数理解析研究所講究録
第 747 巻 1991 年 122-132

Relationship among Various Types of Cone-Convexity of Vector-Valued Functions *†

弘前大学 理学部 情報科学科
田中 環 (Tamaki TANAKA ‡)

1. Introduction

最適化理論の分野においては、ベクトル空間の凸集合はもちろん、その上で定義された(実数値) 凸関数が重要な役割を演ずることはよく知られたことである。特に、非線形 (凸) 計画問題やミニマックス定理などには多くの重要な結果を与えてきた ([6] や [7] などを見よ) 。そして、さらに色々な凸関数の一般化を考えることにより、最適条件やミニマックス条件の緩和を試みてきた ([1], [2], [9], and [19] などを見よ) 。

一方、最近ではベクトル値関数についての最適化問題もかなり研究されており、色々な解が提案され、特徴づけられ、計算によって求められている (たとえば、[5], [8], [17], [20] などを見よ) 。そのような (多目的最適化) 問題においては、関数は実ベクトル空間 (有限次元だけでなく無限次元の場合も取り扱う) に値をとるため、そのベクトル空間にある選考基準となる順序を定める凸錐が与えられているのが通常である。そのような順序を一般に preference order と呼び、そのような凸錐を domination cone と呼ぶ。たとえば、その preference order が空間の中で一様ならば、一般には次のように定義される。

> A convex cone C in a vector space V induces the preference ordering $\leq_C$ in V as follows: For $z_1, z_2 \in V$, we write
>
> $$z_1 \leq_C z_2 \text{ if } z_2 - z_1 \in C. \tag{1}$$

さらに、その domination cone C が pointed (i.e., $C\cap(-C) = \{0\}$) ならば、その preference ordering $\leq_C$ は antisymmetric (反対称) となり、その空間 $(V, \leq_C)$ は半順序空間となる。そして、この順序に関して、実数値凸関数に類似したベクトル値関数の凸性を定義して最適条件が議論されてきた。特に、最近は色々なタイプのベクトル値凸関数が取り扱われてきており、たとえば、ベクトル最適化では [5] や [18] の中に、ベクトル値ミニマックス定理では [3], [4], [11], [12], [16] の中に、多目的ゲームでは [13], [14] の中に見ることができる。

---

*AMS subject classifications. 90C31, 90D35

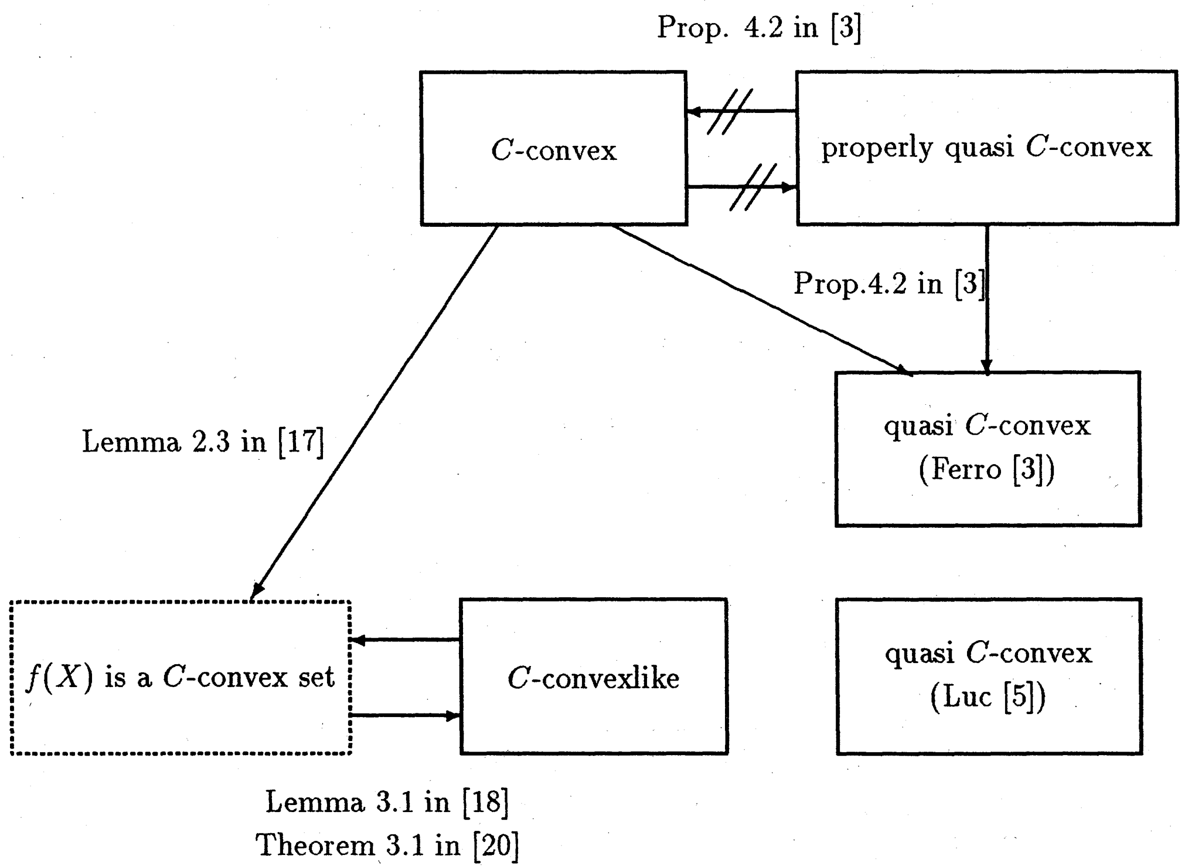
†This work was, in part, supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (Grant-in-Aid for Encouragement of Young Scientists) from the Ministry of Education, Science and Culture of Japan.

