数理解析研究所講究録
第747巻1991年183-197

返却および追加注文を許す動的在庫モデル

九大経済 児玉正憲 (Masanori Kodama)

本論文では、需要量が連続的な動的在庫モデルについて、返却および追加注文を考慮し、過剰需要が後期需要として取扱われる場合の最適政策を検討する。

発注コストを考慮する必要がなく、需要が各期に一回きりと仮定できる多期間の購入・販売在庫モデルを取り上げる。記号と前期条件を以下のように設定する。

(i) 前期からの繰越し在庫量を x とし、初期発注量 y は期首に入荷する(単価 c_1)各期の発注は期首に行われ、直ちに入荷するものとする。各期の需要は期間 (t) 内の任意の時点 t_0 $(\leqq t)$ に発生し、単価 r_1 で販売する。$r_1 > c_1$ で $z = x + y$ とおく

(ii) 需要の発生時点で売れ残りがあると供給者はあるきめられた許容範囲 R_1 以内でこれを引きとる。このときの返却単位価格を r_2 とする。$0 < r_2 \leqq c_1$

(iii) 余剰品に対して単位当り h の在庫コストがかかるも

のとする。

(iv) 品切れが起った場合は ある許容範囲 R_2 以内であれば単価 $C_2\ (C_1 \leqq C_2)$ で購入・入荷できるものとする。

(v) 品切量が R_2 をこえた場合は単位当り $p\ (>0)$ の品切損失が発生するものとする。 ただし, $C_2 > \gamma_1 + (1-\frac{t_0}{t})p$ のときは追加注文せず $(R_2=0)$ 品切れを起したほうが有利となり, このモデルの仮定に反するので $C_2 \leqq \gamma_1 + (1-\frac{t_0}{t})p$ とする。 $C_1 < p$

(vi) 各期の需要量を表わす確率変数は互いに独立で同じ分布に従うものとする。 需要量 B の確率密度関数を $\phi(b)$ 累積分布関数を $\Phi(b)$, 平均値を m とする。

$$\Phi(b) = P\{B \leqq b\} = \int_0^b \phi(x)\,dx, \qquad m = \int_0^\infty b\phi(b)\,db$$

利益とコストのパラメータ間の関係を整理すると 次のようになる.

$$\begin{cases} 0 < \gamma_2 \leqq C_1 \leqq C_2 \leqq \gamma_1 + (1-\frac{t_0}{t})p \\ 0 < h \\ C_1 < \gamma_1, \quad C_1 < p \end{cases} \tag{1}$$

$f_n(x)$: 初期在庫量を x としたとき, n 期間にわたる期待割引費用を最小にするという意味での最適購入政策をとったときの費用関数

α : 割引率 $(0 < \alpha < 1)$

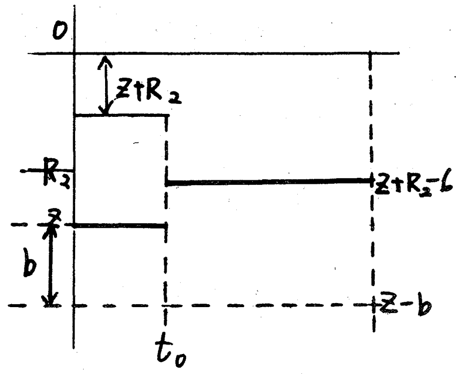
需要量 B の実現値 b, 期首在庫量 z およびモデルの仮定に

よって種々の在庫状態が考えられる。期平均在庫量，不足する期平均在庫量および期平均費用をそれぞれ $I_1(b,z)$，$I_2(b,z)$，$C(b,z)$ とすれば次のようになる.

(1)　$z \leqq -R_2 \quad (R_2 > 0,\ b > 0)$

$$I_1(b,z) = 0,\ I_2(b,z) = -\frac{t_0}{t}z + (b - z - R_2)\left(1 - \frac{t_0}{t}\right)$$

$$C(b,z) = c_1(z-\chi) + p\left[-z + \left(1 - \frac{t_0}{t}\right)(b - R_2)\right] + c_2R_2 - \gamma_1R_2$$



$0 < b$

ところで需要量 B は連続確率変数であるので期待期平均費用 $E\{C(B,z)\}$ は次式で与えられる。

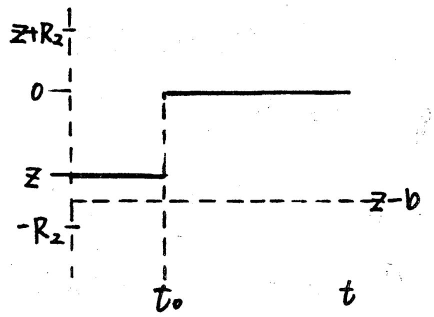
$$E\{C(B,z)\} = \int_0^\infty C(b,z)\phi(b)\,db = -c_1\chi + H_1(z)$$

$$H_1(z) = c_1z + p\left\{\left(1 - \frac{t_0}{t}\right)m - \left[z + \left(1 - \frac{t_0}{t}\right)R_2\right]\right\} + (c_2 - \gamma_1)R_2$$

