

Asymptotic Normality of Nonparametric
Sequential Density Estimators

新潟大・理 磯貝 英一 (Eiichi Isogai)

§ 1. 序

X_1, X_2, \dots は, ある確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) で定義された独立で同一分布に従う p 次元確率変数列で, 確率密度関数 $f(x)$ ($f(x)$ の形は未知である) を持つとする。また, $N(t)$ ($t > 0$) は (Ω, \mathcal{F}, P) 上で定義された正の整数値をとる確率変数 (停止規則) の族とする。kernel を用いた $f(x)$ の推定量として, いくつか提案されている。non-recursive estimators として, Parzen-Rosenblatt type [10], [12], recursive estimators として, Wolverton-Wagner-Yamato type [17] の推定量が考えられている。recursive estimators として, そのほかに Wegman and Davies [16], Isogai [6] などがある。大量のデータを扱う場合, データが追加されたとき recursive estimators は non-recursive estimators に比べて, 推定量をもとめるのに手間が省けるといふ利点を持つ。

一方, 標本の大きさが確率的である場合がある。たとえば, つぎの間

題を考えてみる。確率変数 X はある製品が壊れるまでの時間を表すとし、分布関数 $F(x)$ 、確率密度関数 $f(x)$ を持つとする。いま、0 から t 時間内に対する reliability $R^*(x)=1 - F^*(x)$ 、hazard rate $Z^*(x)=f^*(x)/(1 - F^*(x))$ を推定したい。ただし、 $F^*(x)=F(x)/F(t)$ 、 $f^*(x)=f(x)/F(t)$ ($0 \leq x \leq t$)。 n を検査する製品の数、 $N(t)$ を t 時間内に壊れた製品の数としたとき、 $X_1, \dots, X_{N(t)}$ に基づいて $R^*(x)$ 、 $Z^*(x)$ を推定する。 $R_n(x)$ 、 $Z_n(x)$ を大きさ n の標本による $R(x)$ 、 $Z(x)$ の推定量とすると、たとえば、sequential estimators として $R^*_{N(t)}(x)$ 、 $Z^*_{N(t)}(x)$ が考えられる。このとき、 $R^*_{N(t)}(x)$ 、 $Z^*_{N(t)}(x)$ の統計的性質を調べるのが問題になる。このように、 $f(x)$ の推定においても sequential estimators $f_{N(t)}(x)$ を考えなければならないことがある。sequential estimators を扱ったものに、Srivastava [14], Davies and Wegman [4], Carroll [2], Wegman and Davies [16], Isogai [7] and [9], Stute [15] などがある。Density estimation に関しては、Prakasa Rao [11], Devroye and Györfi [5] などにまとめられている。

本報告では、次の sequential estimators $f_{N(t)}(x)$ を考え、 $N(t)$ についての一般的な条件の下で $t \rightarrow \infty$ として $f_{N(t)}(x)$ の漸近正規性を示す。

$$(1.1) \quad f_{N(t)}(x) = \sum_{j=1}^{N(t)} a_j \beta_{jN(t)} K_j(x, X_j) + \beta_{0N(t)} K(x),$$

$$(1.2) \quad K_n(x, y) = h_n^{-p} K((x-y)/h_n) \quad \text{for } x, y \in \mathbb{R}^p,$$

ここに、 $K(x)$ は R^p 上で有界かつ可積分な実数値ボレル関数であり、 $\{h_n\}$ は 0 に収束する、非増加な正数列である。また、

$$(1.3) \quad a_n = a/n \quad \text{for any fixed } a \in (0, 1]$$

$$(1.4) \quad \beta_{mn} = \begin{cases} \prod_{j=m+1}^n (1-a_j) & \text{if } n > m \geq 0 \\ 1 & \text{if } n = m \geq 0. \end{cases}$$

