数理解析研究所講究録
第750巻 1991年 52-57

Vector Valued Laplace Hyperfunctions

東大理　小松彦三郎

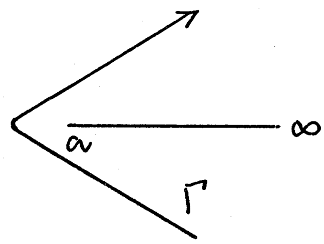
シンポジウムの題に反して Macro-global analysis without applications という話をしよう. Laplace hyperfunctions とは Laplace 変換ができるような global な hyperfunction のことを云う.

$$B^{\exp}_{[a,\infty]} := \mathcal{O}^{\exp}(D\setminus[a,\infty])/\mathcal{O}^{\exp}(D),$$

ここに $D=\mathbb{C}\cup S^1_\infty$ は方向コンパクト化であり, Laplace 変換 L は

$$f(x)=F(x+i0)-F(x-i0)$$

に対し

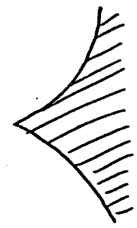


$$\hat{f}(\lambda) := \int_\Gamma e^{-\lambda z}F(z)\,dz$$

で定義される. 積分路は図参照.

$$L: B^{\exp}_{[a,\infty]} \cong LB^{\exp}_{[a,\infty]}$$
$$:= \{\hat{f}\in\mathcal{O}^{\exp}(\tfrac{1}{2}S^1_\infty)\,;\,\overline{\lim_{r\to 0}}\frac{\log|\hat{f}(re^{i\theta})|}{r}\leqq -a\cos\theta,\ |\forall\theta|<\tfrac{\pi}{2}\}$$

Convolution



$$*: B^{\exp}_{[a,\infty]}\times B^{\exp}_{[b,\infty]}\longrightarrow B^{\exp}_{[a+b,\infty]}$$

これは Laplace 変換で積に対応する.

局所化

$B^{\exp}_{[a,\infty]}$ は $[-\infty,\infty]$ 上の脆弱層 $B^{\exp}$ に局所化される. 畳み込みは

$$B_{[a,b)} = B^{\exp}_{[a,\infty]}/B^{\exp}_{[b,\infty]}$$

で定義された空間の上に well defined となる. 実際

$$*:\ B_{[a,a+c)}\times B_{[b,b+c)}\longrightarrow B_{[a+b,a+b+c)}$$

が代表元を用いて定まる.

多項式 multiplier は regularly solvable である. 即ち

$$\frac{1}{p(\lambda)}\in LB^{\exp}_{[-a,\infty]}$$

であり, これを用いて微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} p(d/dx)u(x)=f(x)\\ u^{(j)}(0)=g_j\end{cases}$$

の解が convolution equation

$$p*\overline{u} = \theta f + (a_{m-1}g_{m-1}+\cdots+a_1g_0)\delta(x)+\cdots+a_mg_0\delta^{(m-1)}(x)$$

の解 $\overline{u} = \theta u$ から得られる．この場合は Laplace 像の領域はそんなに一般なものを考える必要は無いが，vector valued にすると実際に必要となる．

A を linear operator とし $\exp(tA)$ の理論を考えると，

$$\begin{cases}(d/dx-A)u(x) = f(x)\\ u(0) = y\end{cases}$$

これは

$$\begin{cases}(d/dx-A)E(x) = \delta(x)\\ \mathrm{supp}E\subset[0,\infty)\end{cases}$$

という問題を解くことに対応し，$(\lambda-A)^{-1}$ の挙動を見ることが必要となる．よってきちんと調べておくのは意味がある．$\left(\left(\frac{d}{dt}\right)^2-A\right)$ も扱える．(c.f.Beals etc.)正則性も合わせてしらべよう．

$M_p>0, p=0,1,2,...$ を次の諸性質を満たす数列とする：

(M.0) $M_0=M_1=1$

(M.1) $M_p^2\leqq M_{p-1}M_{p+1}$

(M.2) $\dfrac{M_p}{M_qM_{p-q}}\leqq AB^p$，$0\leqq q\leqq p=0,1,2$

(M.3) $\displaystyle\sum_{q=p-1}^{\infty}\frac{M_{q-1}}{M_q}\leqq A_p\frac{M_p}{M_{p+1}}$

多くの場合

(M.2)′ $M_{p+1}\leqq AB^pM_p$

(M.3)′ $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}\frac{M_{p-1}}{M_p}<\infty$