(2)　$-R_2 < z \leqq 0$

(i)　$0 \leqq b < z + R_2$

このとき，$b - z\ (< R_2)$ が在庫不足，直ちに入荷



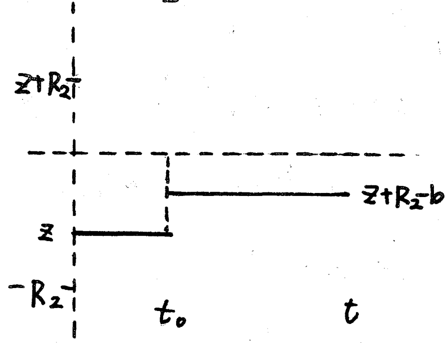
$0 \leqq b < z + R_2$

$$\therefore\quad I_1(b,z) = 0,\quad I_2(b,z) = -\frac{t_0}{t}z$$

$$C(b,z) = c_1(z-\chi) - p\frac{t_0}{t}z + c_2(b-z) - \gamma_1(b-z)$$

(ii)　$b \geqq z + R_2$

このとき　$b - z\ (> R_2)$ が在庫不足 R_2 単位入荷



$b \geqq z + R_2$

$$I_1(b,z) = 0$$

$$I_2(b,z) = \frac{t_0}{t}z + \left(1-\frac{t_0}{t}\right)(b-z-R_2)$$

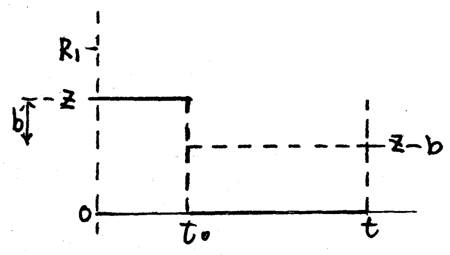
$$C(b,z) = C_1(z-x) + p\left\{-z+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)(b-R_2)\right\} + C_2R_2 - \gamma_1R_2$$

$$E\{C(B,z)\} = \int_0^\infty C(b,z)\phi(b)db = -C_1x + H_2(z)$$

$$H_2(z) = (C_1-p)z + \left[\gamma_1+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p-C_2\right]\left[(z+R_2)\Phi(z+R_2)-R_2\right] + (C_2-\gamma_1)\int_0^{z+R_2} b\phi(b)db + \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p\int_{z+R_2}^\infty b\phi(b)db$$

(3) $0 < z \leqq R_1$

(i) $0 \leqq b < z$



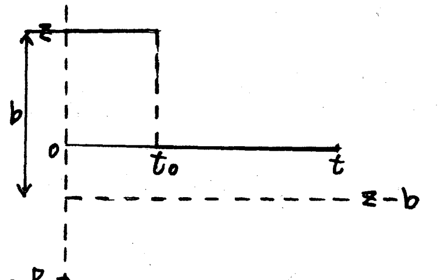
$0 \leqq b < z$

このとき在庫が $z-b$ ($< R_1$) となり，直ちに $z-b$ だけ返却，在庫量 $= 0$

$$I_1(b,z) = \frac{t_0}{t}z, \quad I_2(b,z) = 0$$

$$C(b,z) = C_1(z-x) + h\frac{t_0}{t}z - \gamma_1 b - \gamma_2(z-b)$$

(ii) $z < b \leqq z+R_2$



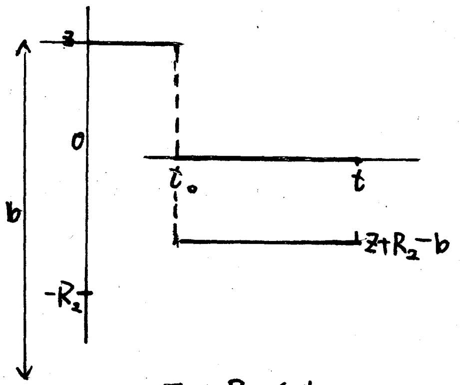
$z < b \leqq z+R_2$

$b-z$ ($< R_2$)：在庫不足量，直ちに購入，在庫は 0

$$I_1(b,z) = \frac{t_0}{t}z, \quad I_2(b,z) = 0$$

$$C(b,z) = C_1(z-x) + h\frac{t_0}{t}z + C_2(b-z) - \gamma_1 b$$

(iii) $z+R_2 \leqq b$



$z+R_2 \leqq b$

$b-z$ ($\geqq R_2$)：在庫不足量，直ちに R_2 だけ即時購入，納入，$b-(z+R_2)$ だけの在庫不足となる。

$$I_1(b,z) = \frac{t_0}{t}z, \quad I_2(b,z) = \left(1-\frac{t_0}{t}\right)(b-z-R_2)$$

$$C(b,z) = C_1(z-x) + h\frac{t_0}{t}z + p\left(1-\frac{t_0}{t}\right)(b-z-R_2) - \gamma_1(z+R_2) + C_2R_2$$

