

群表現の Cohomology について

筑城大・教養 玉城和宏 (Kazuhiro Tamaki)

非可換コホモロジーが群の表現と完全系列に関連して定義されることを作用素環の場合を例にとり示す。

M を作用素環, $\mathcal{Z}(M)$ を M の中心, M^u を M のユニタリー作用素全体, $\mathcal{Z}(M)^u$ を中心のユニタリー作用素全体とする。 M の自己同型写像の全体を $\text{Aut} M$, 内部自己同型写像全体を $\text{Int} M$, 外部自己同型写像の類別を $\text{Out} M = \text{Aut} M / \text{Int} M$ で表わす。 ε を $\text{Aut} M$ から $\text{Out} M$ への自然な準同型写像, Ad を M^u から $\text{Int} M$ への自然な準同型写像とする。我々の考える完全系列は

$$1 \longrightarrow \mathcal{Z}(M)^u \longrightarrow M^u \xrightarrow{\text{Ad}} \text{Aut} M \xrightarrow{\varepsilon} \text{Out} M \longrightarrow 1$$

で各段階における準同型の像を “ $-$ ” を使って表わす。例えば $\text{Ad} u = \bar{u}$, $\text{Aut} M \ni \alpha \rightarrow \bar{\alpha} \in \text{Out} M$ 等である。更に各群上での内部自己同型写像を左肩に記し

$$\alpha_g \bar{u} = \alpha_g \bar{u} \alpha_g^{-1} \text{ で表わす。}$$

群 G に対し完全系列に関するコサイクル、コホモロジーを順次定義する。

G から $\text{Out } M$ への表現を 1-コサイクルとしその全体を $Z^1(G, \text{Out } M) = \text{Rep}(G, \text{Out } M)$ とする。

1次元コホモロジーを

$$H^1(G, \text{Out } M) = Z^1(G, \text{Out } M)$$

と定義する。

$Z^1(G, \text{Out } M) \ni \alpha$ に対し $\bar{\alpha}_g$ のリフトを $\alpha_g \in \text{Aut } M$ とし $\alpha_e = 1$ とする。 e は G の単位元。 α は完全系列上の各群の単位元を表わすものとする。 α は一般に G の表現とはならないのでその差を $\bar{\tau}_\alpha(g, h) \in \text{Int } M$ を使って表わす。 即ち $\alpha_g \alpha_h = \bar{\tau}_\alpha(g, h) \alpha_{gh}$ である。
 $\alpha_e = 1$ より $g = e$ 又は $h = e$ ならば $\bar{\tau}_\alpha(g, h) = 1$ となる。 更に $\bar{\tau}_\alpha$ は関係式

$$\alpha_g \bar{\tau}_\alpha(h, k) \bar{\tau}_\alpha(g, hk) = \bar{\tau}_\alpha(g, h) \bar{\tau}_\alpha(gh, k)$$

を満足する。 即ち $\bar{\tau}_\alpha : G \times G \rightarrow \text{Int } M \subset \text{Aut } M$ は \square

$$\begin{array}{ccc}
 & \alpha_g \alpha_h \alpha_k & \\
 \alpha_g \bar{\tau}_\alpha(h, k) \swarrow & & \searrow \bar{\tau}_\alpha(g, h) \\
 \alpha_g \alpha_{hk} & & \alpha_{gh} \alpha_k \\
 \bar{\tau}_\alpha(g, hk) \swarrow & & \searrow \bar{\tau}_\alpha(gh, k) \\
 & \alpha_{ghk} &
 \end{array}$$

に対応する。

Remark. $\bar{L}_1(g, h)\alpha_g\alpha_h = \alpha_{gh}$ とすると

$\bar{L}_1(g, h) = \bar{L}_2(g, h)^{-1}$, $\alpha_g\bar{L}_2(g, h)\alpha_h = \alpha_{gh}$ とすると