で十分である．

$$D^{(M_p)}(\Omega) := \{\varphi\in D(\Omega);\forall h\exists C\ \sup_\alpha|\partial^\alpha\varphi(x)|\leqq Ch^{|\alpha|}M_{|\alpha|}\}$$

$$D^{\{M_p\}}(\Omega) := \{\varphi\in D(\Omega);\exists h\exists C\ \sup_\alpha|\partial^\alpha\varphi(x)|\leqq Ch^{|\alpha|}M_{|\alpha|}\}$$

また $*=\emptyset$ または (M_p) または $\{M_p\}$ に対し

$$D^{*\prime}(\Omega) := (D^*(\Omega))'$$

と置く．

Paley-Wiener theorem $f\in B_{[a,b]}$ が $\in D^{*\prime}_{[a,b]}$ $\Longleftrightarrow$

(i) $|\hat{f}(\lambda)|\leqq C\exp\{H_{[a',b']}(\lambda)+W(\lambda)\}$

ここに $H(\lambda)=\max\{-a'\mathrm{Re}\lambda,-b'\mathrm{Re}\lambda\}$，$[a',b']\supset[a,b]$

(ii) $\forall\varepsilon>0,\exists C_\varepsilon>0$ $|\hat{f}(\lambda)|\leqq C_\varepsilon\exp\{H_{[a,b]}(\lambda)+\varepsilon|\lambda|\}$

$W(\lambda)$ は Weight function であり

$$W(\lambda) = \sup_p\log\frac{|\lambda|^p}{H_pM_p}.$$

$$H_p = \begin{cases} h^p, \ \exists h>0, & *=(M_p) \text{ のとき} \\ h_1\cdots h_p, \ 0<h_j\uparrow\infty, & *=\{M_p\} \text{ のとき} \end{cases}$$

$M_p = p!^s$ のとき(Gevrey)は

$$W(\lambda) \sim \begin{cases} \left|\dfrac{|\lambda|}{ch}\right|^{1/s}, \\ o(|\lambda|^{1/s}) \end{cases}$$

distributionのとき($*=\emptyset$)は $-h\log|\lambda|$ となる.

注意 (M.2)と(M.3)があると Phragmén-Lindelöf と Heinz により $[a', b'] \Rightarrow [a, b]$ とできる.

simple proof D_K^* (または $E^*(\Omega)$) の連続セミノルムは

$$p_{H_pM_p}(\varphi) := \sup_{|\alpha|=p} \frac{|\partial^\alpha\varphi(x)|}{H_pM_p}$$

の定数倍で抑えられる. $*=(M_p)$ のときは $D_K^{(M_p)} = \varprojlim D_K^{H_pM_p}$ より自明. $*=\{M_p\}$ のときは dual Mittag-Leffler argument が必要.

$$|\hat{f}(\lambda)| \leq |\langle e^{-\lambda x}, f(x)\rangle| \leq p(e^{-\lambda x})$$

を評価する.

定理 もし $f \in B_{[a,\infty]}^{\exp}$ に対し $\hat{f}(\lambda)$ が領域

$$\Omega = \{\lambda\in C; \mathrm{Re}\lambda \geq {}^\exists W_1(\lambda) + \text{const.}\}$$

で存在し, $\forall\varepsilon>0$, $\exists W_\varepsilon$,

$$|\hat{f}(\lambda)| \leq C_\varepsilon \exp\{-(a-\varepsilon)\mathrm{Re}\lambda + W_\varepsilon(\lambda)\}$$

を満たせば, $f|_R \in D_{[a,\infty)}^{*\prime}$

証明 $F(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Lambda^\infty e^{\lambda z}\hat{f}(\lambda)d\lambda$ は定義函数の一つとなり

$$|F(x+iy)| \leq \frac{C}{2\pi}\int e^{x\mathrm{Re}\lambda - y\mathrm{Im}\lambda} e^{(-a+\varepsilon)\mathrm{Re}\lambda + W(\lambda)}|d\lambda|$$

ここで

$$\sup_{r>0}(x-a+\varepsilon)\mathrm{Re}\lambda - yr + W(r) = \sup\{{}^\exists W(r) - yr\} + \text{const.}$$

$$= \sup_{r,p}\log\frac{r^p}{H_pM_p} - yr \fallingdotseq \sup\log\frac{p!}{y^pH_pM_p} =: G(y)$$

これを growth function という.