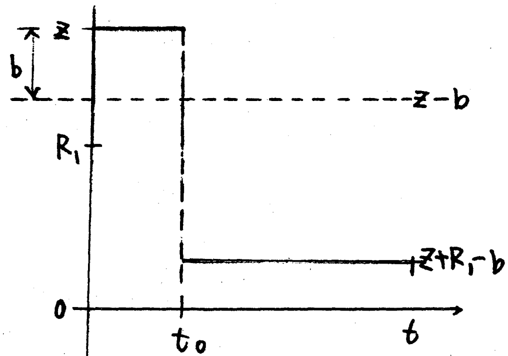
$$E\{C(B,z)\} = \int_0^\infty C(b,z)\phi(b)\,db = -c_1 x + H_3(z)$$

$$\begin{aligned}H_3(z) &= \left[c_1 + h\frac{t_0}{t} - r_1 - \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p\right]z + (c_2 - r_2)z\Phi(z) + \left[r_1 + \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p - c_2\right](z+R_2)\Phi(z+R_2) \\ &\quad + (r_2 - r_1)\int_0^z b\phi(b)\,db + (c_2 - r_1)\int_z^{z+R_2} b\phi(b)\,db + \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p\int_{z+R_2}^\infty b\phi(b)\,db + \left[c_2 - r_1 - \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p\right]R_2\end{aligned}$$

(4) $z > R_1$

(i) $0 \leqq b < z - R_1$

$z-b\ (>R_1)$ より R_1 だけ返却，その後 $z-(R_1+b)$ の在庫



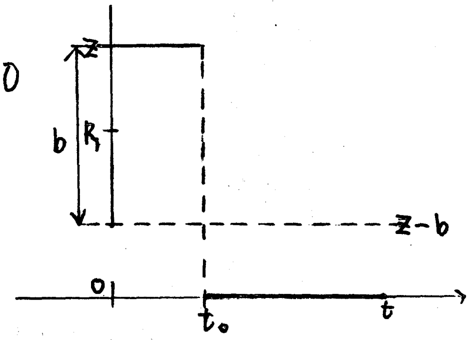
$0 \leqq b < z - R_1$

$$I_1(b,z) = \frac{t_0}{t}z + \left(1-\frac{t_0}{t}\right)(z+R_1-b),\quad I_2(b,z) = 0$$

$$C(b,z) = c_1(z-x) + h\left[z + \left(1-\frac{t_0}{t}\right)(R_1-b)\right] - r_1 b - r_0 R_1$$

(ii) $z - R_1 \leqq b < z$

$z-b\ (<R_1)$ だけ返却，その後在庫は 0



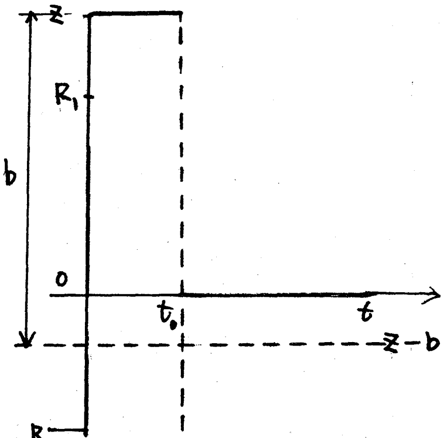
$z - R_1 \leqq b < z$

$$I_1(b,z) = \frac{t_0}{t}z,\qquad I_2(b,z) = 0$$

$$C(b,z) = c_1(z-x) + h\frac{t_0}{t}z - r_1 b - r_2(z-b)$$

(iii) $z \leqq b < z + R_2$

$b-z\ (<R_2)$：在庫不足量，直ちに購入，在庫は 0



$z \leqq b < z + R_2$

$$I_1(b,z) = \frac{t_0}{t}z,\qquad I_2(b,z) = 0$$

$$C(b,z) = c_1(z-x) + h\frac{t_0}{t}z + c_2(b-z) - r_1 b$$

(iv) $z + R_2 \leqq b$

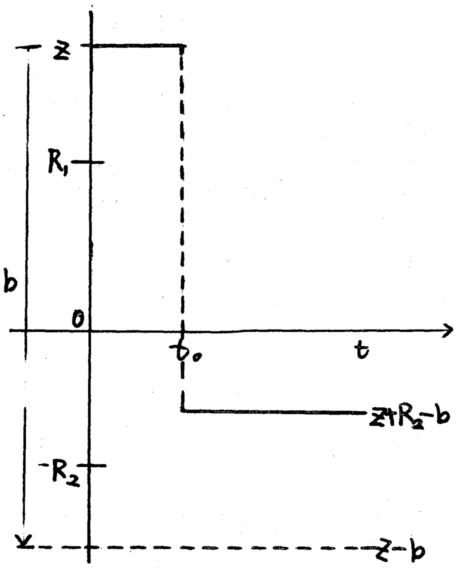
$b-z\ (>R_2)$：在庫不足量，R_2 だけ即納，在庫は $z+R_2-b$ となる．