$a=1$ のとき、 $f_n(x)$ は Wolverton-Wagner-Yamato type になる。

§ 2. 主結果

§ 1 における関数 $K(x)$ は次の条件を満たすとする。

条件K

$$\int_{R^p} K(u) du = 1, \quad \int_{R^p} \|u\|^2 |K(u)| du < \infty,$$

$$\int_{R^p} u_i K(u) du = 0 \quad \text{for } i=1, \dots, p \text{ with } u=(u_1, \dots, u_p) \quad \text{and}$$

$$\|u\|^p |K(u)| \rightarrow 0 \quad \text{as } \|u\| \rightarrow \infty,$$

ここに、 $\|\cdot\|$ は R^p 上のユークリッドノルムを表す。

§ 1 における $\{h_n\}$ は次の条件を満たすとする。

条件H

$a \in (0, 1]$ を任意に 1 つ固定する。

$$(H1) \quad nh_n^p \uparrow \infty \quad \text{as } n \rightarrow \infty,$$

$$(H2) \quad n^{1-2a} h_n^p \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty,$$

$$(H3) \quad n^{1-2a} h_n^p \sum_{j=1}^n j^{2(a-1)} h_j^{-p} \rightarrow \beta \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad \text{for some constant } \beta > 0,$$

$$(H4) \quad n^{3/2-3a} h_n^{3p/2} \sum_{j=1}^n j^{3(a-1)} h_j^{-2p} \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty,$$

$$(H5) \quad (n^{1-2a} h_n^p)^{1/2} \sum_{j=1}^n j^{a-1} h_j^2 \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty,$$

(H6) For any $\varepsilon > 0$ there exists a positive constant $\delta = \delta(\varepsilon)$ such

that $|n/m - 1| < \delta$ implies $|h_n/h_m - 1| < \varepsilon$.

条件Kおよび条件Hを満たす例

$x = (x_1, \dots, x_n)$ とする。

$$K(x) = \begin{cases} 2^{-p} & \text{if } |x_i| \leq 1 \text{ for all } i=1, \dots, p \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$K(x) = (2\pi)^{-p/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^p x_j^2\right)$$

$$K(x) = 2^{-p} \exp\left(-\sum_{j=1}^p |x_j|\right)$$

$$h_n = n^{-r/p}, \quad \max\{p/(p+4), 1-2a\} < r < 1$$

このとき, $\beta = (2a+r-1)^{-1}$ となる。

つぎに, f と $N(t)$ に関連する定義を与える。

定義1 g は R^p 上の実数値関数とする。次の条件を満たすとき, g はクラス \mathcal{M}_p に属するという:

すべての $i, j=1, \dots, p$ に対して, R^p 上で有界かつ連続な2回偏導関数 $\partial^2 g(x) / \partial x_i \partial x_j$ が存在する。

定義2 正の整数値をとる確率変数の族 $\{N(t), t > 0\}$ が次を満たすとき, 条件A を満たすという:

確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) 上の正值確率変数 θ (即ち, $P\{\theta > 0\} = 1$) と, $\tau(t) \rightarrow \infty$ as $t \rightarrow \infty$ なる正数の族 $\{\tau(t) \mid t > 0\}$ が存在して

$$N(t)/\tau(t) \xrightarrow{P} \theta \text{ as } t \rightarrow \infty \text{ (in probability)}$$

が成り立つ。

註1 Srivastava [14], Carroll [2], Isogai [9], Stute [15] では $\theta = c$ ($c > 0$ は定数) の場合を考えている。Isogai [8], [9] では θ が正の値をとる離散型確率変数の場合を扱っている, すなわち, $\sum_k P\{\theta = 1_k\} = 1$ を満たす正数数列 $\{1_k, k=1, 2, \dots\}$ (k は有限でも無限でもよい) が存在する。

さて, 定理を与える。

定理 f はクラス \mathcal{M}_p に属するとする。もし $N(t)$ が条件Aを満たすならば、 $f(x) > 0$ となる各 x に対して

$$(N(t)h_{N(t)}^p)^{1/2} (f_{N(t)}(x) - f(x)) \xrightarrow{L} N(0, \sigma^2(x)) \text{ as } t \rightarrow \infty \text{ (in law)}$$

が成り立つ。ただし、

$$\sigma^2(x) = a^2 \beta f(x) \int_{R^p} K^2(u) du.$$

註2 Isogai [8], [9] では θ が正の値をとる離散型確率変数の場合、この定理は成立することが証明された。

この定理の1つの応用として $f(x)$ の信頼区間を求める。 $\{d(t), t > 0\}$ は $\lim_{t \rightarrow \infty} d(t) = 0$ を満たす正数の族とし、区間の幅が $2d$ の区間

$$I_{n,t}(x) = [f_n(x) - d(t), f_n(x) + d(t)]$$

を考える。 $\alpha \in (0, 1)$ を固定し、 $D > 0$ は $\Phi(D) - \Phi(-D) = 1 - \alpha$ を満たすとする、ただし、 Φ は $N(0, 1)$ の分布関数である。