定理 $F(z) \in O(V\setminus\Omega)$ に対し次は同値:

(a) $F(x+i0) - F(x-i0) \in D^{*\prime}(\Omega)$

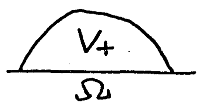
(b) $F(x+i\varepsilon) - F(x-i\varepsilon) \to \exists f \in D^{*\prime}(\Omega)$ in $D^{*\prime}(\Omega)$ as $\varepsilon\downarrow 0$

(c) $\forall K \Subset \Omega$, $\exists G(z)$(class $*$の growth function), $\exists C$ s.t.

$$f(x) = F(x+i0) - F(x-i0), \quad \sup_{x\in K}|F(x+iy)| \leq C\exp G(|y|)$$

昔はこれを Martineau の結果を引用して証明したが, それは難しいので直接証明を与える. Painlevé の定理の ultra-distribution 版を用いる.

Ultra-distributionに対する鏡像原理　$H(x,y)$ が実開集合 Ω を境界の一部に含む上半平面の領域 V_+ で harmonic かつ $H(x,y)\to 0$　in $\mathcal{D}^{*\prime}(\Omega)$ なら，Ω 上広義一様に $H(x,y)\to 0$.



Painlevéの定理　$F(x+iy)\in \mathcal{O}(V\setminus\Omega)$ が

$$F(x+i\varepsilon)-F(x-i\varepsilon)\to 0 \quad \text{in} \quad \mathcal{D}^{*\prime}(\Omega)$$

を満たせば $F\in \mathcal{O}(V)$.

以上の諸定理を調和函数 $H(x,y)=F(x+iy)-H(x-iy)$，$\partial H(x,y)=F'(x+iy)$ に適用することにより通常の鏡像原理に帰着できて解析接続を得る.

鏡像原理の証明　Grothendieckの（F），（DF）空間の理論，Schwartz空間の理論により $\mathcal{D}^*_K$ は quasi-normable となり，従って有界集合 $B\subset(\mathcal{D}^*_K)'$ の上で元来の位相と $\mathcal{D}^*_K$ の 0 の近傍上の一様収束位相が一致する．このことと

$$r(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{e^{x\lambda}}{(1+\lambda^2)\prod(1+\lambda M_p/H_p)}\,d\lambda\in E^*$$

とから定理が示せる.

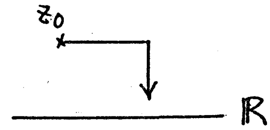
【付録】　Painlevéの定理の一拡張について　講演者は以上の話には直接関係は無いが，と前置きして，次のような話をされた："通常 Painlevé の定理は『上半平面，及び下半平面からの広義一様収束極限 $\lim_{\varepsilon\to 0}F(x\pm i\varepsilon)$ がそれぞれ独立に存在して一致したら，$F(z)$ は実軸上で正則に繋がる』という形で述べられるが，一般には境界値の差が連続函数を定義する正則函数は片方ずつの一様収束極限を持つとは限らず，単に対称極限 $F(x+i\varepsilon)-F(x-i\varepsilon)$ が一様収束するだけである．よって Painlevé の定理も

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\{F(x+i\varepsilon)-F(x-i\varepsilon)\}=0$$

という仮定だけから証明しなければ釣り合いがとれないと考えて証明を試みてみた．しかし大学院の入試に出題するにはやや高級すぎるであろう．" ところで研究代表者は今から17年前に東大教養の1，2年生を相手に佐藤超函数の解説講義を行ったことがあるが，この講義の中でこれと全く同じ問を出したところ，これにレポート問題として非常に初等的な解答を与えてくれた学生が居た．物理学科に進学した佐藤友一君で，その解答を少し小生流に変更したものを講演者の許可を得てここに記録して置く.

z_0 を上半平面に取り，$F(z)$ の原始函数

$$G(z):=\int_{z_0}^{z}F(z)dz$$



を図のような軸に平行な一意に定まる積分路を用いて定義する．もっとも z が上半平面に有る限り積分路をどう変形しても値は不変である．更に $H(z)$ を実軸の近傍でも正則な任意の函数として

$$G_H(z):=\int_{z_0}^{z}H(z)F(z)dz$$

を同様に定義する．

命題 1 $\varepsilon\downarrow 0$ のとき $G(x_1+i\varepsilon)-G(x_2+i\varepsilon)$ は x_1, x_2 につき広義一様に収束．

