数理解析研究所講究録
第750巻 1991年 123-133

Szegö kernel and a global invariant of CR manifolds

大阪大・理 平地健吾

本文では、Szegö核と強擬凸領域の双正則不変量の関係を考察する。Bergman核については、Fefferman [F1,2], Graham [G], Boutet de Monvel [B1,2] 等において詳しく研究されている。そして、それらの多くは、Szegö核に対しても適用できる。ここでは、Bergman核のanalogyとしてえられる結果だけでなく、Szegö核独自の性質も調べる。その結果Szegö核から領域の（さらにCR多様体の）大域的な不変量（の候補）が定義できることを示す。今、"の候補"と書く理由は§4において説明する。

この研究は、Fefferman [F2]において提案されたprogramに沿っている。まず、その説明をしながら、強擬凸領域の幾何（CR多様体の幾何）、そしてBergman核，Szegö核の基本的な性質を復習する。

1. Feffermanの Program (cf. [F2], [B-F-G])

n次元 Rieman 多様体 (M,g) 上での熱方程式の基本解

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right) H_t(x,y) = 0 \\ \lim_{t \searrow 0} H_t(x,y) = \delta_y(x) \end{cases}$$

は、$t \searrow 0$ のとき、次の漸近展開をもつ．

$$(1.1) \quad H_t(x,x) \sim \text{const} \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{-\frac{n}{2}+k}(x) \quad t^{-\frac{n}{2}+k}.$$

ここに現われる係数 $\phi_j(x)$ を計算するには、Weyl, Gilkey による不変式論を用いることができる。それにより、ϕ_j を、Levi-Civita 接続の曲率の Weyl 不変式で書くことができる。

熱核の analogy として、Bergman 核および Szegö 核の解析を行なおうとするのが Fefferman の Program である。$\mathbb{C}^n$ 内の有界領域 Ω に対して、その Bergman 核は、$L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega) \cap \{\Omega$ 上の正則函数$\}$ 直交射影子 の核函数 $\underbrace{\text{として}}_{B(z,\bar{w})}$ 定義される。従って L^2-正則函数 f に対しては、

$$f(z) = \int_\Omega B(z,\bar{w}) f(w) \, |dw|^2 \quad \forall z \in \Omega$$

が成り立つ。Szegö 核は、境界 $\partial\Omega$（今、$\partial\Omega$ は C^∞ 多様体になっているとする）上の Volume $d\sigma$ を一つ与えるとき、$L^2(\partial\Omega, d\sigma) \longrightarrow L^2(\partial\Omega, d\sigma) \cap \{\Omega$ 上の正則函数の L^2 境界値$\}$ 直交射影の核函数として定義する。

領域が強擬凸であり、滑らか定義函数 r, $\Omega = \{r > 0\}$ をもつときには、$B(z,\bar{z})$ および $S(z,\bar{z})$ の境界での漸近展開は、

$$
(1.2)\qquad
\begin{aligned}
B &= \tilde{\varphi}\, r^{-n-1} + \tilde{\psi}\, r \log r, \quad \tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \in C^{\infty}(\overline{\Omega}),\\
S &= \varphi\, r^{-n} + \psi\, r \log r, \quad \varphi, \psi \in C^{\infty}(\overline{\Omega}).
\end{aligned}
$$

という型をしている。また $\tilde{\varphi}|_{\partial\Omega} \neq 0$, $\varphi|_{\partial\Omega} \neq 0$ である。今微分同相、$\{z \in \mathbb{C}^n \mid 0 \le r(z) < \varepsilon\} \cong \{(x, r);\ x \in \partial\Omega,\ 0 \le r < \varepsilon\}$ を一つ固定し、核函数を $\partial\Omega \times [0, \varepsilon)$ 上の函数と見るとき、(1.2) は（Szegö 核について書く）

$$
(1.3)\qquad S(x, r) \sim \sum_{k=0}^{n} \varphi_{-k}(x)\, r^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(x)\, r^{k} \log r
$$