$$I_1(b,z)=\frac{t_0}{t}z,\quad I_2(b,z)=\left(1-\frac{t_0}{t}\right)(b-z-R_2)$$

$$C(b,z)=C_1(z-x)+h\frac{t_0}{t}z+p\left(1-\frac{t_0}{t}\right)(b-z-R_2)+C_2R_2-\gamma_1(z+R_2)$$

$$E\{C(B,z)\}=\int_0^\infty C(b,z)\phi(b)\,db=-C_1x+H_4(z)$$

$$\begin{aligned}H_4(z)=&\left[C_1-\gamma_1-\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p+\frac{t_0}{t}h\right]z+\left[\gamma_2+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)h\right]\\&\cdot(z-R_1)\Phi(z-R_1)+(C_2-\gamma_2)z\Phi(z)\\&+\left[\gamma_1-C_2+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p\right](z+R_2)\Phi(z+R_2)\\&-\left[\gamma_1+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)h\right]\int_0^{z-R_1}b\phi(b)\,db+(\gamma_2-\gamma_1)\int_{z-R_1}^{z}b\phi(b)\,db\\&+(C_2-\gamma_1)\int_z^{z+R_2}b\phi(b)\,db+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p\int_{z+R_2}^{\infty}b\phi(b)\,db+\left[C_2-\gamma_1-\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p\right]R_2\end{aligned}$$



$z+R_2\leqq b$

$H(z)$ を次式で定義すると

$$H(z)=\begin{cases}H_1(z) & z\leqq -R_2\\ H_2(z) & -R_2<z\leqq 0\\ H_3(z) & 0<z\leqq R_1\\ H_4(z) & z>R_1\end{cases}$$

$H(z)$ は z の連続関数となる。 $H_i(z)$ $(i=1,\cdots,4)$ の性質を列記しよう

$$H_1'(z)=C_1-p,\qquad H_1''(z)=0$$

$$H_2'(z)=C-p+\left[\gamma_1+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p-C_2\right]\Phi(z+R_2),\quad H_2'(-R_2)=C_1-p=H_1'(-R_2)$$

$$H_2'(0)=C_1-p+\left[\gamma_1+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p-C_2\right]\Phi(R_2),\quad H_2''(z)=\left[\gamma_1+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p-C_2\right]\phi(z+R_2)\geqq 0$$

$$H_3'(z)=C_1-p-\gamma_1+\frac{t_0}{t}(h+p)+(C_2-\gamma_2)\Phi(z)+\left[\gamma_1+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p-C_2\right]\Phi(z+R_2)$$

$$H_3'(0)=C_1-p-\gamma_1+\frac{t_0}{t}(h+p)+\left[\gamma_1+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p-C_2\right]\Phi R_2$$

$$H_2'(0)\neq H_3'(0),\quad H_3'(R_1)=C_1-p-\gamma_1+\frac{t_0}{t}(h+p)+(C_2-\gamma_2)\Phi(R_1)+\left[\gamma_1+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p-C_2\right]\Phi(R_1-R_2).$$

$$H_3''(z) = (C_2 - r_2)\phi(z) + \left[r_2 + \left(1 - \frac{t_0}{t}\right)p - C_2\right]\phi(z + R_2) \geqq 0$$

$$H_4'(z) = C_1 - p - r_1 + \frac{t_0}{t}(h + p) + \left[r_2 + \left(1 - \frac{t_0}{t}\right)h\right]\Phi(z - R_1) + (C_2 - r_2)\Phi(z) + \left[r_1 + \left(1 - \frac{t_0}{t}\right)p - C_2\right]\Phi(z + R_2)$$

$$H_4'(R_1) = H_3'(R_1),\quad H_4''(z) = \left[r_2 + \left(1 - \frac{t_0}{t}\right)h\right]\phi(z - R_1) + (C_2 - r_2)\phi(z) + \left[r_1 + \left(1 - \frac{t_0}{t}\right)p - C_2\right]\phi(z + R_2) \geqq 0$$

$$\lim_{z \to \infty} H_4''(z) = C_1 + h > 0$$

次に曲線$H(z)$は$H_2'(0)$，$H_3'(0)$，$H_3'(R_1) = H_4'(R_1)$の符号によって次の4つに分類できる

(i) $H_2'(0) < 0$，$H_4'(R_1) < 0$ （このとき $H_3'(0) < 0$）

(ii) $H_2'(0) < 0$，$H_3'(0) < 0$，$H_4'(R_1) > 0$

(iii) $H_2'(0) > 0$，$H_3'(0) < 0$，$H_4''(R_1) < 0$

(iv) $H_2'(0) > 0$，$H_3'(0) < 0$，$H_4'(R_1) > 0$

多期間モデルを考察するため以下の仮定を設ける

仮定　1　$H_4'(R_1) < 0$

仮定　2　$H_2'(0) \leqq H_3'(0)$

仮定2のもとで$H(z)$は全区間$(-\infty < z < \infty)$で凸関数となり，仮定1，2より$H_2'(0) < 0$となる。　$H_2'(0) < 0$のとき，$C_1 - p < 0$となる．仮定2は$\frac{t_0}{t}(h + p) - r_1 \geqq 0$のときにかぎり成立する。

