数理解析研究所講究録
第 750 巻 1991 年 111-122

ある弱擬凸領域におけるノイマン問題に対する劣楕円的評価について

工学院大　長谷川研二 (Kenji HASEGAWA)

§0. 概説

Ωを$\mathbb{C}^n$の有界領域としてその境界$\partial\Omega$は滑らかと仮定する。$\bar{\Omega}$の近傍上に滑らかに挙動するHermite計量を導入することによって(p,q)-形式の空間に内積$(\ ,\ )$を定義できる。この時(p,q)-形式を$(p,q+1)$-形式に写す作用素$\bar{\partial}$に対する共役作用素ϑを得ることが出来る。z_0を$\partial\Omega$上の点としてUをz_0の近傍とする。$\mathcal{D}^{p,q}(\bar{\Omega}\cap U)$を係数が$C_0^\infty(\bar{\Omega}\cap U)$に属する函数で任意の滑らかな$(p,q+1)$-形式$\psi$に対して

$$(0,1)\qquad (\varphi, \vartheta\psi) = (\bar{\partial}\varphi, \psi),$$

となる(p,q)-形式φを集めることによって形成される空間とする。(0,1)は$\partial\Omega$の境界値に対する条件となっている。$\varphi \in \mathcal{D}^{p,q}(\bar{\Omega}\cap U)$に対して次の不等式を考える。

$$(0,2)\qquad \|\varphi\|_{(\varepsilon)} \leq C(\|\bar{\partial}\varphi\| + \|\vartheta\varphi\| + \|\varphi\|).$$

ここで$\|\ \|_{(\varepsilon)}$は指数$\varepsilon > 0$のSobolev normとする。もし任意の$\varphi \in \mathcal{D}^{p,q}(\bar{\Omega}\cap U)$に対して(0,2)が成立すると、Cauchy－Riemann方程式$\bar{\partial}u = f$でfが$\bar{\Omega}\cap U$上でSobolev空間H^sに属しているならばuは$\bar{\Omega}\cap U$で$H^{s+\varepsilon}$に属していることを導

くことが出来る。

(0.2)が成立するz_0の近傍Uが存在するための$\partial\Omega$のz_0の近傍における幾何的条件についての研究は盛んに行なわれている。Kohn [7] はΩがz_0の近傍で強擬凸であれば，任意のqに対して(0.2)が$\varepsilon = 1/2$で成立することを示し、Folland-Kohn [3] ではΩのz_0におけるLevi形式が$n-q$個以上の正の固有値を持つか、あるいは$q+1$個以上の負の固有値を持つことと(p,q)-形式に対して$\varepsilon = 1/2$で(0.2)が成立することが同値であることを証明した。$\varepsilon < 1/2$となる場合でもΩが擬凸と仮定するとKohn [8] はある$\varepsilon > 0$で(0.2)が成立するための十分条件を与えており，更にCatlin [2] では必要十分条件を与えている。εの最良な値に関する結果についてはKohn [8] が$q = n-1$の場合で求めており，Fornaess-Sibony [4] ではΩが凸で$q=1$の場合で求めている。ところが他の場合については未だはっきりとしていない。Catlin [1] は(0.2)が成立するεの集合のある上界を次の方法で与えている。$r(z)$を$\mathbb{C}^n$上の滑らかな函数で$dr(z) \neq 0$, $\Omega = \{z;\ r(z) < 0\}$となるものとする。$q$次元解析集合$V^q$に対して

$$t(V^q; z_0) = \sup\{\eta;\ |r(z)| \leq C\,|z - z_0|^{\eta},\ z \in V^q\},$$

とおき，$\partial\Omega$のz_0における形状を表わす指数$T_q(z_0)$を次の様に定義する。

$$T_q(z_0)=\sup_{V^q} t(V^q;z_0).$$

そこで彼は $1/T_q(z_0)$ が ε の上界であることを証明した。前に述べた[4]や[8]で与えられている最良の ε は $1/T_q(z_0)$ となっている。したがってもし $\varepsilon \geqq 1/T_q(z_0)$ となるある ε で(0.2)が成立することが証明できれば，$\varepsilon=1/T_q(z_0)$ でこの ε が最良の値であることが分る。本論では適当にある弱擬凸領域を設定して，その領域に対する最良の ε を与えることを目標とする。