‡〒036 青森県弘前市文京町3番地 (Department of Information Science, Faculty of Science, Hirosaki University Bunkyo-cho 3, Hirosaki 036 Aomori JAPAN)

これらのベクトル値関数の色々な凸性を総称して、"cone-convexity" と呼ぶことにしよう。著者のこれまでの研究の中では、次のような cone-convexity が扱われている。

(1) 多目的最適化問題における解を適当なスカラー最適化問題の解として特徴づける時に、Convex Separation Theorems や Cone Separation Theorems を用いることが多い。そのため、ベクトル値関数 $f: X \longrightarrow V$ (V は R上のベクトル空間) について、その目的空間 $Y = f(X)$ がある種の凸性 (C-convex) を持っていることを仮定する。
(2) ベクトル値ミニマックス問題において、錐鞍点の存在を証明する場合に (Browder 等の) 一致点定理 (不動点定理) を利用することが多い。そのため、ベクトル値関数 $f: X \times Y \to V$ (Vは R上のベクトル空間) について、それぞれの決定空間における各最適反応戦略集合が凸集合となるように関数 fがある種の凸性 (C-convex または properly quasi C-convex) を持っていることを仮定する。

しかし、残念なことに、これらの cone-convexity の間の関係があまりはっきりしていない。そこで、本報告では [15] に沿ってこれらの関係を考察することにする。つまり、新しいタイプの cone-convexity (natural C-convexity) を定義して、それを中心に (次の章で定義される) ベクトル値関数の 5 つの凸性の関係を明らかにしよう。まず、それらの今までに知られている関係を一覧表にしておく。



2. Relationship among various types of cone-convexity

本報告を通して、E と Z は 2 つの実線形位相空間 (t.v.s.) とし、凸錐 $C \subset Z$ [i.e., $\lambda C \subset C$ for every $\lambda \geq 0$, and $C + C \subset C$], はベクトル空間 Zにある preference ordering $\leq_C$ を与えるものとする。また、ここで考察するベクトル値関数は空間 Eのある集合 Xで定義され、Zに値をとるものとする。さらに、誤解のない限り、cl$A$ は位相空間 E及び Z の集合 A の閉包を表すものとする。また、集合 $X \subset E$の fによる像を $f(X)$ と書くことにする。つまり、$f(X) := \{f(x) \,|\, x \in X\}$ である。

まず最初に、いちばん主要な最も早くから取り扱われてきた cone-convexity である "C-convex" から述べることにしよう。

Definition 1. Let X be a convex set in E. A vector-valued function $f : X \longrightarrow Z$ is said to be *C-convex* on X if

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq_C \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \tag{2}$$

$$[\ \text{i.e., } f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \in \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) - C\ \ ],$$

for every $x_1, x_2 \in X$ and $\lambda \in [0, 1]$.