さて　n期間モデルを考察しよう

最適性の原理より

$$f_1(x) = \underset{z \geqq x}{\mathrm{Min}}\left\{-C_1 x + H(z)\right\} \tag{1}$$

$$f_n(x) = \underset{z \geqq x}{\mathrm{Min}}\left\{-C_1 x + H(z) + \alpha\int_0^\infty f_{n-1}(z - b)\,\phi(b)\,db\right\} \tag{2}$$

上記のようにして求められたzを最適政策という．　このと

き，次の定理をうる．

定理1　最適政策は

$z = \bar{x}_n, \qquad x \leqq \bar{x}_n$

$z = x, \qquad x > \bar{x}_n$

である．　ここに $\bar{x}_n$ は

$$r_1 + \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p = C_1 + \frac{t_0}{t}h\left[r_2 + \left(1-\frac{t_0}{t}\right)h\right]\Phi(z-R_1) + (C_2-r_2)\Phi(z) + \left[r_1 + \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p - C_2\right]\Phi(z+R_2) + \alpha\int_0^\infty f'_{n-1}(z-b)\phi(b)\,db \tag{3}$$

の唯一の根である．　ここに $f'_0 = 0$ とする．

証明　帰納法による

(i)　$n=1$ の場合

$H_1(-R_2) = H_2(-R_2)$, $H'_1(z) = C_1 - p < 0$, $H'_2(-R_2) = H'_1(-R_2) = C_1 - p < 0$, $H_2(0) = H_3(0)$

$H'_2(z) < 0 \quad (\because H'_4(R_1) < 0) \qquad H'_3(z) < 0 \quad (\because H'_4(R_1) < 0)$, $H_3(R_1) = H_4(R_1)$　$H'_4(R_1) < 0$

となるので　$z > R_1$ の場合だけを考えれば十分である．　$\bar{x}\,(>R_1)$ が(3)をみたすことは $\phi(b) > 0$ に対して $H''_4(z) > 0$ および $\lim_{z\to\infty} H'_4(z) = C_1 + h > 0$ より示される．　$\phi(b) \geqq 0$ のときは $H''_4(z) \geqq 0$ となり　ある閉区間におけるすべての値が根となる場合がおこるかもしれない．　このとき最小値を唯一の根 $\bar{x}_1$ とする．　以下の議論でもこのように唯一の根を定める．　このとき

$$f'_1(x) = -C, \qquad x \leqq \bar{x} \tag{4}$$

$$f'_1(x) = \left[r_2 + \left(1-\frac{t_0}{t}\right)h\right]\Phi(x-R_1) + (C_2-r_2)\Phi(x) + \left[r_1 + \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p - C_2\right]\Phi(x-R_2) - \left[r_1 + \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p - \frac{t_0}{t}h\right]$$

$$x \geqq \bar{x}_1, \qquad \lim_{x\to\infty} f'_1(x) = h > 0 \tag{5}$$

$$f''_1(x) = \left[r_2 + \left(1-\frac{t_0}{t}\right)h\right]\phi(x-R_1) + (C_2-r_2)\phi(x) + \left[r_1 + \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p - C_2\right]\phi(x+R_2) \geqq 0, \quad x \geqq \bar{x} \tag{6}$$

$\phi(b) > 0$ のとき，$f_1''(x) > 0$ となる

(ii) $n = 2$ の場合

$$-C_1 x + H(z) + \alpha\int_0^\infty f_1(z-b)\phi(b)db$$

$$= -C_1 x + H_1(z) + \alpha\int_0^\infty f_1(z-b)\phi(b)db \qquad z \leqq -R_2 \tag{7}$$

$$= -C_1 x + H_2(z) + \alpha\int_0^\infty f_1(z-b)\phi(b)db \qquad -R_2 < z \leqq 0 \tag{8}$$

$$= -C_1 x + H_3(z) + \alpha\int_0^\infty f_1(z-b)\phi(b)db \qquad 0 < z \leqq R_1 \tag{9}$$

$$= -C_1 x + H_4(z) + \alpha\int_0^\infty f_1(z-b)\phi(b)db \qquad z > R_1 \tag{10}$$