と書ける。Bergman 核の展開に現われる係数は、不変式論を用いて、(そのいくつかは) 決定することができる。ここで、Levi-Civita 接続に対応するのは、Chern-Moser invariant であり、その Weyl invariant を用いて、$\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ を、あるところまで具体的に表示することができる。

Szegö 核を考えるときには、問題は少し難かしくなる。それは、Szegö 核の定義には Volume $d\sigma$ のとり方が関係しているからである。Fefferman [F2] は Monge-Ampère 作用素を用いて、volume を、うまくとり（Szegö 核が Bergman 核と同様な変換則をもつようにし）Bergman 核の展開の表示に用いた不変式論が、Szegö 核にも適用できることを示している。

2. 大域的な不変量.

我々は、Volumeのとり方を指定するのでなく、そのとり方によらないSzegö核の性質をとり出すことを考える。

もう一度、熱核の場合にもどって説明しよう。漸近展開(1.1)をM上で積分すれば

$$(2.1)\qquad \mathrm{trace}\, e^{-t\Delta} \sim c_n \sum_{k=0}^{\infty} t^{-\frac{n}{2}+k} \int_M \phi_{-\frac{n}{2}+k}\, dvol$$

をえる。とくにnが偶数であれば、Gauss-Bonnetの定理（このとき、熱核は、微分型式の上に作用すると思う）

$$(2.2)\qquad \chi(M) = c_n \int_M \phi_0(x)\, dvol$$

がえられる。ここで、右辺内のϕ_0は計量gのとり方によってきまる函数であるが、その（同じ計量gによる）積分の値は、計量のとり方によらない、位相的な量、オイラー数である。

Szegö核についても同様な積分を考えてみる。

$$(2.3)\qquad \int_{\partial\Omega} S(x,r)\, d\sigma(x) \sim \sum_{k=0}^{n} \int \varphi_{-k}\, d\sigma \cdot r^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} \int \varphi_k\, d\sigma \cdot r^{k} \log r$$

(2.1)においてt^0の係数をとり出したのと同様に、今度は、$r^0 \log r$の係数

$$(2.4)\qquad \int_{\partial\Omega} \varphi_0\, d\sigma$$

これが、領域Ωの大域的な不変量を与えることが予想される。熱核の場合には、DeRham complex の index として (2.2) がえられたが、Szegö 核については、そのような対応は知られていない。しかし、次が成り立つ.

<u>定理</u>　<u>積分値 (1.7) は、境界$\partial\Omega$上の Volume $d\sigma$ のとり方によらない。従って、領域Ω の双正則不変量になる。</u>

すなわち，Volume $d\sigma$ を一つ与え、Szegö 核を定義し、その展開の係数 ψ_0 をとり出し、それを、同じ volume $d\sigma$ で積分すると、その値は、最初に与える volume のとり方によらないのである。

<u>3. 定理の証明の idea.</u>

まず、形式的な計算を行う。領域の境界は、実解析的であり、$r(z, \bar{z}) = 0$ で定義されているとする。このとき、正則函数 f に対して Szegö 核の再生性は、

$$f(z) = \int_{\partial\Omega} S(z, \bar{w}) f(w)\, d\sigma(w)$$

と書ける。境界での積分は、δ-函数を用いて表わせば.

$$= \int S(z, \bar{w})\, \delta(r(w, \bar{w}))\, f(w)\, |dw|^2$$

w と $\bar{w}$ を独立変数と見て、積分順序をかえれば、

$$f(z) = \int \left[\int S(z,\zeta)\delta(r(w,\zeta))\,d\zeta \right] f(w)\,dw$$

これが，各正則函数 f について成り立つので，

(3.1) $$\int S(z,\zeta)\delta(r(w,\zeta))\,d\zeta = \delta(z-w).$$

ここで、定義函数 r のとり方が、volume $d\sigma$ のとり方に対応していることに注意しよう。

今、定義函数 r_t がパラメータ t に依存して変化するとする。$\delta(r_t)$ によってきまる volume により定義される Szegö 核を、S_t で書くことにする．このとき、(3.1) を t について微分すると、

$$\int \left[\frac{\partial}{\partial t} S_t(z,\zeta)\delta(r_t(w,\zeta)) + S_t(z,\zeta)\frac{\partial}{\partial t}\delta(r_t(w,\zeta)) \right] d\zeta = 0$$