$\alpha_g\bar{L}_2(g, h) = \bar{L}_1(g, h)$ となる。

この様な \bar{L}_α の全体を $Z^2(G, \text{Int}M)$ としその元を 2-

コサイクルと"う。 $Z^2(G, \text{Int}M)$ 上の同値関係 \sim

として $Z^2(G, \text{Int}M) \ni \bar{L}_\alpha, \bar{L}_\beta$ に対し

$$\bar{L}_\alpha \sim \bar{L}_\beta \iff \bar{\alpha}_g = \bar{\beta}_g \quad \forall g \in G$$

と定義する。

\bar{L}_α と \bar{L}_β の関係式を求めると $\bar{u}_g \cdot \alpha_g = \beta_g$, $\forall g \in G$

$\bar{u}_g \in \text{Int}M$ とかけるから

$$\bar{u}_g \alpha_g \cdot \bar{u}_h \alpha_h = \beta_g \cdot \beta_h = \bar{L}_\beta(g, h) \beta_{gh} = \bar{L}_\beta(g, h) \bar{u}_{gh} \alpha_{gh}$$

→

$$\bar{u}_g \alpha_g \cdot \bar{u}_h \alpha_h = \bar{u}_g^{\alpha_g} \bar{u}_h \alpha_g \alpha_h = \bar{u}_g^{\alpha_g} \bar{u}_h \bar{L}_\alpha(g, h) \alpha_{gh}$$

よ、

$$\bar{u}_g^{\alpha_g} \bar{u}_h \bar{L}_\alpha(g, h) = \bar{L}_\beta(g, h) \bar{u}_{gh}$$

となる。

特に α が表現のとき、即ち $\alpha \in Z^1(G, \text{Aut}M)$ のとき

β を α の $\bar{u}_g \in \text{Int}M$ の Perturbation とみると

関係式は

$$\bar{u}_g^{\alpha_g} \bar{u}_h \bar{u}_{gh}^{-1} = \bar{L}_\beta(g, h)$$

となる。この \mathcal{T}_p を 2-コバンダリ- と"う。
 以上のことから 2次元コホモロジー を $Z^2(G, \text{Int}M)$
 の同値類別

$$H^2(G, \text{Int}M) = Z^2(G, \text{Int}M) / \sim$$

と定義する。

次に3次のコサイクル、コホモロジー を定義する
 各 $\bar{L}_\alpha \in Z^2(G, \text{Int}M)$ に対し $L_\alpha(g, e) = L_\alpha(e, h) = 1$
 となるリフトを考える。 $L_\alpha(g, h) \in M^u$ である。

$\text{Aut}M$ の M^u への自然な作用は $\text{Aut}M$ の $\text{Int}M$ への
 Adjoint 作用 即ち、内部自己同型を通じた作用と
 両立するので $\alpha_g \bar{L}_\alpha(h, k) = \overline{\alpha_g(L_\alpha(h, k))}$ が成り立つ
 $\alpha_g(L_\alpha(h, k))$ を $\alpha_g L_\alpha(h, k)$ と記すと

$$\alpha_g \bar{L}_\alpha(h, k) \bar{L}_\alpha(g, hk) = \bar{L}_\alpha(g, h) \bar{L}_\alpha(gk, k)$$

は

$$\alpha_g L_\alpha(h, k) L_\alpha(g, hk) = L_\alpha(g, h) L_\alpha(gk, k)$$

よって

$$\alpha_g L_\alpha(h, k) L_\alpha(g, hk) = \bar{F}_\alpha(g, h, k) L_\alpha(g, h) L_\alpha(gk, k)$$