$H_i(z)$，$H_i'(z)$ $(i = 1, \cdots 4)$，(4) より

$$H_1(-R_2) = H_2(-R_2)$$

$$H_1'(z) + \alpha\int_0^\infty f_1'(z-b)\phi(b)db = C_1(1-\alpha) - p < 0$$

$$H_2'(-R_2) + \alpha\int_0^\infty f_1'(-R_2-b)\phi(b)db = C_1-(1-\alpha) - p < 0$$

$$H_2(0) = H_3(0)$$

$$H_2'(z) + \alpha\int_0^\infty f_1'(z-b)\phi(b)db = H_2'(z) - \alpha C_1 < 0$$

$$H_3'(z) + \alpha\int_0^\infty f_1'(z-b)\phi(b)db = H_3'(z) - \alpha C_1 < 0$$

$$H_3(R_1) = H_4(R_1)$$

$$H_4'(R_1) + \alpha\int_0^\infty f_1'(R_1-b)\phi(b)db = H_4'(R_1) - \alpha C_1 < 0$$

となるので，$z > R_1$ の場合を考えれば十分である．$\bar{x}_2$ は (10) を z で微分して 0 とおいて得られる．つまり

$$C_1 = r_1 + \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p - \frac{t_0}{t}h - \left[r_2 + \left(1-\frac{t_0}{t}\right)h\right]\Phi(z-R_1) - (C_2 - r_2)\Phi(z) - \left[r_1 + \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p - C_2\right]\Phi(z+R_2)$$
$$-\alpha\int_0^\infty f_1'(z-b)\phi(b)db \tag{11}$$

をみたす z である。(11) の右辺を $F_1(z)$ とおくと，(4)，(5)，(6)

より

$$F_1'(z) = -\left[r_2 + \left(1-\frac{t_0}{t}\right)h\right]\phi(z-R_1) - (C_2-r_2)\phi(z) - \left[r_1+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p - C_2\right]\phi(z+R_2)$$
$$-\alpha\int_0^\infty f_1''(z-b)\phi(b)\,db \leqq 0$$

$\phi(b) > 0$ のとき, $F_1'(z) < 0$

$$F_1(R_1) = r_1 + \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p - \frac{t_0}{t}h - (C_2-r_2)\Phi(R_1) - \left[r_1+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p - C_2\right]\Phi(R_1+R_2) + \alpha C$$
$$= -H_4'(R_1) + (1+\alpha)C_1 > C_1$$

$$\lim_{z\to\infty} F_1(z) = -(1+\alpha)h < 0$$

であるから (11) は唯一の根をもつ. 最適政策は

$z = \bar{x}_2$, $x \leqq \bar{x}_2$

$z = x$ $x > \bar{x}_2$

である. (i) と同様に

$f_2'(x) = -C_1$, $x \leqq \bar{x}_2$

$$f_2'(x) = \left[r_2 + \left(1-\frac{t_0}{t}\right)h\right]\Phi(x-R_1) - (C_2-r_2)\Phi(x) + \left[r_1+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p - C_2\right]\Phi(x+R_2)$$
$$-\left[r_1+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p - \frac{t_0}{t}h\right] + \alpha\int_0^\infty f_1'(x-b)\phi(b)\,db, \quad x \geqq \bar{x}_2,$$

$$\lim_{x\to\infty} f_2'(x) > 0$$

$$f_2''(x) = \left[r_2 + \left(1-\frac{t_0}{t}\right)h\right]\phi(x-R_1) + (C_2-r_2)\phi(x) + \left[r_1+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p - C_2\right]\phi(x+R_2)$$
$$+\alpha\int_0^\infty f_1''(x-b)\phi(b)\,db \geqq 0, \quad x \geqq x_2$$

(iii) $n=k$ のとき 定理が成立しているとする。 このとき

$$f_k'(x) = -C_1, \quad x \leqq \bar{x}_k \tag{12}$$

$$f_k'(x) = \left[r_2 + \left(1-\frac{t_0}{t}\right)h\right]\Phi(x-R_1) + (C_2-r_2)\Phi(x) + \left[r_1+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p - C_2\right]\Phi(x+R_2)$$
$$-\left[r_1+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p - \frac{t_0}{t}h\right] + \alpha\int_0^\infty f_{k-1}'(x-b)\phi(b)\,db, \quad x \geqq \bar{x}_k,$$

$$\lim_{x\to\infty} f_k'(x) > 0 \tag{13}$$

$$f_k''(x) = \left[r_2+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)h\right]\phi(x-R_1)+(C_2-r_2)\phi(x)+\left[r_1+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p-C_2\right]\phi(x+R_2)$$
$$+\alpha\int_0^\infty f_{k-1}''(x-b)\phi(b)\,db \geqq 0, \qquad x \geqq \bar{x}_k \tag{14}$$

ここに $\bar{x}_k$ は次の方程式の唯一の根である．

$$C_1 = r_1+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p-\frac{t_0}{t}h-\left[r_2+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)h\right]\Phi(x-R_1)-(C_2-r_2)\Phi(x)-\left[r_1+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p-C_2\right]\Phi(x+R_2)$$
$$-\alpha\int_0^\infty f_{k-1}'(x-b)\phi(b)\,db$$

