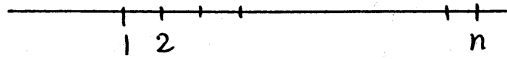


Current Status of Chiral Potts Models

B. M. McCoy (SUNY, Stony Brook)

統計物理の新しいモデルは幾何の問題を提起する。一次元 chain



の場合, N degrees に対してハミルトニアン of exact な形が知られている:

$$H = - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{N-1} \{ \bar{\alpha}_k (X_j)^k + \alpha_k (Z_j Z_{j+1}^T)^k \}$$

ここに

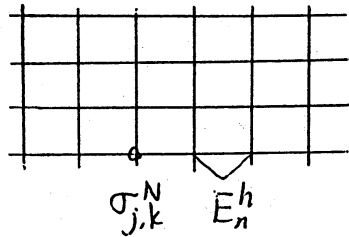
$$X_j = I_N \otimes \dots \otimes X \otimes \dots \otimes I_N,$$

X, Z は $N \times N$ 行列であり,

$$Z_{\ell,m} = \delta_{\ell,m} \omega^{\ell-1}, \quad \omega = e^{2\pi i/N}$$

$$X_{\ell,m} = \delta_{\ell,m+1} \text{ mod } N, \quad XZ = \omega ZX$$

次に二次元格子の相互作用のモデルを考える:



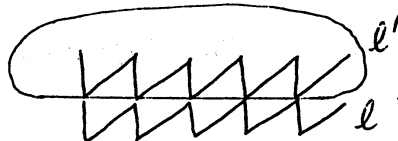
classical interaction は

$$\epsilon = - \sum_{j,k} \sum_{n=1}^{N-1} \{ E_n^h (\sigma_{j,k} \sigma_{j,k+1}^*)^n + E_n^v (\sigma_{j,k} \sigma_{j+1,k}^*)^n \}$$

求めるものはこれを $\epsilon = \epsilon(\sigma)$ としたときの分配函数

$$Z = \sum_{(\sigma)} \exp\left(-\frac{\epsilon}{kT}\right)$$

である。いま格子を



のように書き, 長さ L の添え字 ℓ, ℓ' に対して $N^L \times N^L$ 行列 T の成分を

$$T_{(\ell),(\ell')} = \prod W^v(\ell_j, \ell_{j'}) \cdot W^h(\ell_j - \ell_{j+1}')$$

で定めると、 $\sigma = \omega^\ell$ のときは

$$Z = \text{Tr} T^n$$

という量の

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln Z$$

を計算すればよい。[$T(u), T(u')$] = 0 という条件の下で

$$\frac{W^h(n)}{W^h(0)} = \prod_{j=1}^n \left(\frac{d_p b_q - a_p c_q \omega^j}{b_p d_q - c_p a_q \omega^j} \right)$$

$$\frac{W^v(n)}{W^v(0)} = \prod_{j=1}^n \left(\frac{\omega a_p d_q - d_p a_q \omega^j}{c_p b_q - b_p c_q \omega^j} \right)$$

$$a^{N+k'} b^N = k d^N,$$

$$k' a^N + b^N = k c^N$$

$$k'^2 + k^2 = 1$$

$$[T_{p,q}, T_{p,q'}] = 0$$

$q \rightarrow p$ のとき

$$a_q = a_p + p a, \quad T_{p,q} \rightarrow I \text{const} + u H, \quad [H, T_{p,q}] = 0$$

よって Hamiltonian の係数として

$$\alpha_n = \exp(i k \Lambda - N) \varphi / N / \sin(\pi n / N)$$

$$\bar{\alpha}_n = k \exp(i(2\Lambda - N) \bar{\varphi} / N) / \sin(\pi n / N)$$

$$\cos \varphi = k' \cos \bar{\varphi}$$

これが chiral Potts model の定義である。

$N = 2 \Rightarrow$ Ising model に帰着する。

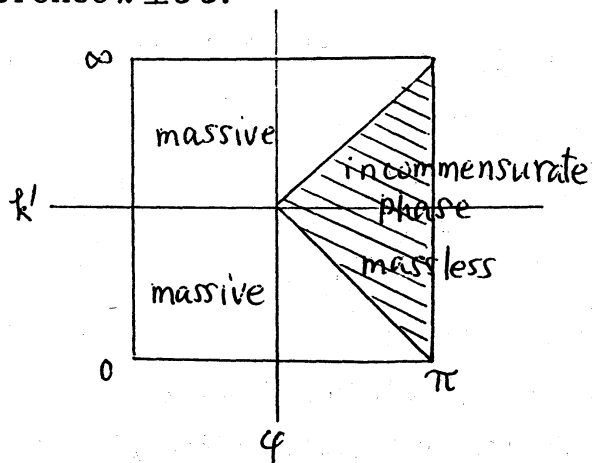
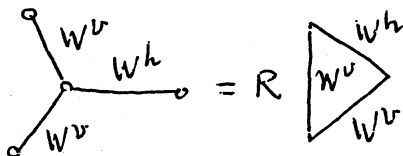
$N = 3$ になると enormous difference が生じる。

$\varphi = \bar{\varphi}$ として

$$\langle X_j \rangle = (1 - k'^2)^{1/2}$$

$$\langle X_0, X_j \rangle = \frac{e^{-|j|m}}{|j|} \frac{e^{i(j)\theta}}{|j|^{N(j)}}$$

Star triangle equation:



$$R(a, b, c, d) = (b, wa, d, c)$$

$$T_{p,q} T_{p,Rq} T_{p,R^2q} = e^{-ip} \{ f_{p,Rq}^n f_{Rq,p}^n T_{p,q} + f_{p,q}^n f_{q,p}^n T_{p,R^2q} + f_{p,Rq}^n f_{R^2q,0}^n T_{p,Rdq} \}$$