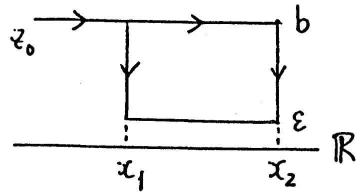
証明 $G(x_1+i\varepsilon)-G(x_2+i\varepsilon)$

$$= \int_{x_1}^{x_2} F(x+ib)\,dx + \int_{\varepsilon}^{b} F(x_1+iy)\,i\,dy + \int_{b}^{\varepsilon} F(x_2+iy)\,i\,dy$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} F(x+i\varepsilon)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\{F(x+i\varepsilon)-F(x-i\varepsilon)\}\,dx + \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\{F(x+i\varepsilon)+F(x-i\varepsilon)\}\,dx$$

ここで $\nu(x,y) := F(x+iy)-F(x-iy)$ と置けば，



$$\begin{aligned}
&G(x_1+i\varepsilon)-G(x_2+i\varepsilon)\\
&= \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\nu(x,\varepsilon)\,dx\\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{b} F(x_1+iy)\,i\,dy + \frac{1}{2}\int_{-\varepsilon}^{-b} F(x_1+iy)\,i\,dy\\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} F(x+ib)\,dx + \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} F(x-ib)\,dx\\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{b}^{\varepsilon} F(x_2+iy)\,i\,dy + \frac{1}{2}\int_{-b}^{-\varepsilon} F(x_2+iy)\,i\,dy\\
&= \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\{F(x+ib)+F(x-ib)\}\,dx\\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\nu(x,\varepsilon)\,dx + \frac{i}{2}\int_{\varepsilon}^{b}\nu(x_1,y)\,dy + \frac{i}{2}\int_{\varepsilon}^{b}\nu(x_2,y)\,dy
\end{aligned}$$

$\nu(x,y)$ は $y>0$ のとき x，y の連続函数で，$y\downarrow 0$ のとき x について広義一様に収束するのであったから，上は $\varepsilon\downarrow 0$ のときやはり x につき広義一様に収束する．

命題 2 $\varepsilon\downarrow 0$ のとき $G_H(x_2+i\varepsilon)-G_H(x_1+i\varepsilon)$ は x_1, x_2 につき広義一様に収束する．

証明 $G_H(x_2+i\varepsilon)-G_H(x_1+i\varepsilon)$

$$\begin{aligned}
&= \int_{x_1}^{x_2} H(x+i\varepsilon)F(x+i\varepsilon)\,dx\\
&= H(x_2+i\varepsilon)\{G(x_2+i\varepsilon)-G(x_1+i\varepsilon)\}\\
&\qquad - \int_{x_1}^{x_2} H'(x+i\varepsilon)\{G(x+i\varepsilon)-G(x_1+i\varepsilon)\} \quad \text{（部分積分）}.
\end{aligned}$$

よって命題 1 により成立．

さて特に $H(z)=z$ と選べば，

$$\begin{aligned}
G(x+i\varepsilon) = \frac{1}{x_0-x}\Big(&(x_0+i\varepsilon)\{G(x+i\varepsilon)-G(x_0+i\varepsilon)\}\\
&- \{G_H(x+i\varepsilon)-G_H(x_0+i\varepsilon)\}\Big)
\end{aligned}$$

であるから，これは $\varepsilon\downarrow 0$ のとき $x\neq x_0$ において広義一様収束．x_0 は任意だから，結局 $G(z)$ は上半平面から実軸まで連続に拡張できる．下半平面においても同様のことが成り立つから，結局積分路を実軸に垂直に横切ることにより $G(z)$ 自身を下半平面ま

で拡張することができる．(仮定より $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x_1}^{x_2}\{F(x+i\varepsilon)-F(x-i\varepsilon)\}dx=0$ だから，下半平面における $G(z)$ の値は積分路が実軸を越えるとき垂直に横切りさえすれば，横切る地点の選び方に依存しないことに注意．) 故に，通常の Painlevé の定理により $G(z)$ は実軸の近傍で正則となる．故に $F(z)=G'(z)$ も実軸の近傍で正則である．証了．

余談ながら，この講義は東大教養の“売り物”である『全学ゼミナール』という選択授業として行われたもので，沢山の優秀な学生が参加してくれた．その後数学者になった人達の消息は良くわかっているが物理に進んだ人達の消息はわからない．きっとどこかで活躍していてくれるものと思っている．　(研究代表者識)．