§1. 主な結果

$r_1(w_1,\cdots,w_m)$ を $\mathbb{C}^m_w$ の原点のある近傍上で定義された滑らかな函数として $r_1(0)=0$, $\partial r_1/\partial w_m(0)\neq 0$ とする。これを用いて定義された領域 $\Omega'=\{w;\ r_1(w)<0\}$ が原点の近傍で強擬凸であると仮定する。更に $0\leqq m_1\leqq m_2\leqq\cdots\leqq m_{n-1}$ となる整数列 $\{m_i\}_{i=1}^{n-1}$ を用意して $\mathbb{C}^n_z$ の原点のある近傍上で定義された滑らかな函数 $r_2(z_1,\cdots,z_n)$ が次の条件を満たすとする：

(1.1)
$$r_2(0)=\frac{\partial r_2}{\partial z_n}(0)=\frac{\partial^2 r_2}{\partial z_n\partial\bar{z}_n}(0)=0$$

(1.2)
$$\left|\frac{\partial r_2}{\partial z_i}(z)\right|\leqq C|z||z_i|^{m_i},\quad \left|\frac{\partial^2 r_2}{\partial z_i\partial\bar{z}_n}(z)\right|\leqq C|z||z_i|^{m_i}\quad i=1,\cdots,n-1$$

$$(1.3)\qquad \left|\frac{\partial^2 r_2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(z)\right| \leqq C|z||z_i|^{m_i}|z_j|^{m_j}$$
$$i, j = 1, \cdots, n-1,$$

以下で考察する領域$\hat{\Omega}$を次の様に与える.

(1.4) $\hat{\Omega} = \{z \,;\, r_1(z_1^{m_1+1}, \cdots, z_{n-1}^{m_{n-1}+1}, z_n) + r_2(z_1, \cdots, z_n) < 0\}$.

この時次の定理が得られる.

定理1.1 $\hat{\Omega}$における$\bar{\partial}$-Neumann問題に対する劣楕円的評価(0.2)が(p, q)-形式に対して $\varepsilon = 1/2(1+m_{n-q})$で成立して$\varepsilon > 1/2(1+m_{n-q})$の時は成立しない.

適当なq次元複素部分多様体Vを選ぶと
$$|r_1(z) + r_2(z)| \leqq C|z|^{2(1+m_{n-q})},\ z \in V,$$
となることが分るので $T_q(0) \geqq 2(1+m_{n-q})$が示せる. よって$\varepsilon = 1/2(1+m_{n-q})$で(0.2)を証明すれば十分である.

§2 接Cauchy-Riemann複体

ιを$\partial\hat{\Omega}$から$\bar{\hat{\Omega}}$への包含写像とする. この時$\partial\hat{\Omega}$上の複体$\mathcal{B}^{p,q}(\partial\Omega)$を$\mathcal{B}^{p,q}(\partial\hat{\Omega}) = \iota^*\mathcal{D}^{p,q}(\bar{\hat{\Omega}})$で定義され, これを接Cauchy-Riemann複体と呼ぶ. $L_1, \cdots, L_n$を$\bar{\hat{\Omega}}$上の滑らかな係数をもつ正則ベクトル場で, $L_1, \cdots, L_{n-1}$が$\partial\hat{\Omega}$に接して, Hermite計量に関して正規直交性を満たすとする. またそれらと双対な$(1,0)$-形式を$\tilde{\omega}_1, \cdots, \tilde{\omega}_n$として$\omega_i = \iota^*(\tilde{\omega}_i)$と置く. この時, $\varphi \in \mathcal{B}^{p,q}(\partial\Omega)$は

$$\varphi=\sum_{|I|=p,|J|=q}{}' \varphi_{I,J}\,\omega_I\wedge\bar{\omega}_J$$

ここで$\sum'$はIとJの指数が単調増大となるものだけの和をとるという意味である。$\bar\partial$とϑをιによって$\partial\Omega$上に引き戻して得られた$\mathcal{B}^{p,q}(\partial\Omega)$の作用素をそれぞれ$\bar\partial_b$と$\vartheta_b$とすると、$\bar\partial_b\varphi$と$\vartheta_b\varphi$は次の形で表わされる:

(2.1) $\bar\partial_b\varphi=(-1)^p\sum_{I,J}{}'\sum_{j=1}^{n-1}\bar{L}_j\varphi_{I,J}\,\omega_I\wedge\bar\omega_j\wedge\bar\omega_J+\sum f^{I,J}_{H,L}\varphi_{I,J}\,\omega_H\wedge\bar\omega_L$

(2.2) $\vartheta_b\varphi=(-1)^{p+1}\sum_{I,K}{}'\sum_{j=1}^{n-1}L_j\varphi_{I,jK}\,\omega_I\wedge\bar\omega_K+\sum g^{I,J}_{H,K}\varphi_{I,J}\,\omega_H\wedge\bar\omega_K$.

ここで$f^{I,J}_{H,L}$, $g^{I,J}_{H,K}$は滑らかな函数である。Sweeney [9]によれば、(0,2)は次の不等式と同値であることが分る。

(2.3) $\|\varphi\|_{(\varepsilon)}\le C(\|\bar\partial_b\varphi\|+\|\vartheta_b\varphi\|+\|\varphi\|)$, $\varphi\in\mathcal{B}^{p,q}(\partial\Omega)$.

(2.1)と(2.2)より(2.3)は微分方程式系の劣楕円的評価となっている。一般に劣楕円性に関する研究はHörmander [6]が単独型の場合において、εを与えてから劣楕円的評価が成立するための作用素の表象に関する必要十分条件を求めているが系となっている場合は$\varepsilon=1/2$を除けばほとんど解明されていない。したがって(2.3)を研究することは偏微分方程式論の立場としても非常に興味深い。

§3. 局所的な劣楕円的評価

適当な滑らかな函数$\phi(z_1,\cdots,z_{n-1},t)$を選ぶことによって$\partial\Omega=\{z;\ \mathrm{Im}\,z_n=\phi(z_1,\cdots,z_{n-1},\mathrm{Re}\,z_n)\}$と表わすことが出来る。

よって $(z_1, \cdots, z_{n-1}, t)$ を $\partial\tilde{\Omega}$ の局所座標系として，$L_1, \cdots, L_{n-1}$ を次の形で与える

(3.1) $$L_j = \frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\frac{\partial \phi}{\partial z_j}}{i + \frac{\partial \phi}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t}$$

Sweeney [9] は (0,2) の成否は Hermite 計量の選び方に依存しないことを示しているので，(3.1) の L_j を正規直交基底とする Hermite計量を導入する．

λ と A を正の数として $\{1, \cdots, n-1\}$ の部分集合 Λ に対して $\mathbb{C}^{n-1}_{z'}$ の部分集合 $U_\Lambda(\lambda)$ を

(3.2) $$U_\Lambda(\lambda) = \{z' \in \mathbb{C}^{n-1} ;\ |z_j| < A\lambda^{-1/2(1+m_j)},\ j \in \Lambda,\ |z_j| \geq A\lambda^{-1/2(1+m_j)}\ \ j \notin \Lambda\},$$

とする．$\overset{\circ}{z}{}' \in U_\Lambda(\lambda)$ に対して近傍 $\tilde{\Omega}_{\overset{\circ}{z}{}'}(\lambda)$ を次の式で与える．

(3.3) $$\tilde{\Omega}_{\overset{\circ}{z}{}'}(\lambda) = \{z' \in \mathbb{C}^{n-1} ;\ |z_j - \overset{\circ}{z}_j| < 1 / M^{(j)}_{\overset{\circ}{z}{}'}(\lambda)\},$$

ここで

(3.4) $$M^{(j)}_{\overset{\circ}{z}{}'}(\lambda) = \begin{cases} |\overset{\circ}{z}_j|^{m_j} \lambda^{1/2} & j \notin \Lambda \\ \dfrac{1}{2A} \lambda^{1/2(1+m_j)} & j \in \Lambda. \end{cases}$$

