数理解析研究所講究録
第 750 巻 1991 年 134-137

戸田格子 Hierarchy の初期値問題の表現論的意味

東京大理学部　武部　尚志
(Takashi Takebe)

上野喜三雄、高崎金久は、佐藤の KP Hierarchy の理論と並行する形で、戸田格子 Hierarchy を次の $W=W^{(\infty)}, W^{(0)}$ に関する線形問題の可積分条件として導入した (Adv. Stud. in Pure Math. 4, 1984, pp 1-95):

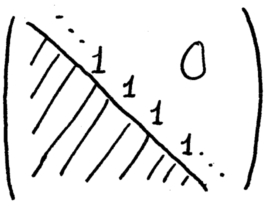
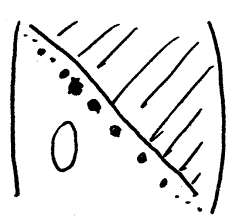
$$
(TL)\begin{cases} LW^{(\infty)}(x,y) = W^{(\infty)}(x,y)\Lambda, & MW^{(0)}(x,y) = W^{(0)}(x,y)\Lambda^{-1} \\ \partial_{x_n} W(x,y) = B_n W(x,y), & \partial_{y_n} W(x,y) = C_n W(x,y) \end{cases}
$$

$$
x=(x_1, x_2, \cdots), \quad y=(y_1, y_2, \cdots), \quad \Lambda=(\delta_{i+1,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}
$$

ここで、L, M は、$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 型行列に値をとる (x,y) の関数で、

$$
L = (b_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}, \qquad M = (c_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}
$$

とした時、$b_{ij} = 0\ (i+1<j), = 1\ (i+1=j)$; $c_{ij} = 0\ (i-1>j), \neq 0\ (i-1=j)$ を満たす。つまり下のような形をしている。

$L =$  , $M =$ 

また、$B_n=(L^n)_+$, $C_n=(M^n)_-$、但し $A=(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ に対して $A_\pm$ は

$$A_\pm \text{の}(i,j)\text{成分} = \begin{cases} 0 & i>j\ (A_+)\ ;\ i\leq j\ (A_-) \\ a_{ij} & i\leq j\ (A_+)\ ;\ i>j\ (A_-) \end{cases}$$

で定義される。

L, M が戸田格子 Hierarchy の解ならば、(i.e., (TL) が可積分ならば。) (TL) には次の形の解が存在する。(波動行列と呼ぶ。)

$$\text{(WM)} \qquad \begin{aligned} W^{(\infty)} &= \hat{W}^{(\infty)}(x,y)\exp\xi(x,\Lambda), \\ W^{(0)} &= \hat{W}^{(0)}(x,y)\exp\xi(y,\Lambda^{-1}). \end{aligned}$$

ここで、$\hat{W}^{(\infty)}$ は可逆下三角行列で対角成分 $=1$, $\hat{W}^{(0)}$ は可逆上三角行列である。また、$\xi(x,\Lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\Lambda^n$, $\xi(y,\Lambda^{-1})=\sum_{n=1}^{\infty}y_n\Lambda^{-n}$.

そしてこれらは、次の双線形関係式を満たすことが分かる。

$$\text{(BL)} \qquad W^{(\infty)}(x,y)\,W^{(\infty)}(x',y')^{-1} = W^{(0)}(x,y)\,W^{(0)}(x',y')^{-1}$$

$$(\text{for all } x, y, x', y')$$

逆に (WM) で指定される形をした $W^{(\infty)}$, $W^{(0)}$ が (BL) を満たすならば、

$$L = W^{(\infty)}\Lambda W^{(\infty)-1}, \qquad M = W^{(0)}\Lambda^{-1}W^{(0)-1}$$

とおくことによって戸田格子 Hierarchy の解が得られる。つまり戸田格子 Hierarchy の波動行列はすべて (BL) で特徴づけられて、したがって解を調べることは、(BL) を満たす波動行列を調べることに帰着される。

次に、

$$\hat{W}^{(\infty)}(x,y)=\sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{diag}_s[\hat{w}_j^{(\infty)}(s;x,y)]\,\Lambda^{-j},\qquad \left(\mathrm{diag}_s[a_s]=\begin{pmatrix}\ddots & & & 0\\ & a_{-1} & & \\ & & a_0 & \\ 0 & & & a_1\ \ddots\end{pmatrix}\right)$$

$$\hat{W}^{(0)}(x,y)=\sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{diag}_s[\hat{w}_j^{(0)}(s;x,y)]\,\Lambda^{j},$$