をえる． $\frac{\partial}{\partial t}\delta(r_t(w,\zeta)) = R(t,\zeta,\partial_\zeta)\delta(r_t(w,\zeta))$ を満たすミクロ微分作用素 R をとると，(cf. [K]) 部分積分により

$$\int \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - R^*(t,\zeta,\partial_\zeta)\right) S_t(z,\zeta) \right] \cdot \delta(r_t(w,\zeta))\,d\zeta = 0.$$

ここで R^* は R の adjoint である。従って Szegö 核は，

(3.2) $$\left(\frac{\partial}{\partial t} - R^*(t,\zeta,\partial_\zeta)\right) S_t(z,\zeta) = 0.$$

をみたす。

(1.3) において，Szegö 核および、その展開の係数が、

すべて、パラメータ t に依存して動くとするとき、(1.3) を t で微分し、z で積分し、(3.2)を用いれば、左辺は、$r^0 \log r$ の項をもたないことが示される。(展開に用いる定義函数は、t によらないように一つ固定しておく。) したがって、右辺の $r^0 \log r$ の係数

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\partial\Omega}(\varphi_t)_0\, d\sigma_t = 0$$

が示される。任意の2つの volume は直線でつなぐことができるので、すべての volume に対して、(2.4) が同じ値をとることがわかる。

以上の計算は、すべての式を micro-local に考えることにより正当化できる。すなわち、境界をこえて解析接続できる正則函数を modulo として考える。このとき、たとえば、Szegö 核は 正則ミクロ函数とみなされる。(cf, 柏原 [K], 金子 [Kan])。

今まで、境界の実解析性を仮定したが、一般の領域も、そのような領域で、近似することにより、定理が証明される。

4. 定理で与えられた不変量は trivial ではないのか?

$\mathbb{C}^2$ 内の領域については、(2.4) の値は 0 になることが示される。それは次の表示を見ればわかる。(これは、不変式論を用いて証明される。)

$$\text{(4.1)} \qquad \varphi_0 = \mathrm{const}\left(\Delta_b R - 2\,\mathrm{Im}\, A_{11,\bar{1}\bar{1}}\right)$$

ここで const $\neq 0$, R, $A_{11,\bar{1}\bar{1}}$ はおのおの、volume $d\sigma$（あるいは $d\sigma = \theta\wedge d\theta$ となる contact form θ）によってきまる．CR-bundle $T^{1,0}$ 上の 田中-Webster 接続（see [W]）の曲率 および、Torsion の共変微分である．(4.1) を積分すれば、Stokes の定理により $\int_{\partial\Omega}\varphi_0\, d\sigma = 0$ が示される。

実は、$\varphi_0|_{\partial\Omega} = 0$ となるように volume を選ぶことが可能である。

$$\text{(4.2)} \qquad d\sigma = \left(\det\begin{pmatrix} r & \partial r/\partial z_j \\ \partial r/\partial \bar{z}_k & \partial^2 r/\partial z_j \partial \bar{z}_k \end{pmatrix}\right)^{-\frac{2}{3}} \mathrm{Re}(\partial r \wedge \partial\bar{\partial} r)\Big|_{\partial\Omega}$$

とればよい．これは Fefferman [F2] によって与えられたもので、Graham [G] の不変式論を用いれば、$\varphi_0 = 0$ が示される。これは、$\mathbb{C}^2$ 内の領域が、境界上の各点において、球面の双正則写像の像により，5次まで近似できるという事実に関係している。球においては、Szegő 核は対数項をもたない、そして、$\mathbb{C}^2$ 内の強擬凸領域の境界は球面で十分に近似できるので、φ_0 は 0 になるのである。

$n \geq 3$ のときには、領域の境界は一般には、球面によって3次までしか近似できない。従ってこんどは、(4.2) のようなよい volume をえらんでも一般には $\varphi_0 = 0$ になるとは限らない．とくに $\mathbb{C}^3$ の場合には具体的な計算ができてい