とする．

$(\overset{\circ}{z}{}', \overset{\circ}{t}) \in \partial\tilde{\Omega}$ を固定して，t と ϕ の代りに $\tilde{t}_{(\overset{\circ}{z}{}', \overset{\circ}{t})}$ と $\tilde{\phi}_{(\overset{\circ}{z}{}', \overset{\circ}{t})}$ を次の式で与える：

(3.5) $$\tilde{t}_{(\overset{\circ}{z}{}', \overset{\circ}{t})}(z', t) = t - \overset{\circ}{t} + \mathrm{Re} \sum_{\alpha \in \Gamma} d_\alpha(\overset{\circ}{z}{}', \overset{\circ}{t})(z' - \overset{\circ}{z}{}')^\alpha,$$

(3.6) $$\tilde{\phi}_{(\overset{\circ}{z}{}', \overset{\circ}{t})}(z', \tilde{t}) = \phi(z', \tilde{t} + \overset{\circ}{t} - \mathrm{Re} \sum_{\alpha \in \Gamma} d_\alpha(\overset{\circ}{z}{}', \overset{\circ}{t})(z' - \overset{\circ}{z}{}')^\alpha)$$

$$-\phi(\mathring{z}',\mathring{t}) + \mathrm{Im}\sum_{\alpha\in\Gamma} d_\alpha(\mathring{z}',\mathring{t})\,(z'-\mathring{z}')^\alpha.$$

ここで

$$\Gamma = \{(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})\in\mathbb{Z}^{n-1};\ \alpha_j\geqq 0,\ 0<\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j/2(1+m_j)\leqq 1\}$$

として $d_\alpha(\mathring{z}',\mathring{t})$ を任意の $\alpha\in\Gamma$ に対して

(3.7) $$\frac{\partial^\alpha}{\partial z'^\alpha}\tilde{\phi}_{(\mathring{z}',\mathring{t})}(z',0) = 0$$

となる様に与える.

ρ を正の数とし $(\mathring{z}',\mathring{t},\mathring{\tau})\in\mathbb{C}^{n-1}_{z'}\times\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}_\tau$ $(\mathring{\tau}\geqq\rho)$ の近傍 $\tilde{\Omega}^\rho_{(\mathring{z}',\mathring{t},\mathring{\tau})}$ を

(3.8) $$\tilde{\Omega}^\rho_{(\mathring{z}',\mathring{t},\mathring{\tau})} = \{(z',t,\tau);\ z'\in\tilde{\Omega}_{\mathring{z}'}(\mathring{\tau}/\rho),$$
$$|\tilde{t}_{(\mathring{z}',\mathring{t})}(z',t)|<\mathring{\tau}^{-\delta},\ |\tau-\mathring{\tau}|<\mathring{\tau}^{1-\delta}\},$$

函数 $\psi^\rho_{(\mathring{z}',\mathring{t},\mathring{\tau})}(z',t,\tau)$ を

(3.9) $$\psi^\rho_{(\mathring{z}',\mathring{t},\mathring{\tau})}(z',t,\tau) = \prod_{j=1}^{n-1}\chi(|z_j-\mathring{z}_j|\,/M^{(j)}_{\mathring{z}'}(\mathring{\tau}/\rho))$$
$$\times\chi(|\tilde{t}_{(\mathring{z}',\mathring{t})}(z',t)|\,\mathring{\tau}^{\delta})\,\chi(|\tau-\mathring{\tau}|\,\mathring{\tau}^{\delta-1}),$$

とする. ただし $\chi(s)$ は滑らかな函数で $|s|\geqq 1$ の時 $\chi(s)=0$, $|s|\leqq 1/2$ の時 $\chi(s)=1$ を満たすとする. また表象が $\psi^\rho_{(\mathring{z}',\mathring{t},\mathring{\tau})}$ となる擬微分作用素を $\Psi^\rho_{(\mathring{z}',\mathring{t},\mathring{\tau})}(z',t,D_t)$ とする.