この性質は実数値凸関数 (convex function) のベクトル値版であり、多くの文献の中で取り扱われている。たとえば、[3], [4], [8], [12], [13], [14], [15], [16], [17] 等を見よ。

次に、実数値準凸関数 (quasiconvex function) のベクトル値版である "properly quasi C-convex" 関数の定義をしよう。

Definition 2. Let X be a convex set in E. A vector-valued function $f : X \longrightarrow Z$ is said to be *properly quasi C-convex* on X if either

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq_C f(x_1) \quad \text{or} \quad f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq_C f(x_2) \tag{3}$$

$$[\ \text{i.e., } f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \in (f(x_1) - C) \cup (f(x_2) - C)\ \ ],$$

for every $x_1, x_2 \in X$ and $\lambda \in [0, 1]$.

この性質は [3], [4], [11], [13], [14], [15], [16] の中で取り扱われている。

Remark 1. As shown in Proposition 4.2 of [3], a C-convex function is not always properly quasi C-convex, and vice versa.

3 番目に、実数値の convexlike 関数のベクトル値版である "C-convexlike" 関数を考えよう。これについては [15], [18] の中に取り扱われている。また、この名前で言及されていないが、この性質は色々な論文の中で見ることができる (次の Lemma 1 参照) 。

Definition 3. Let X be a set in E. A vector-valued function $f : X \longrightarrow Z$ is said to be *C-convexlike* on X if, for every $x_1, x_2 \in X$ and $\lambda \in [0,1]$, there exists $x \in X$ such that

$$f(x) \leq_C \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \tag{4}$$

$$[\ \text{i.e., } f(x) \in \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) - C\ ].$$

この cone-convexity については、次のような性質がある。特に、Lemma 1 は [18] の中の Lemma 3.1 や [20] の中の Theorem 3.1 に述べられているように重要な性質である。

Lemma 1. *Let X be a set in E. A vector-valued function $f : X \longrightarrow Z$ is C-convexlike on X if and only if $f(X)$ is a C-convex set in Z, i.e., $f(X)+C$ is a convex set.*

PROOF. The sufficiency is obvious. Conversely, we assume that the function f is C-convexlike. Let $z_1, z_2 \in f(X) + C$ and $\lambda \in [0,1]$, then there are $x_1, x_2 \in X$ and $d_1, d_2 \in C$ such that

$$z_1 = f(x_1) + d_1 \quad \text{and} \quad z_2 = f(x_2) + d_2.$$

By the assumption, $\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \in f(X) + C$, and hence we have

$$\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2 \in f(X) + C.$$

Thus, the set $f(X) + C$ is convex. □

Lemma 2. *Let X be a convex set in E. Every C-convex function on X is also a C-convexlike function.*

Remark 2. Lemma 2.3 in [17] is proved immediately by Lemmas 1 and 2.

最後に、実数値準凸関数 (quasiconvex function) のもう一つのベクトル値版である "quasi C-convex" 関数の定義を述べよう。これについては [3] と [5] の中に取り扱われているが、定義は異なっている。しかし、[15] で述べられているように、それらは同値である。ここでは、読者のために、その証明も与えておこう。

Definition 4. Let X be a convex set in E. A vector-valued function $f : X \longrightarrow Z$ is said to be *quasi C-convex* on X if it satisfies the two equivalent conditions:

$$\forall z \in Z, \quad A(z) := \{x \in X \mid f(x) \leq_C z\} \quad \text{is convex or empty,} \tag{5}$$

$$\forall x_1, x_2 \in X \text{ and } \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq_C z \quad \text{for all } z \in C(f(x_1), f(x_2)), \tag{6}$$

where the set $C(f(x_1), f(x_2))$ is the set of upper bounds of $f(x_1)$ and $f(x_2)$, i.e.,

$$C(f(x_1), f(x_2)) := \{z \in Z \,|\, f(x_1) \leq_C z \text{ and } f(x_2) \leq_C z\}.$$

Lemma 3. *Let X be a convex set in E. The conditions* (5) *and* (6) *are equivalent to each other.*

Proof. We assume that the condition (5) holds for a vector-valued function $f : X \longrightarrow Z$, and let $x_1, x_2 \in X$ and $\lambda \in [0,1]$. For all $z \in C(f(x_1), f(x_2))$, $x_1, x_2 \in A(z)$ and $A(z)$ is a nonempty convex set. Therefore, we have $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A(z)$, and hence $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq_C z$. Conversely, we assume that the condition (6) holds for a vector-valued function $f : X \longrightarrow Z$. If, for any $z \in Z$ $A(z) = \emptyset$, then the condition (5) holds obviously. Assume that $A(z) \neq \emptyset$. Let $x_1, x_2 \in A(z)$ and $\lambda \in [0,1]$, then we have $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in X$ and

$$f(x_i) \leq_C z \qquad i = 1, 2,$$

and hence $z \in C(f(x_1), f(x_2))$. By assumption, we have $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq_C z$, and thus $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A(z)$. □