系 f はクラス \mathcal{M}_p に属し、 $N(t)$ は条件Aを満たすとする。もし

$$d^2(t) [\tau(t)\theta] h_{[\tau(t)\theta]}^p \xrightarrow{P} \sigma^2(x) D^2 \text{ as } t \rightarrow \infty$$

ならば

$$P\{f(x) \in I_{N(t),t}(x)\} \rightarrow 1 - \alpha \text{ as } t \rightarrow \infty$$

が成り立つ。

(証明) 条件Aと(H6)より

$$N(t)h_{N(t)}^p / [\tau(t)\theta]h_{[\tau(t)\theta]}^p \rightarrow 1 \text{ as } t \rightarrow \infty$$

よって, 仮定と定理より

$$\begin{aligned} D(f_{N(t)}(x) - f(x)) / d(t) &= \sigma(x)D / (d(t) ([\tau(t)\theta]h_{[\tau(t)\theta]}^p)^{1/2}) \\ &\times ([\tau(t)\theta]h_{[\tau(t)\theta]}^p / N(t)h_{N(t)}^p)^{1/2} \times (N(t)h_{N(t)}^p)^{1/2} (f_{N(t)}(x) - f(x)) / \sigma(x) \\ &\rightarrow N(0,1) \text{ as } t \rightarrow \infty \text{ (in law).} \\ &\quad \text{L} \end{aligned}$$

従って,

$$P\{f(x) \in I_{N(t), t}(x)\} = P\{D |f_{N(t)}(x) - f(x)| / d(t) \leq D\} \rightarrow 1 - \alpha \text{ as } t \rightarrow \infty.$$

(証終)

§ 3. 停止規則の具体例

$f_n(x)$ を $f(x)$ の kernel を用いた推定量とする。この章ではこれまでに提案されている停止規則を与え, いくつかの結果を列挙する。

1. Carroll [2], Isogai [7]:

各 $d > 0$ に対して

$$N(d) = \text{the first } n \geq n_0 \text{ such that } nh_n^p \geq (b/d)^2 f_n(x)$$

ただし, b はある正の定数, n_0 は与えられた正の整数である
で $N(d)$ を定義する。このとき,

$$N(d) h_{N(d)}^p / [(b/d)^2 f(x)] \rightarrow 1 \quad \text{a.s. as } d \rightarrow 0$$

$$E[N(d) h_{N(d)}^p] / [(b/d)^2 f(x)] \rightarrow 1 \quad \text{as } d \rightarrow 0$$

$$\lim_{d \rightarrow 0} P\{f(x) \in I_{N(d), d}(x)\} = 1 - \alpha, \quad I_{N(d), d}(x) \equiv [f_{N(d)}(x) - d, f_{N(d)}(x) + d]$$

$$f_{N(d)}(x) \rightarrow f(x) \quad \text{a.s. as } d \rightarrow 0$$

が成り立つ。

特に, $h_n = n^{-r/p}$ ($\max\{p/(p+4), 1-2a\} < r < 1$) として,

$$N(d) / \{(b/d)^2 f(x)\}^{1/(1-r)} \rightarrow 1 \quad \text{a.s. as } d \rightarrow 0.$$

$\tau(d) = \{(b/d)^2 f(x)\}^{1/(1-r)}$, $\theta \equiv 1$ とおくと, 条件Aが満たされる。

2. Sen and Ghosh [13], Stute [15]:

$L_n < U_n$ a.s. となる d に無関係な統計量を見つけて,

$$N(d) = \text{the first } n \geq n_0 \text{ such that } U_n - L_n \leq 2d$$

で $N(d)$ を定義し, $I_{N(d)} \equiv [L_{N(d)}, U_{N(d)}]$ とおく。

Sen and Ghosh [13]:

$\tau(d) = (b/d)^2$, $b > 0$ はある定数, $\theta \equiv 1$ とおくと, 条件Aが満たされる。

Stute [15]:

$$I_n = [f_n(x - \Lambda_n) - \mu_n(nh_n)^{-1/2}, f_n(x + \Lambda_n) - \mu_n(nh_n)^{-1/2}]$$

$N(d)$ = the first $n \geq 1$ such that the length of $I_n \leq 2d$

で $N(d)$ を定義し, $\tau(d) \equiv b/d^{5/2}$, $\theta \equiv 1$ ($b > 0$ はある定数) とおくと, 条件 A が満たされる。

3. その他

Davies and Wegman [4]:

M は与えられた正の整数で, 任意の $\varepsilon > 0$ を与える。

$N(\varepsilon, M)$ = the first $n \geq 1$ such that $|V_n(x)| < \varepsilon$

で $N(\varepsilon, M)$ を定義する、ただし、

$$V_n(x) = f_{nM}(x) - f_{(n-1)M}(x).$$

このとき、

$$P\{N(\varepsilon, M) < \infty\} = 1, \quad E[N^r(\varepsilon, M)] < \infty \text{ for every } r \geq 0$$

$$f_{N(\varepsilon, M)}(x) \rightarrow f(x) \text{ a.s. as } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Wegman and Davies [16]:

$\varepsilon > 0$ を任意に与える。

$N(\varepsilon)$ = the first $n \geq 1$ such that $h_n^{-1} K((x - X_n)/h_n) < \varepsilon$

で $N(\varepsilon)$ を定義する。このとき、

$$P\{N(\varepsilon) < \infty\} = 1, \quad E[N^k(\varepsilon)] < \infty \text{ for every } k \geq 0$$

$$f_{N(\varepsilon)}(x) \rightarrow f(x) \text{ a.s. as } \varepsilon \rightarrow 0.$$

§ 4. 定理の証明

この章では、ある程度簡略して定理の証明をする。また、この章全体を通して定理のすべての条件が満たされるとする。[b] は b を越えない最大の整数を表すとし、特記しない限り $N(t), \tau(t)$ の t を省略する。さらに、任意の x を固定する。

$$(4.1) \quad Z_n = K_n(x, X_n) - EK_n(x, X_n), \quad \delta_n = EK_n(x, X_n) - f(x) \quad \text{and}$$

$$S_n = \sum_{j=1}^n a_j \beta_{jn} \{K_j(x, X_j) - f(x)\}, \quad V_n = (nh_n^p)^{1/2} S_n \quad \text{for } n \geq 1$$

とおく。また

$$\gamma_1 = 1 \quad \text{and} \quad \gamma_n = \sum_{j=2}^n (1 - a_j) \quad \text{for } n \geq 2,$$

とおくと、

$$\beta_{mn} = \gamma_n \gamma_m^{-1} \quad \text{for } n \geq m \geq 1.$$

明らかに

$$(4.2) \quad (Nh_N^p)^{1/2} (f_N(x) - f(x)) = V_N + (Nh_N^p)^{1/2} \beta_{0N} (K(x) - f(x)) \quad \text{for } t > 0.$$

ここで、次の補題を示す。

補題 定理の条件の下で

$$(N(t)h_{N(t)}^p)^{1/2} (S_{N(t)} - S_{[t\tau(t)]}) \xrightarrow{P} 0 \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

が成り立つ。

(証明) 任意に $\varepsilon, \eta \in (0, 1)$ を固定する。 C と c は ε と η に関係しない、

それぞれ、十分大きな、十分小さな正の定数とし、以下ではすべて定数は C と c で表す。 Φ を標準正規分布の分布関数として、

$1-\Phi(G)+\Phi(-G) < c\eta$ を満たす正定数 G を選ぶ。 θ は正值をとるから、次を満たす整数 $m \geq 1$ と $\rho \in (0, 1/2)$ が選べる。

$$(4.3) \quad P\{\theta < (m-1)/2^m\} + P\{\theta \geq m\} < \eta/4 \quad \text{and} \quad m > \max(C\varepsilon^{-2}\eta^{-1}, CG\varepsilon^{-1})$$

$$(4.4) \quad 0 < \rho < \min(c\varepsilon^2\eta, C^{-1}G^{-1}\varepsilon).$$

事象 A_{km} を $A_{km} = \{(k-1)/2^m \leq \theta < k/2^m\}$ for $m \leq k \leq m2^m$ で表す。条件Aより

$$(4.5) \quad P\{|N - [\theta\tau]| \geq \rho[\theta\tau]\} < \eta/4 \quad \text{for large } t.$$