$(z',t)\in\partial\Omega$ における Levi 形式を $\mathcal{L}_{(z',t)}(\ ,\ )$ とすると (3.1) の L_j に対して $c_{ij}(z',t) = \mathcal{L}_{(z',t)}(L_i,\overline{L_j})$ は r_1, r_2 に対する条件より

(3.10) $$c_{ij}(z',t) = z_i^{m_i}\bar{z}_j^{m_j}\tilde{c}_{ij}(z',t) + r_{ij}(z',t),$$

と表わせ，行列 $(\hat{c}_{ij})$ は正定値，$r_{ij}(z;t)$ は次の不等式を満たす：

(3.11) $$|r_{ij}(z;t)| \le C(|z|+|t|)|z_i|^{m_i}|z_j|^{m_j}.$$

よって，ある定数 $C>0$ が存在して 1 から $n-1$ による q 重指数 I に函数 φ_I を対応させると

(3.12) $$C\sum_{|I|=q}{}'\sum_{i\in I}\|z_i^{m_i}\varphi_I\|^2 \le \sum_{|K|=q-1}\sum_{i,j}(c_{ij}\varphi_{iK},\varphi_{jK})$$

が成立する。

劣楕円的評価を得るために２つの補題を用意する。

補題3.1　もし $\partial\hat{\Omega}$ の点 $(\mathring{z},\mathring{t},\mathring{\tau})$ が $\mathring{z}'\in U_\Lambda(\mathring{\tau}/\rho)$ を満たすならば $j\notin\Lambda$ の時 $\varphi\in C_0^\infty(\hat{\Omega}_{\mathring{z}'}(\mathring{\tau}/\rho)\times R_t)$ に対して

(3.13) $$\rho^{1/2}\|M^{(\omega)}_{\mathring{z}'}(\tfrac{\tau}{\rho})\varphi\| \le C\|z_j^{m_j}\tau^{1/2}\varphi\|,$$

となる。

補題3.2　もし $\partial\hat{\Omega}$ の点 $(\mathring{z},\mathring{t},\mathring{\tau})$ が $\mathring{z}'\in U_\Lambda(\mathring{\tau}/\rho)$ で $j\in\Lambda$ に対して $\mathring{z}_j=0$ となれば，$j\notin\Lambda$ の時 $\varphi\in C_0^\infty(\hat{\Omega}_{\mathring{z}'}(\mathring{\tau}/\rho)\times R_t)$ に対して

(3.14) $$\rho^{\varepsilon_j}\|M^{(\omega)}_{\mathring{z}'}(\tfrac{\tau}{\rho})\varphi\| \le C(\|L_j\varphi\|+\|\bar{L}_j\varphi\|+\|z_j^{m_j}\rho^{1/2}\tau^{1/2}\varphi\|),$$

となる。

補題3.1は(3.2)-(3.4)より直接導けるが，補題3.2は[6]の様に退化した作用素の先験的評価を求める際によく用

いられる交換子の方法を利用している。ここでは

$$\underbrace{[L_j,[L_j,[\cdots,[L_j,}_{m_j} z_j^{m_j}]]\cdots]=C\neq 0$$

となることが本質的である。

$(z',t,r)\in\partial\Omega$ に対して

(3.15) $E^{j,k}_{(z',t,r)}(\varphi,\psi)=\|[L_j,\Psi]\varphi\|^2+\|[L_k,\Psi]\psi\|^2+\|[\bar{L}_j,\Psi]\varphi\|^2$

$+\|\frac{M^{(j)}}{M^{(k)}}[\bar{L}_k,\Psi]\varphi\|^2+\|\frac{M^{(k)}}{M^{(j)}}[\bar{L}_j,\Psi]\psi\|^2+\|\frac{1}{M^{(k)}}[L_j,[\bar{L}_k,\Psi]]\varphi\|^2$

$+\|\frac{1}{M^{(j)}}[L_k,[\bar{L}_j,\Psi]]\psi\|^2+|(c_{ij}(r-D_t)\Psi\varphi,\psi)|,$