であるとして、

$$\hat{w}^{(\infty)}(s;x,y;\lambda)=\sum_{j=0}^{\infty}\hat{w}_j^{(\infty)}(s;x,y)\lambda^{-j},$$

$$\hat{w}^{(0)}(s;x,y;\lambda)=\sum_{j=0}^{\infty}\hat{w}_j^{(0)}(s;x,y)\lambda^{j},$$

とおく。すると<u>τ関数</u>と呼ばれる $\tau(s;x,y)$ が存在して、

$$\hat{w}^{(\infty)}(s;x,y;\lambda)=\frac{\tau(s;x-\varepsilon(\lambda^{-1}),y)}{\tau(s;x,y)},\qquad \varepsilon(\lambda)=\left(\lambda,\frac{\lambda^2}{2},\frac{\lambda^3}{3},\cdots\right)$$

$$\hat{w}^{(0)}(s;x,y;\lambda)=\frac{\tau(s;x,y-\varepsilon(\lambda))}{\tau(s;x,y)},$$

と表わされる。$\hat{W}^{(\infty)-1}$, $\hat{W}^{(0)-1}$ も同じ $\tau(s;x,y)$ によって同様に表わすことができる。(BL) も τ だけを使って書き直すこともできる。

結局、戸田格子Hierarchy の解が τ 関数で表示される、ということになった。この τ 関数をパラメトライズすることが問題となるが、これについて[Take]で次の結果が得られた。

<u>定理</u> 擬正則な $\hat{w}^{(\infty)}$, $\hat{w}^{(0)}$ およびそれに対応する τ 関数は次のように表わされる：

$$\hat{w}^{(\infty)}(s;x,y;\lambda)e^{\xi(x,\lambda)}=\frac{\langle s+1|e^{J_+(x)}\psi(\lambda)(g_-\sigma e^{u}g_+)e^{-J_-(y)}|s\rangle}{\langle s|e^{J_+(x)}(g_-\sigma e^{u}g_+)e^{-J_-(y)}|s\rangle}$$

$$\hat{w}^{(0)}(s;x,y;\lambda)e^{\xi(y,\lambda^{-1})} = \frac{\langle s-1 | e^{J_+(x)} g_- \sigma e^u g_+ \psi(\lambda) e^{-J_-(y)} | s\rangle}{\langle s | e^{J_+(x)} g_- \sigma e^u g_+ e^{-J_-(y)} | s\rangle}$$

$$\tau(s;x,y;\lambda) = \langle s | e^{J_+(x)} g_- \sigma e^u g_+ e^{-J_-(y)} | s\rangle$$

ここで、 $|s\rangle$ (resp. $\langle s|$) は、affine Lie環 A_∞ の level 1 highest weight 表現 (resp. lowest weight 表現) $L(\Lambda_s)$ (resp. $L(\Lambda_s)^\vee$) の highest (resp. lowest) vector, $\psi(\lambda)$ は Fock 空間 $\mathcal{F}$ ($\supset L(\Lambda_s)$) に作用する fermion operator $\psi(\lambda) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j \lambda^j$

$$J_+(x) = \sum_{n>0} J_n x_n \quad , \quad J_-(y) = \sum_{n<0} J_n y_n \, ,$$

$$J_n = \sum_{j\in\mathbb{Z}} :\psi_j^* \psi_{j+n}: \qquad n\in\mathbb{Z} \, ,$$

(: : は normal ordering)

さらに、$A_\infty = n_- \oplus \mathfrak{h} \oplus n_+$ と三角形分割した時、

$$g_\pm \in \exp n_\pm \, , \quad u \in \mathfrak{h} \, ,$$

σ は $\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ の置換で、ある条件("荷電保存")を満たす。

逆に任意の $g_\pm, u, \sigma$ から上のようにして戸田格子 Hierarchy の解が得られる。

「擬正則」,「荷電保存」等の定義を含め、詳細は次を参照されたい。

[Take] Representation theoretical meaning of the initial value problem for the Toda lattice Hierarchy I to appear in *Lett. Math. Phys.*; II to appear in *Publ. RIMS.*
[T. Takebe]

これは、次の論文を背景としている。

[Taka] K. Takasaki : *Adv. Stud. in Pure Math.* 4 (1984) pp. 139-163