(4.3)と(4.5)より十分大きな t に対して

$$(4.6) \quad P\{\sqrt{Nh_N^p} |S_N - S_{[\theta\tau]}| > \varepsilon\} \\ \leq \sum_{k=m}^{m2^m} P\{\sqrt{Nh_N^p} |S_N - S_{[\theta\tau]}| > \varepsilon, |N - [\theta\tau]| < \rho[\theta\tau], A_{km}\} + \eta/2.$$

任意の $k=m, \dots, m2^m$ を固定し、

$$(4.7) \quad n_1 = n_1(t) = [(k-1)\tau/2^m], \quad n_2 = n_2(t) = [k\tau/2^m], \\ m_1 = m_1(t) = [(1-\rho)n_1], \quad m_2 = m_2(t) = [(1+\rho)n_2]$$

とおく。(4.7)より

$$(4.8) \quad I_k(t) \equiv P\{\sqrt{Nh_N^p} |S_N - S_{[\theta\tau]}| > \varepsilon, |N - [\theta\tau]| < \rho[\theta\tau], A_{km}\} \\ \leq P(A_{km}) [P\{\sqrt{ih_i^p} |S_i - S_j| > \varepsilon \text{ for some } m_1 \leq i < n_1 \text{ and some } n_1 \leq j \leq n_2 | A_{km}\}]$$

$$\begin{aligned}
& + P\{\sqrt{ih_1^p} |S_i - S_j| > \varepsilon \text{ for some } n_1 \leq i, j \leq n_2 \mid A_{km}\} \\
& + P\{\sqrt{ih_1^p} |S_i - S_j| > \varepsilon \text{ for some } n_2 < i \leq m_2 \text{ and some } n_1 \leq j \leq n_2 \mid A_{km}\}
\end{aligned}$$

$$\equiv P(A_{km}) (J_1 + J_2 + J_3), \text{ say.}$$

はじめに, J_1 を評価する。 nh_n^p の単調性を用いると,

$$\begin{aligned}
(4.9) \quad J_1 & \leq P\{\sqrt{n_1 h_{n_1}^p} \max_{m_1 < i \leq n_1} |S_i - S_{m_1}| > \varepsilon/3 \mid A_{km}\} \\
& + P\{\sqrt{n_2 h_{n_2}^p} \max_{n_1 < j \leq n_2} |S_j - S_{n_1}| > \varepsilon/3 \mid A_{km}\} \\
& \equiv J_{11} + J_{12}, \text{ say.}
\end{aligned}$$

(4.1), γ_n の単調性から $i > j$ に対して

$$\begin{aligned}
(4.10) \quad |S_i - S_j| & \leq (\gamma_j - \gamma_i) \left| \sum_{q=1}^i a_q \gamma_q^{-1} z_q \right| + \gamma_i \left| \sum_{q=j+1}^i a_q \gamma_q^{-1} z_q \right| \\
& + \left| \sum_{q=1}^i a_q \beta_{qi} \delta_q \right| + \left| \sum_{q=1}^j a_q \beta_{qj} \delta_q \right|.
\end{aligned}$$

Isogai [9] の(A.9)と同様にして,

$$\sqrt{n_1 h_{n_1}^p} \max_{m_1 \leq i \leq n_1} \left| \sum_{q=1}^i a_q \beta_{qi} \delta_q \right| < \varepsilon/4 \quad \text{for large } t.$$

よって, (4.10)より, 十分大きな t に対して

$$(4.11) \quad J_{11} \leq P\{\sqrt{n_1 h_{n_1}^p} (\gamma_{m_1} - \gamma_{n_1}) \left| \sum_{q=1}^{m_1} a_q \gamma_q^{-1} z_q \right| > \varepsilon/4 \mid A_{km}\}$$

$$\begin{aligned}
& + P\left\{\sqrt{n_1 h_{n_1}^p} \max_{m_1 < i \leq n_1} \gamma_i \left| \sum_{q=m_1+1}^i a_q \gamma_q^{-1} Z_q \right| > \varepsilon/4 \mid A_{km}\right\} \\
& \equiv J_{111} + J_{112}, \text{ say.}
\end{aligned}$$