さて、ここで新しい cone-convexity を定義しよう。そして、これまでに見てきた色々な cone-convexity の間の関係を探って行こう。

Definition 5. Let X be a convex set in E. A vector-valued function $f : X \longrightarrow Z$ is said to be *natural C-convex* on X if

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \in [f(x_1), f(x_2)] - C \tag{7}$$

for every $x_1, x_2 \in X$ and $\lambda \in [0,1]$, where

$$[f(x_1), f(x_2)] := \{z \in Z \,|\, z = \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2), \lambda \in [0,1]\}.$$

この性質は他の cone-convexity の中央に位置し、それぞれの cone-convexity を結ぶ役割を果たしている。また、この性質によってベクトル値ミニマックス問題ではいくつかの新しい結果が得られるが、本報告ではその話にはふれない。それではこれらの cone-convexity の関係を見て行こう。

Theorem 1. *Let X be a convex set in E. Then the following statements hold:*

(i) *Every C-convex function is natural C-convex.*

(ii) *Every properly quasi C-convex function is natural C-convex.*

PROOF. (i) If a vector-valued function $f : X \longrightarrow Z$ is C-convex, for every $x_1, x_2 \in X$ and $\lambda \in [0, 1]$ we have (2), and hence the condition (7) holds.
(ii) If a vector-valued function $f : X \longrightarrow Z$ is properly quasi C-convex, for every $x_1, x_2 \in X$ and $\lambda \in [0, 1]$ we have (3), and hence the condition (7) holds. □

Theorem 2. *Let X be a convex set in E. Every natural C-convex function on X is also a quasi C-convex function.*

PROOF. Assume that a vector-valued function $f : X \longrightarrow Z$ is natural C-convex, and let $x_1, x_2 \in X$ and $\lambda \in [0, 1]$. Then there exists $\mu \in [0, 1]$ such that

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq_C \mu f(x_1) + (1 - \mu)f(x_2), \tag{8}$$

and we have

$$\mu f(x_1) + (1 - \mu)f(x_2) \leq_C z \tag{9}$$

for all $z \in C(f(x_1), f(x_2))$. From (8) and (9), it follows that

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq_C z$$

for all $z \in C(f(x_1), f(x_2))$. □

Remark 3. The part (i) of Proposition 4.2 in [3] is proved immediately by Theorems 1 and 2.

Theorem 3. *Let the domination cone C be closed and X be a convex set in E. If a natural C-convex function on X is continuous, then it is also a C-convexlike function.*

PROOF. Let $f : X \longrightarrow Z$ be a continuous natural C-convex function, and $x_1, x_2 \in X$ and $\lambda \in [0, 1]$. If $f(x_1) \leq_C f(x_2)$ or $f(x_2) \leq_C f(x_1)$, then obviously the condition (4) holds. Assume that $f(x_1) \not\leq_C f(x_2)$ and $f(x_2) \not\leq_C f(x_1)$. We suppose to the contrary that the function f is not C-convexlike. Then, there exists a scalar $\lambda_0 \in (0, 1)$ such that

$$f([x_1, x_2]) \cap (\lambda_0 f(x_1) + (1 - \lambda_0)f(x_2) - C) = \emptyset, \tag{10}$$

where $[x_1, x_2] = \{x \in E \,|\, x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \forall \lambda \in [0, 1]\}$. Also, we define the following sets:

$$C(\lambda) := \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) - C,$$

$$H_0 := \bigcup_{0\leq\lambda\leq\lambda_0} C(\lambda) \setminus C(\lambda_0),$$

$$H_1 := \bigcup_{\lambda_0\leq\lambda\leq 1} C(\lambda) \setminus C(\lambda_0).$$

We are going to show that

$$\mathrm{cl}H_0 \cap H_1 = \emptyset \quad \text{and} \quad H_0 \cap \mathrm{cl}H_1 = \emptyset.$$