る。$\Omega \subset \mathbb{C}^3$ は 0 を境界に含み、その近傍において、Moser's normal form [C-M]

$$u > |z|^2 + \sum_{\substack{|\alpha|,|\beta| \geq 2 \\ \gamma \geq 0}} A^{\gamma}_{\alpha\beta}\, z^{\alpha} \bar{z}^{\beta} v^{\gamma},$$

ここで $z=(z_1, z_2)$, $w=u+iv$, で表わされているとしよう。このとき、Szegö核（[F2] P259 で与えられるvolumeによって定義されたもの）の対数項の原点での値は、

$$\varphi_0\Big|_{(z,w)=((0,0),0)} = \mathrm{const}\Big[\, 2\sum_{i,j,k,l,m=1}^{2} |A^{0}_{ijk\bar{l}\bar{m}}|^2$$

$$-\frac{3}{2}\sum_{i,j,k,l,m=1}^{2} A_{ijk,\bar{i}\bar{l}}\, A_{ml\bar{m}\bar{j}\bar{k}}$$

$$+3\sum_{i,j,k,l,m=1}^{2} A_{ij\bar{k}\bar{l}}\, A_{mkl\bar{m}\bar{i}\bar{j}} \,\Big]$$

$\mathrm{const} \neq 0$ である。$A^{\gamma}_{p,q} = \{A^{\gamma}_{\alpha,\beta}\}_{|\alpha|=p,\,|\beta|=q}$ を symmetric tensor と思い、計量 $\delta_{i\bar{j}}$ で trace, norm を定義するとき（cf. [C-M]）上式は

$$2\,\|A^{0}_{3\bar{2}}\|^2 - \frac{3}{2}\|\mathrm{trace}\, A^{0}_{3\bar{2}}\|^2 - 9\,\mathrm{trace}^5\left(A^{0}_{2\bar{2}} \otimes A^{0}_{3\bar{3}}\right)$$

と書ける。この式により一点ごとの値はわかるが、それを各点で行い積分するのは容易ではない。今のところ、homogeneous なCR多様体について、計算を行ったが、その場合に

は、$\varphi_0 = 0$ になってしまい、(2.4) は 0 になる。φ_0 の表示からわかるように、ほとんどの領域において 0 にならないはずであり、その積分が計算できる例をまだ知らない。

筆者は、この積分が trivial でないと思っている。(もし常に 0 になるのであれば、なぜそうなるのか、興味のある問題である。)

References

[B-F-G] Beals, M., Fefferman, C. and Grossman, R., *Strictly pseudoconvex domains in* $\mathbb{C}^n$, Bull. A.M.S. **8** (1983), 125–322.

[B1] Boutet de Monvel, L., *Complément sur le noyau de Bergman*, Séminaire équations aux dérivées partielles 1985-86, Ecole Polytech. Paris.

[B2] Boutet de Monvel, L., *Le noyau de Bergman en dimension* 2, Séminaire équations aux dérivées partielles 1987-88, Ecole Polytech. partielles.

[C-M] Chern, S. S. and Moser, J., *Real hypersurfaces in complex manifolds*, Acta Math. **133** (1974), 219–271.

[F1] Fefferman, C., *The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudo-convex domains*, Invent. Math. **26** (1974), 1–65.

[F2] Fefferman, C., *Parabolic invariant theory in complex analysis*, Adv. in Math. **31** (1979), 131–262.

[G] Graham, C. R., *Scalar boundary invariants and the Bergman kernel*, in Complex analysis II, Lecture Notes in Math. 1276, Springer,1987, pp.108-135.

[Kan] Kaneko, A., *Introduction to Kashiwara's microlocal analysis for the Bergman kernel*, Lecture Notes in Math., Korea Advanced Institute of Science and Technology (1989).

[K] Kashiwara, M., *Analyse micro-locale du noyau de Bergman*, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1976-77, Ecole Polytech. Paris.

[W] Webster, S. M., *Pseudo-hermitian structures on a real hypersurface*, J. Differential Geom. **13** (1978), 25–41.