Blum, Hanson and Rosenblatt [1] の Lemma 3 から

$$(4.12) \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} J_{112} = \limsup_{t \rightarrow \infty} P\left\{\sqrt{n_1 h_{n_1}^p} \max_{m_1 < i \leq n_1} \gamma_i \left| \sum_{q=m_1+1}^i a_q \gamma_q^{-1} Z_q \right| > \varepsilon/4\right\}.$$

Isogai [9] の(A.17)の不等式および(4.4)を用いると,

(4.12)の右辺 $< 4c\varepsilon^{-2}\rho$. 従って, (4.4)より

$$(4.13) \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} J_{112} < c\eta.$$

ここで

$$U_n = a_n \gamma_n^{-1} Z_n, \quad W_n = \sum_{q=1}^n U_q \quad \text{and} \quad w_n^2 = \sum_{q=1}^n a_q^2 \gamma_q^{-2} E Z_q^2$$

とおく。Isogai [9]の(2.5)および(2.6)で次のことが示された。

$$(4.14) \quad w_n^2 \sim \sigma^2(x) (n h_n^p \gamma_n^2)^{-1} \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad \text{and}$$

$$(4.15) \quad W_n / w_n \xrightarrow{L} N(0, 1) \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

(4.14), h_n の単調性により

$$\sqrt{n_1 h_{n_1}^p} (\gamma_{m_1} - \gamma_{n_1}) w_{m_1} \leq c\rho \quad \text{for all } t > 0.$$

従って, Isogai [9] の Lemma 2.5, (4.4), (4.15)から $\limsup_{t \rightarrow \infty} J_{111} < c\eta$.

この不等式と(4.11), (4.13)より

$$(4.16) \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} J_{11} < c\eta.$$

(4.16)と同様にして

$$(4.17) \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} J_{12} < c\eta.$$

故に, (4.9), (4.16), (4.17)から

$$(4.18) \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} J_1 < c\eta.$$

(4.18)と同様にして

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} J_2 < c\eta \quad \text{and} \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} J_3 < c\eta$$

が得られる。よって、この結果と(4.6), (4.8), (4.18)を用いると

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} P\{\sqrt{Nh_N^p} |S_N - S_{[\theta\tau]}| > \varepsilon\} \leq c\eta \sum_{k=m}^{m^2} P(A_{km}) + \eta/2 \leq c\eta + \eta/2 < \eta$$

が成り立つ。 $\eta \rightarrow 0$ として補題が得られる。

(証終)

さて、定理の証明をする。明らかに

$$(4.19) \quad V_N = V_{[\theta\tau]} + \sqrt{Nh_N^p} (S_N - S_{[\theta\tau]}) + V_{[\theta\tau]} \{ (Nh_N^p / [\theta\tau] h_{[\theta\tau]}^p)^{1/2} - 1 \}.$$

条件Aを用いると, $\sqrt{Nh_N^p} \beta_{0N} \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$ かつ

$Nh_N^p / [\theta\tau] h_{[\theta\tau]}^p \rightarrow 1$ as $t \rightarrow \infty$ が成立する。従って、もし

$$(4.20) \quad V_{[\theta\tau]} \xrightarrow{L} N(0, \sigma^2(x)) \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

が示されれば, (4.2), (4.19), 補題より定理が成立する。以下で(4.20)を示す。

F を $N(0, \sigma^2(x))$ の分布関数とする。(4.20)を示すには

$$(4.21) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P\{V_{[\theta\tau]} \leq y\} = F(y) \quad \text{for any } y$$

を示せばよい。任意の $\eta > 0$ を与える。任意の y と, η に関係しない十分小さい正定数 c を固定する。 $1 - F(G) + F(-G) < c\eta$ を満たす $G > 0$ を選ぶ。

また, $P\{\theta < (m-1)/2^m\} + P\{\theta \geq m\} < c\eta$ を満たす十分大きな整数

$m > 1$ と, $|F(y+i\varepsilon) - F(y)| < \eta/4$ for $i = \pm 1$ を満たす $\varepsilon > 0$ を選ぶ。