このとき

$$f_{k+1}(x) = \underset{z\geqq x}{\mathrm{Min}}\left\{-C_1x+H(z)+\alpha\int_0^\infty f_k(z-b)\phi(b)\,db\right\} \tag{15}$$

$$H(z)+\alpha\int_0^\infty f_k(z-b)\phi(b)\,db$$
$$= H_1(z)+\alpha\int_0^\infty f_k(z-b)\phi(b)\,db, \qquad z \leqq -R_2 \tag{16}$$
$$= H_2(z)+\alpha\int_0^\infty f_k(z-b)\phi(b)\,db, \qquad -R_2 < z \leqq 0 \tag{17}$$
$$= H_3(z)+\alpha\int_0^\infty f_k(z-b)\phi(b)\,db, \qquad 0 < z \leqq R \tag{18}$$
$$= H_4(z)+\alpha\int_0^\infty f_k(z-b)\phi(b)\,db, \qquad z > R_1 \tag{19}$$

(ii) と同様な議論より $z > R_1$ の場合を考えれば十分である．$\bar{x}_{k+1}$ は (19) を z で微分して 0 とおいて得られる．即ち

$$C_1 = r_1+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p-\frac{t_0}{t}h-\left[r_2+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)h\right]\Phi(z-R_1)-(C_2-r_2)\Phi(z)-\left[r_1+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p-C_2\right]\Phi(z+R_2)$$
$$-\alpha\int_0^\infty f_k'(z-b)\phi(b)\,db \tag{20}$$

をみたす z のことである． (20) の右辺を $F_k(z)$ とおくと，(12)～(14) より

$$F_k'(z) = -\left[r_2+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)h\right]\phi(z-R_1)-(C_2-r_2)\phi(z)-\left[r_1+\left(1-\frac{t_0}{t}\right)p-C_2\right]\phi(z+R_2)$$
$$-\alpha\int_0^\infty f_k''(z-b)\phi(b)\,db \leqq 0 \tag{21}$$

$$F_k(R_1) = -H_4'(R_1) + (1+\alpha)C_1 > C_1$$

$$\lim_{z\to\infty} F_k(z) < 0$$

となるから (20) は唯一の根をもつ。 最適政策は

$$z = \bar{x}_{k+1}, \quad x \leqq \bar{x}_{k+1}$$

$$z = x, \quad x > \bar{x}_{k+1}$$

である. [証終]

この動的モデルにおける $\bar{x}_n$, $f_n(x)$ について次の定理をうる.

定理 2

(i) 点 $\bar{x}_n$ を除いて $f_n''(x) \geqq 0$, $\bar{x}_n$ では非負の右2階微分係数, 非負の左2階微分係数が存在する。

(ii) $\bar{x}_n \geqq \bar{x}_{n-1}$, ただし $\bar{x}_0 = R_1$

(iii) $n \geqq 2$ に対して

$$-\left[r_1 + \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p - \frac{t_0}{t}h\right] < f_n'(x) \leqq f_{n-1}'(x) \qquad x \leqq \bar{x}_n$$

$$-\left[r_1 + \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p - \frac{t_0}{t}h\right] < f_n'(x) < f_{n-1}'(x) + \alpha^{n-1}h \qquad x > \bar{x}_n$$

$n = 1$ に対して

$$-\left[r_1 + \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p - \frac{t_0}{t}h\right] < f_1'(x) < h$$

証明 (i) は定理1の証明の中で示されている。 (ii), (iii) は帰納法による。

i) $n = 1$ の場合

(5) で $x = \bar{x}_1$ とおくと, (3) より $f_1'(\bar{x}_1) = -C_1$ となる。 (6) より $x \geqq \bar{x}_1$ に対して $f_1''(x) \geqq 0$, (5) より $\lim_{x\to\infty} f_1'(x) = h$ および注意1よ

り，すべて x に対して

$$h > f_1'(x) \geqq -C_1 > [r_1 + (1-\frac{t_0}{t})p - \frac{t_0}{t}h]$$

$\bar{x}_1 > R_1 = \bar{x}_0$ は定理 I の中で示されている。

ii)　$n=2$ の場合

このとき　$\bar{x}_2$ は

$$C_1 = r_1 + (1-\frac{t_0}{t})p - \frac{t_0}{t}h - [r_2 + (1-\frac{t_0}{t})h]\Phi(\bar{x}_2 - R_1) - (C_2 - r_2)\Phi(\bar{x}_2) - [r_1 + (1-\frac{t_0}{t})p - C_2]\Phi(x+R_2) - \alpha\int_0^\infty f_1'(\bar{x}_2 - b)\phi(b)\,db$$

をみたす．　右辺の関数 $F_1(\bar{x}_2)$ は $\bar{x}_2$ の単調減少関数である．

また　$F_1(R_1) = -H_4'(R_1) + (1+\alpha)C_1 > (1+\alpha)C_1 > C_1$　　$F_1(\bar{x}_1) = (1+\alpha)C_1 > C_1 = F(\bar{x}_2)$　したがって　$\bar{x}_1 < \bar{x}_2$　をうる。