In order to show that $\mathrm{cl}H_0 \cap H_1 = \emptyset$, we suppose to the contrary that there exists $z \in \mathrm{cl}H_0 \cap H_1$. Then, by $z \in \mathrm{cl}H_0$, there are nets $\{\lambda_\alpha\} \subset [0, \lambda_0)$ and $\{d_\alpha\} \subset C$ such that

$$z = \lim_\alpha (\lambda_\alpha f(x_1) + (1-\lambda_\alpha)f(x_2) - d_\alpha)$$

and

$$\lambda_\alpha f(x_1) + (1-\lambda_\alpha)f(x_2) - d_\alpha \notin C(\lambda_0)$$

for each α. Since the set $[f(x_1), f(x_2)]$ is compact, there exist subnets $\{\lambda_\beta\}$ and $\{d_\beta\}$ such that

$$\lim_\beta \lambda_\beta = \hat{\lambda}$$

for some $\hat{\lambda} \in [0, \lambda_0]$ and

$$\lim_\beta d_\beta = \hat{\lambda} f(x_1) + (1-\hat{\lambda})f(x_2) - z.$$

We denote the latter limit by $\hat{d}$, and then $\hat{d} \in \mathrm{cl}C = C$. On the other hand, by $z \in H_1$, there are $\lambda^* \in (\lambda_0, 1]$ and $d^* \in C$ such that

$$z = \lambda^* f(x_1) + (1-\lambda^*)f(x_2) - d^* \notin C(\lambda_0). \tag{11}$$

Now, we put

$$z_1 := \hat{\lambda} f(x_1) + (1-\hat{\lambda})f(x_2),$$

$$z_2 := \lambda^* f(x_1) + (1-\lambda^*)f(x_2).$$

Then we have $z_1 = z + \hat{d}$ and $z_2 = z + d^*$. Since

$$0 \leq \frac{\lambda^* - \lambda_0}{\lambda^* - \hat{\lambda}}, \frac{\lambda_0 - \hat{\lambda}}{\lambda^* - \hat{\lambda}} \leq 1$$

and $\hat{d}, d^* \in C$,

$$\frac{\lambda^* - \lambda_0}{\lambda^* - \hat{\lambda}} z_1 + \frac{\lambda_0 - \hat{\lambda}}{\lambda^* - \hat{\lambda}} z_2 = z + \frac{\lambda^* - \lambda_0}{\lambda^* - \hat{\lambda}} \hat{d} + \frac{\lambda_0 - \hat{\lambda}}{\lambda^* - \hat{\lambda}} d^* \in z + C.$$

Also, we have

$$\frac{\lambda^* - \lambda_0}{\lambda^* - \hat{\lambda}} z_1 + \frac{\lambda_0 - \hat{\lambda}}{\lambda^* - \hat{\lambda}} z_2 = \lambda_0 f(x_1) + (1 - \lambda_0) f(x_2),$$

and hence $z \in C(\lambda_0)$. This is a contradiction to (11).
Similarly, we can show that $H_0 \cap \mathrm{cl} H_1 = \emptyset$. Thus the sets H_0 and H_1 are separated.

Moreover, from natural C-convexity of f and (10), it follows that

$$f([x_1, x_2]) \subset H_0 \cup H_1.$$

Also,

$$f([x_1, x_2]) \cap H_i \neq \emptyset \quad (i = 0, 1).$$

This contradicts to the fact that $f([x_1, x_2])$ is a connected set. □

Remark 4. It is easy to show that the above theorem is not always true without the continuity of f. Also, we conjecture that the result of the theorem is true without the closedness of C.

Remark 5. As shown by Theorems 2 and 3, the natural C-convexity implies not only quasi C-convexity but also C-convexlikeness under the continuity of the function (and the closedness of C). However, a quasi C-convex function is not always C-convexlike, and vice versa, even if the function is continuous. We will give the following simple example: Let

$E = R, \quad X = [0, 1],$

$Z = R^2, \quad C = R^2_+ = \{(z_1, z_2) \in R^2 \,|\, z_1 \geq 0, z_2 \geq 0\},$