(3.16) $F^{j,k}_{(z',t,r)}(\varphi,\psi)=\|\frac{1}{M^{(k)}}[\bar{L}_k,\Psi]L_j\varphi\|^2+\|\frac{1}{M^{(j)}}[\bar{L}_j,\Psi]L_k\psi\|^2,$

と置く。ただし $\Psi=\Psi^{\rho}_{(z',t,r)}$, $M^{(j)}=M^{(j)}_{z'}(r/\rho)$ とする。

(2.3)の右辺に Ψ を使って超局所的な分解を行ない

$\|\Psi\bar{\partial}_b\varphi\|^2+\|\Psi\vartheta_b\varphi\|^2$ の下からの評価を求めるには (2.1)と (2.2) より

$$\|\Psi\bar{\partial}_b\varphi\|^2+\|\Psi\vartheta_b\varphi\|^2=\sum_{I,J}{}'\sum_{j\in J}\|\Psi\bar{L}_j\varphi_{I,J}\|^2$$

$$+\sum_{I,K}{}'\sum_{k}\|\Psi L_k\varphi_{I,kK}\|^2+\sum_{I,K}{}'\sum_{j\neq k}(Re(\Psi L_j\varphi_{I,jK},\Psi L_k\varphi_{I,kK})$$

$$-Re(\Psi\bar{L}_k\varphi_{I,jK},\Psi\bar{L}_j\varphi_{I,kK})),$$

となり、更に L_j, $\bar{L}_j$ と Ψ の交換子をとり部分積分で L_j の位置を変えることによって (3.12)や補題3.1, 3.2を適用させるこ

とが出来る、この結果次の命題を得る。

<u>命題3.3</u>　$\partial\hat{\Omega}$の点(z', t, τ)が$z' \in U_1(\tau/\rho)$, $\tau \geqq \rho$で$j \in A$に対して$z_j = 0$となるとする。ρを十分大きくすると，任意の$\varepsilon > 0$に対して定数$C > 0$が存在して，

$$(3.17)\quad \sum_{I,J}{}' \sum_{j \in J} (\rho^{\varepsilon_j} \| M_{z'}^{(j)}(\tau/\rho) \Psi^{\rho}_{(z', t, \tau)} \varphi_{I,J} \|^2 + \| \Psi^{\rho}_{(z', t, \tau)} L_j \varphi_{I,J} \|^2$$

$$\leqq C (\| \Psi^{\rho}_{(z', t, \tau)} \bar{\partial}_b \varphi \|^2 + \| \Psi^{\rho}_{(z', t, \tau)} \vartheta_b \varphi \|^2)$$

$$+ \sum_{K}{}' \sum_{j,k} (C E^{jk}_{(z', t, \tau)} (\varphi_{I,jK}, \varphi_{I,kK}) + \varepsilon F^{jk}_{(z', t, \tau)} (\varphi_{I,jK}, \varphi_{I,kK})),$$

が$\varphi = \sum'_{|I|=p, |J|=q} \varphi_{I,J}\, \omega_I \wedge \bar{\omega}_J$に対して成立する。ここで$C$は$(z', t, \tau)$や$\rho$に依存しない。

§4　局所的評価の張り合せ

$\mathbb{C}^{n-1}_{z'} \times \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_\tau$の点列$\{(z_\ell', t_\ell, \tau_\ell)\}_{\ell=1}^{\infty}$を次を満たす様に選ぶ：

$$\tau_\ell \geqq \rho, \quad \{\tau \geqq \rho\} \subset \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \Omega^{\rho}_{(z_\ell', t_\ell, \tau_\ell)}.$$

更にある定数Cが存在して

$$(4.1)\qquad \frac{1}{C} \leqq \sum_{\ell=1}^{\infty} \psi^{\rho}_{(z_\ell', t_\ell, \tau_\ell)} \leqq C.$$

となり$\Omega^{\rho}_{(z_\ell', t_\ell, \tau_\ell)}$が重り合う個数がある一定の値以下となる。簡単のために$\Omega_\ell = \Omega_{(z_\ell', t_\ell, \tau_\ell)}$, $M_\ell^{(j)} = M^{(j)}_{(z_\ell', t_\ell, \tau_\ell)}$, $\psi_\ell = \psi^{\rho}_{(z_\ell', t_\ell, \tau_\ell)}$, $\Psi_\ell = \Psi^{\rho}_{(z_\ell', t_\ell, \tau_\ell)}$と書く