$I(A)$ を集合 A の定義関数とし,
$$\mu_m = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^m} I((k-1)/2^m \leq \theta < k/2^m)$$

とおく。このとき, μ_m は正の値をとる離散型確率変数である。従って,

Isogai [9] の(3.4)から

$$(4.22) \quad V_{[\mu_m\tau]} \xrightarrow{L} N(0, \sigma^2(x)) \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

が得られる。よって, Blum, Hanson and Rosenblatt [1] のLemma 1, (4.22)を用いると,

$$(4.23) \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} |P\{V_{[\theta\tau]} \leq y\} - F(y)| \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} P\{|V_{[\theta\tau]} - V_{[\mu_m\tau]}| > \varepsilon\} + \eta/2$$

が成立する。(4.19)と同じ関係式を用いると,

$$(4.24) \quad P\{|V_{[\theta\tau]} - V_{[\mu_m\tau]}| > \varepsilon\} \leq P\{(([\theta\tau]h_{[\theta\tau]}^p)^{1/2} |S_{[\theta\tau]} - S_{[\mu_m\tau]}| > \varepsilon/2\} \\ + P\{|(([\theta\tau]h_{[\theta\tau]}^p / [\mu_m\tau]h_{[\mu_m\tau]}^p)^{1/2} - 1)V_{[\mu_m\tau]}| > \varepsilon/2\}$$

$$\equiv I_1 + I_2, \text{ say.}$$

(4.16)と同様の議論により, 十分大きな t に対して

$$(4.25) \quad I_1 < c\eta$$

が得られる。一方, (4.22), (H6)などを用いて議論すると, 十分大きな t に対して

$$(4.26) \quad I_2 < c\eta$$

がわかる。従って, (4.23), (4.24), (4.25), (4.26) より(4.21)が成立する。

(証終)

参考文献

- [1] Blum, J.R., Hanson, D.L., and Rosenblatt, J.I. (1963). On the central limit theorem for the sum of a random number of independent random variables. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 1, 389-393.
- [2] Carroll, R.J. (1976). On sequential density estimation. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 36, 137-151.
- [3] Chow, Y.S. and Robbins, H. (1965). On the asymptotic theory of fixed-width sequential confidence intervals for the mean. *Ann. Math. Statist.* 36, 457-462.
- [4] Davies, H.I. and Wegman, E.J. (1975). Sequential nonparametric density estimation. *IEEE Trans. Inform. Theory* IT-21, 619-628.
- [5] Devroye, L. and Györfi, L. (1985). *Nonparametric Density Estimation: The L_1 View*. Wiley, New York.
- [6] Isogai, E. (1980). Strong consistency and optimality of a sequential

- density estimator. *Bull. Math. Statist.* 19, 55-69.
- [7] Isogai, E. (1981). Stopping rules for sequential density estimation. *Bull. Math. Statist.* 19, 53-67.
- [8] Isogai, E. (1985). 逐次手法における停止時間について。 京都大学数理解析研究所講究録 557, 203-221.
- [9] Isogai, E. (1987). On the asymptotic normality for nonparametric sequential density estimation. *Bull. Inform. Cybernetics*, 22, 215-224.
- [10] Parzen, E. (1962). On estimation of a probability density function and mode. *Ann. Math. Statist.* 33, 1065-1076.
- [11] Prakasa Rao, B. L. S. (1983). *Nonparametric Functional Estimation.* Academic Press.
- [12] Rosenblatt, M. (1956). Remarks on some nonparametric estimates of a density function. *Ann. Math. Statist.* 27, 832-837.
- [13] Sen, P.K. and Ghosh, M. (1971). On bounded length sequential confidence intervals based on one-sample rank order statistics. *Ann. Math. Statist.* 42, 189-203.
- [14] Srivastava, R.C. (1973). Estimation of probability density function based on random number of observations with applications. *Internat. Statist.Rev.* 41, 77-86.
- [15] Stute, W. (1983). Sequential fixed-width confidence intervals for a nonparametric density function. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 62, 113-123.
- [16] Wegman, E.J. and Davies, H.I. (1979). Remarks on some recursive estimators of a probability density. *Ann. Statist.* 7, 316-327.
- [17] Yamato, H. (1971). Sequential estimation of a continuous probability density function and mode. *Bull. Math. Statist.* 14, 1-12.