and define functions $f : X \longrightarrow Z$ by

$$f(x) = (\cos(\pi x/2), \sin(\pi x/2)),$$

and $g : X \longrightarrow Z$ by

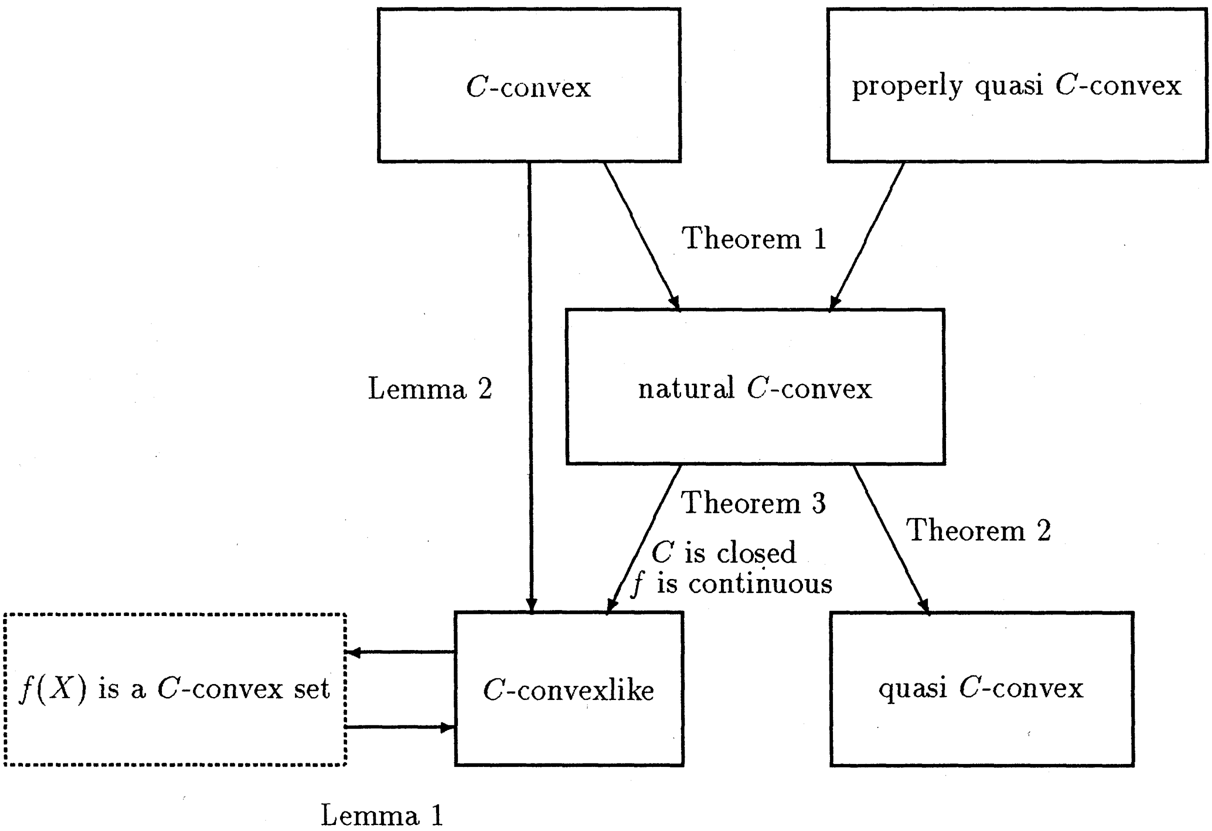
$$g(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)).$$

Then, the function f is continous and quasi C-convex but not C-convexlike. Conversely, the function g is continuous and C-convexlike but not quasi C-convex.

3. Conclusions

これまでに、ベクトル値関数の 5 つの凸性を見てきたが、その相互関係は次の表のとおりとなる。ただし、残念なことに Theorem 3 においては domination cone C の閉性を仮定しなければならなかったことである。たぶん、これは緩和される条件であると思う。ま

た、ベクトル値関数の凸性についての問題はまだたくさんあると思うし、これらの結果によって最適化理論の色々な方面で新しい結果が得られることと思う。



最後に、本報告においてはいくつかの貴重なご質問やご指摘があったので、それについて触れておく。富山大学経済学部の白石俊輔氏からは natural C-convex 性は実数値関数ではどんな凸性に対応しているのか、また、実数値関数の色々な凸性との対比から考察しているのかというご質問をいただいた。これについては、本報告ではベクトル値関数の側面からの考察であって、実数値関数の色々な凸性との比較は細かくしていない。それは実数値関数の凸性の単なる拡張ではなく、多目的最適化問題の中に現れる凸性にのみ着目して、ベクトル値関数ならではの関係や特徴づけを考察したかったからである。ただし、実数値関数との対比は今後、考察してみたいと思う。また、京都大学工学部の福島雅夫氏のご指摘のとおり、natural C-convex 性は実数値関数では準凸に対応する。それは Definition 5