擬微分作用素 $[L_j, \Psi_\ell]$ や $[\bar{L}_j, \Psi_\ell]$ などの表象の評価を行ない、剰余項の ℓ に関する和が L^2 ノルムで評価出来ることに留意すれば次の命題が得られる。

<u>命題4.1</u> ある定数 $C>0$ が存在して、

$$(4.2)\quad \sum_{\ell=1}^{\infty} E^{j,k}_{(z'_\ell, t_\ell, \tau_\ell)}(\varphi, \psi) \leq C\Big(\sum_{\ell=1}^{\infty} \|M_\ell^{(j)}\Psi_\ell \varphi\|^2 + \|M_\ell^{(k)}\Psi_\ell \psi\|^2 + \|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2\Big),$$

$$(4.3)\quad \sum_{\ell=1}^{\infty} F^{j,k}_{(z'_\ell, t_\ell, \tau_\ell)}(\varphi, \psi) \leq C\Big(\sum_{\ell=1}^{\infty} \|\Psi_\ell L_j \varphi\|^2 + \|\Psi_\ell L_k \varphi\|^2 + \|(1+D_t^2)^{-1/2} L_j \varphi\|^2 + \|(1+D_t^2)^{-1/2} L_k \psi\|^2\Big).$$

ゆえに (3.17) における ε を十分小さくとることによって F^{jk} を左辺の $\|\Psi_\ell L_j \varphi_{I,J}\|^2$ に吸収させることができ、ρ を十分大きくとることによって E^{jk} を $\rho^{\varepsilon_j}\|M_\ell \Psi_\ell \varphi_{I,J}\|$ に吸収させることができるので次の不等式を得る。

$$(4.4)\quad \sum_\ell \sum_{I,J}{}' \sum_{j\in J} \rho^{\varepsilon_j} \|M_\ell^{(j)} \Psi_\ell \varphi_{I,J}\|^2$$
$$\leq C\Big(\sum_\ell (\|\Psi_\ell \bar{\partial}_b \varphi\|^2 + \|\Psi_\ell \vartheta_b \varphi\|^2) + \|\varphi\|^2\Big).$$

$\{\Psi_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}$ を ℓ^2 値の擬微分作用素と見做し、ψ_ℓ の台で

$$C\tau^{1/2(1+m_j)} \leq M_\ell^{(j)}$$

であることに注意すれば (4.4) から (2.3) を導けることが分り、よって定理1.1が証明される。

参考文献

[1] D. Catlin, Necessary conditions for subellipticity of the $\bar{\partial}$-Neumann problem, Ann. of Math. 117 (1983), 147-171.

[2] ——, Subelliptic estimates for the $\bar{\partial}$-Neumann problem on pseudoconvex domains, Ann. of Math. 126 (1987), 131-191.

[3] G.B. Folland, J. J. Kohn, The Neumann problem for the Cauchy-Riemann complex, Princeton Univ. Press, 1972.

[4] J. E. Foræss, N. Sibony, Construction of P.S.H. functions on weakly pseudoconvex domains, Duke Math. J. 58 (1989), 633-655.

[5] K. Hasegawa, Subelliptic estimates for the $\bar{\partial}$-Neumann problem on certain weakly pseudo-convex domains, preprint.

[6] L. Hörmander, Subelliptic operators, Seminar on sing. of sol. of diff. eq. Princeton Univ. Press (1979), 127-208.

[7] J. J. Kohn, Harmonic integrals on strongly pseudo-convex manifold I, II, Ann. of Math. 78 (1963), 112-148, ibid. 79 (1964), 450-472.

[8] ——, Subellipticity of the $\bar{\partial}$-Neumann problem on pseudo-convex domains: sufficient conditions, Acta Math. 142 (1979), 79-122.

[9] W. J. Sweeney, A condition for subellipticity in Spencer's Neumann problem, J. Differential Equations 21 (1976), 316-362.