 名古屋靖一郎, 牛島照夫: 空間一次元移流拡散差分スキームの安定性について, 1989年度 MHD 数値計算とトーラス閉じ込めの基礎研究講演報告集, pp.15-26.
- [2] 名古屋靖一郎, 牛島照夫: 空間一次元移流拡散差分スキームの安定性について(その2), 1990年度 MHD 数値計算とトーラス閉じ込めの基礎研究講演報告集.