$x \leqq \bar{x}_1$ のとき，$f_1'(x) = f_2'(x) = -C_1 > -[r_1 + (1-\frac{t_0}{t})p - \frac{t_0}{t}h]$，　$\bar{x}_1 < x \leqq \bar{x}_2$ のとき，$f_2'(x) = -C$，　$f_1'(x) \geqq -C_1$　よって　$-[r_1 + (1-\frac{t_0}{t})p - \frac{t_0}{t}h] < f_2'(x) \leqq f_1'(x)$

$(x \leqq \bar{x}_2)$

$x > \bar{x}_2$ のとき

$$\begin{aligned} f_2'(x) - f_1'(x) &= \alpha\int_0^\infty f_1'(x-b)\phi(b)\,db \\ &= \alpha\int_0^{x-\bar{x}} f_1'(x-b)\phi(b)\,db + \alpha\int_{x-\bar{x}}^\infty f_1'(x-b)\phi(b)\,db \\ &\leqq \alpha h\int_0^{x-\bar{x}}\phi(b)\,db - \alpha C\int_{x-\bar{x}}^\infty \phi(b)\,db < \alpha h \end{aligned}$$

となる。　したがって注意 1 を用いて，$-[r_1 + (1-\frac{t_0}{t})p - \frac{t_0}{t}h] < f_1'(x) + \alpha h$

(iii)　$n=k$ に対して定理が成立しているとする。　このとき

$\bar{x}_k \geqq \bar{x}_{k-1}$

$-[r_1 + (1-\frac{t_0}{t})p - \frac{t_0}{t}h] < f_k'(x) \leqq f_{k-1}'(x)$　　　　$x \leqq \bar{x}_k$

$-[r_1 + (1-\frac{t_0}{t})p - \frac{t_0}{t}h] < f_k'(x) < f_{k-1}'(x) + \alpha^{k-1}h$　　　　$x > \bar{x}_k$

となる。

このとき $\bar{x}_{k+1}$ は(20)より $C_1=F_k(\bar{x}_{k+1})$ をみたす。 $F_k(x)$ は x の単調減少関数であり，$F_k(R_1)=-H_4'(R_1)+(1+\partial)C_1>C_1$.

$$F_k(\bar{x}_k)=r_1+(1-\frac{t_0}{t})p-\frac{t_0}{t}h-[r_2+(1-\frac{t_0}{t})h]\Phi(\bar{x}_k-R_1)-(C_2-r_2)\Phi(\bar{x}_k)-[r_1+(1-\frac{t_0}{t})p-C_2]\Phi(\bar{x}_k+R_2)$$
$$-\partial\int_0^\infty f'(\bar{x}_k-b)\phi(b)db$$
$$=C_1+\partial\int_0^\infty[f_{k-1}'(\bar{x}_k-b)-f_k'(\bar{x}_k-b)]\phi(b)db$$
$$\geqq C_1=F_k(\bar{x}_{k+1})$$

であるから，$\bar{x}_k\leqq\bar{x}_{k+1}$ をうる。

$x\leqq\bar{x}_k$ のとき，$f_k'(x)=f_{k+1}'(x)=-C_1>-[r_1+(1-\frac{t_0}{t})p-\frac{t_0}{t}h]$　$\bar{x}_k<x\leqq\bar{x}_{k+1}$ のとき，$f_{k+1}'(x)=-C_1$，$f_k'(x)\geqq-C_1$ よって $-[r_1+(1-\frac{t_0}{t})p-\frac{t_0}{t}h]<f_{k+1}'(x)\leqq f_k'(x)$
$(x\leqq\bar{x}_{k+1})$

$x>\bar{x}_{k+1}$ のとき

$$f_{k+1}'(x)-f_k'(x)=\partial\int_0^\infty[f_k'(x-b)-f_{k-1}'(x-b)]\phi(b)db$$
$$=\partial\int_0^{x-\bar{x}_k}[f_k'(x-b)-f_{k-1}'(x-b)]\phi(b)db+\partial\int_{x-\bar{x}_k}^\infty[f_k'(x-b)-f_{k-1}'(x-b)]\phi(b)db$$
$$\leqq\partial\int_0^{x-\bar{x}_k}\partial^{k-1}h\phi(b)db+0=\partial^k h\Phi(x-\bar{x}_k)<\partial^k h$$

$-[r_1+(1-\frac{t_0}{t})p-\frac{t_0}{t}h]<-C_1\leqq f_{k+1}'(x)$ であるから $n=k+1$ のとき成立する。
[証終]

文献

[1] 児玉正憲：「確率的在庫モデル最適政策(I)，(II)」経済学研究 Vol.52，No.1～4.5　九州大学経済学会　1986.

[2] ———— : 「動的在庫モデルの最適政策(I), (II) 連続編」 経済学研究 Vol.53, No.4~6 九州大学経済学会 1987.

[3] 祖捄三十六, 有薗育生, 太田宏 : 「返却および追加注文を許す一期間モデルの解法」 日本経営工学会誌 Vol.37, No.2, 1986