$N=3$ のとき Riemann 面でパラメトライズされる.

super integrable case

$$\varphi = \bar{\varphi} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\left(\eta \frac{a}{b} \omega - 1 \right)^n \left(\eta \frac{a}{d} \omega^2 - 1 \right)^n$$

$$\eta = \left(\frac{1+k'}{1-k'} \right)^{1/\sigma}$$

$$T_{p,q} = \frac{1}{\left(\eta \frac{a}{d} \omega - 1 \right)^n \left(\eta \frac{a}{d} \omega^2 - 1 \right)^n} \left(\eta \frac{a}{d} \right)^{\rho a} \left(\frac{c^2}{d^N} \right)^{\rho_2}$$

$$\times \prod_{\ell=1}^{m_\rho} \left(\frac{1+\omega V_\ell \eta^2 ab/cd}{1+\omega V_d} \right) \prod_{\ell=1}^{m_\rho} \left(\frac{a^2+b^2}{2d^2} \pm \frac{\omega_2(a^2-b^2)}{(1+k')d^N} \right)$$

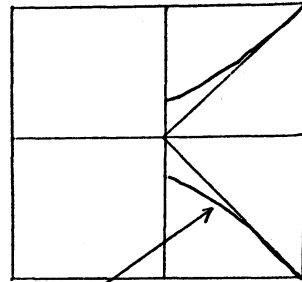
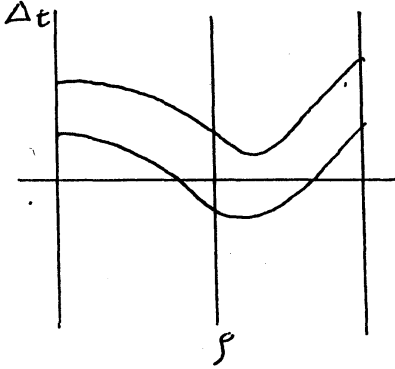
$m_\rho = 0$ とし

$$E_0 = -(1+k') \left\{ F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1, \frac{4k'}{(1+k')^2}\right) + F\left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4k'}{(1+k')^2}\right) \right\}$$

$k' = 1, m_\rho = 1$ のときのを $E(\rho, k)$ と書けば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ E(\rho, k) - E_0(k') \}$$

$$= \sigma(1-k') + \frac{3}{\pi} \int_0^1 dt \left(\frac{\omega V}{1+\omega t V} + \frac{\omega^2 V}{1+\omega^2 t V} \right) \left(\frac{4k'}{t^3-1} - (1-k')^2 \right)^{1/2}$$



ground state ceases to be ground state here

$$t = \frac{ab}{cd}, \quad t^N = \frac{(1-k'(\lambda+\lambda^{-1})+k'^2)}{k^2} \quad \text{hyper elliptic}$$

$$V(t, \lambda) V^{N-1}(\omega^j t, \lambda^{-1}) = \sigma_j(t, \lambda),$$

$$\sigma_j(t, \lambda) = \alpha(\lambda) \tau_j(t) + Z_j(t) \tau_{N,j}(\omega^j t),$$

$$\alpha(\lambda) = \left(\frac{k'(1-\lambda_p \lambda_q)^2}{k^2 V_\rho^2} \lambda_q \right)^n$$

$$Z(t) = (t_\rho - t)^{2L},$$

$$Z_1(t) = Z(t) Z(\omega t) Z(\omega^{j+1} t),$$

$$\tau_2(t) \tau_2(\omega t) \tau_2(\omega^2 t) = Z(\omega^2 t) \tau_2(t) + Z(t) \tau_2(\omega t) + Z(\omega t) \tau_2(\omega^2 t) + \alpha(\lambda) + \alpha(\lambda^{-1})$$

$$\alpha(\lambda^{\pm 1}) = h^{\pm}(t)h^{\pm}(\omega t)h^{\pm}(\omega^2 t),$$

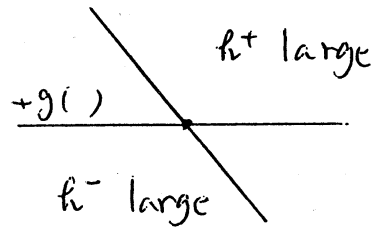
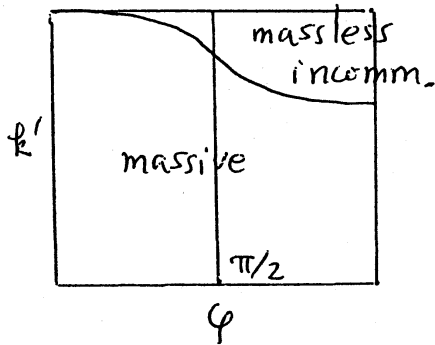
$$h^+(t)h^-(t) = Z(t)$$

$$h^+(t) = \left(\frac{t^{\rho} - t}{y\rho^2}\right)^n \exp \frac{n}{2\pi i} \int_{C_t} dt \frac{1}{t^{\rho} - t} h\left(\frac{1-\lambda', \lambda\rho}{1-\lambda', \lambda\rho}\right)$$

$$\tau_2(t) = h^+(t) \frac{f(\omega t)}{f(\omega^2 t)} + h^-(\omega t) \frac{f(t)}{f(\omega^2 t)}$$

$$f(t) = \prod_{\ell=1}^{m_p} (V_{\ell} t + 1), \quad n \rightarrow \infty.$$

これが函数方程式の解である。多項式になって欲しい。極は打ち消すようにできる。 V_{ℓ} の選び方に制限が付く。



参考文献

カイラル・ポッツ・モデル B. McCoy (三輪哲二訳) 数理科学 1990年 7月号
(同年 4月日本数学会岡山年会での講演)