の (7) の式において、f が実数値関数ならば

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\}$$

となるからである。従って、実数値準凸関数に対応するベクトル値関数として、ここでは properly quasi C-convex 、natural C-convex 、quasi C-convex の 3 つが考察されたことになる。さらに、福島氏からは凸性の一般化に関しては、線形関数を含むような凸性が望ましいとのコメントと狭義性についてのご質問をいただいた。一般の線形関数は properly quasi C-convex ではなく、この凸性は自然ではない。しかし、C-convex 性や natural C-convex 性は線形関数でも成立する凸性である。また、狭義な凸性はベクトル値関数の場合、domination cone として C の代わりに、$\text{int}C \cup \{0\}$ を考えることにより、同様に定義できる。たとえば、C-convex 性は次のように定義されている (See Definition 3.5 in [14]) 。

Let X be a convex set in E. A vector-valued function $f : X \longrightarrow Z$ is said to be *strictly C-convex* on X if

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq_{\text{int}C\cup\{0\}} \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \tag{12}$$

and

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \neq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

$$[\text{i.e.,}\ \ f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \in \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) - \text{int}C\ ],$$

for each distinct $x_1, x_2 \in X$ and each $\lambda \in (0,1)$.

また、properly quasi C-convex 性についても同様に定義されている。[11] の Definition 4.3 や [14] の Definition 4.4 を見よ。さらに、上の (12) のかわりに

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \in \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) - (C \setminus \{0\})$$

で定義したものも考えられる。しかし、ここでは 5 つの凸性に絞ることでその関係をはっきりさせるために、あえて狭義性については触れなかった。

References

[1] M.S.Bazaraa and C.M.Shetty, *Nonlinear programming: theory and algorithms*, John Wiley, New York, New York, 1979.

[2] K.Fan, *Minimax theorems*, Proc. Nat. Acad. Sci.,39(1953), 42–47.

[3] F.Ferro, *Minimax type theorems for n-valued functions*, Ann. Mat. Pura Appl.(4), 32(1982), 113–130.

[4] F.Ferro, *A minimax theorem for vector-valued functions*, J. Optim. Theory Appl., 60(1989), 19–31.

[5] D.T.Luc, *Connectedness of the efficient point sets in quasiconcave vector maximization*, J. Math. Anal. Appl., 122(1987), 346–354.

[6] J.von Neumann, *Zur theorie der gesellschaftsspiele*, Math. Ann., 100(1928), 295–320.

[7] R.T.Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1970.

[8] Y. Sawaragi, H.Nakayama and T. Tanino, *Theory of multiobjective optimization*, Academic Press, Orlando, Florida, 1985.

[9] M.Sion, *On general minimax theorems*, Pacific J. Math., 8(1958), 295–320.

[10] T.Tanaka, *On cone-extreme points in* R^n, Sci. Rep. Niigata Univ., 23(1987), 13–24.

[11] T.Tanaka, *Some minimax problems of vector-valued functions*, J. Optim. Theory Appl., 59(1988), 505–524.

[12] T.Tanaka, *Existence theorems for cone saddle points of vector-valued functions in infinite-dimensional spaces*, J. Optim. Theory Appl., 62(1989), 127–138.

[13] T.Tanaka, *On equilibrium strategies of multicriteria games*, RIMS Kokyuroku, 726(1990), 67–82.

[14] T.Tanaka, *A characterization of generalized saddle points for vector-valued functions via scalarization*, Nihonkai Mathematical Journal, 1(1990), No.2, 209–227.

[15] T.Tanaka, *Cone-convexity of vector-valued functions*, Sci. Rep. Hirosaki Univ., 37(1990), 170–177.

[16] T.Tanaka, *Two types of minimax theorems for vector-valued functions*, J. Optim. Theory Appl., 68(1991), 321–334.

[17] T.Tanino and Y.Sawaragi, *Duality theory in multiobjective programming*, J. Optim. Theory Appl., 27(1979), 509–529.

[18] F.Tardella, *On the image of a constrained extremum problem and some applications to the existence of a minimum*, J. Optim. Theory Appl., 60(1989), 93–104.

[19] F.Terkelsen, *Some minimax theorems*, Math. Scand., 31(1972), 405–413.

[20] P.L.Yu, *Cone convexity, cone extreme points, and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives*, J. Optim. Theory Appl., 14(1974), 319–377.