$\bar{F}_\alpha(g, h, k) \in \ker \text{Ad} = Z(M)^u$ と表わせる。

明らかに $g=e$ 又は $h=e$ 又は $k=e$ ならば

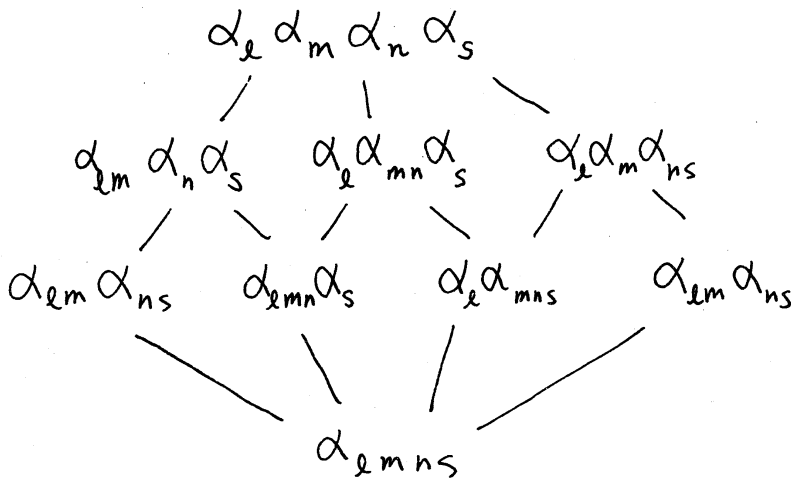
$\bar{F}_\alpha(g, h, k) = 1$ が成り立つ。 \bar{F} に関する関係式は

$Z(M)^u$ が可換でないとする

$$\alpha_x \bar{f}_\alpha(m, n, s) \bar{f}_\alpha(l, m, n) L_\alpha(l, m) L_\alpha(lm, n) L_\alpha(l, mn)^{-1} \bar{f}_\alpha(l, mn, s)$$

$$= L_\alpha(l, m) \bar{f}_\alpha(lm, n, s) L_\alpha(lm, n) L_\alpha(lm, ns) L_\alpha(l, m)^{-1} \bar{f}_\alpha(l, m, ns)$$

をみたす。この式は次図



に対応する。

この \bar{f}_α の集合を $Z^3(G, Z(M)^u)$ と表わし \bar{f}_α を 3-コサイクルと"う。 $Z^3(G, Z(M)^u) \ni \bar{f}_\alpha, \bar{f}_\beta$ に対し同値関係をそれぞれに対応する l_α, l_β により

$$\bar{f}_\alpha \sim \bar{f}_\beta \iff \overline{l_\alpha} = \overline{l_\beta}$$

と定義する。

上記同値関係より $\overline{\alpha_g L_\alpha(h, k)} = \overline{\beta_g L_\beta(h, k)}$

よ、 $\bar{\pi}(g, h, k) \alpha_g L_\alpha(h, k) = \beta_g L_\beta(h, k)$

ここに $\bar{\pi}(g, h, k) \in Z(M)^u$.

このとき $\bar{f}_\alpha, \bar{f}_\beta$ の関係式は.

$$\begin{aligned} & \bar{n}(g, h, k) \alpha_{g, h}(h, k) \bar{n}(e, g, h, k) \bar{f}_\alpha(g, h, k) \\ &= \bar{f}_\beta(g, h, k) \bar{n}(e, g, h) \alpha_{g, h}(g, h) \bar{n}(e, g, h, k) \end{aligned}$$

となる。

特に $\bar{f}_\alpha(g, h, k) = 1$ 、即ち $L_\alpha \in \mathbb{Z}^2(\Gamma, M^u)$ のとき
 L_β は L_α の $\bar{n}(g, h, k) \in \mathcal{Z}(M)^u$ による Perturbation

とみよと

$$\begin{aligned} & \bar{n}(g, h, k) \alpha_{g, h}(h, k) \bar{n}(e, g, h, k) \alpha_{g, h}(g, h) \bar{n}(e, g, h, k)^{-1} \bar{n}(e, g, h)^{-1} \\ &= \bar{f}_\beta(g, h, k) \end{aligned}$$

となる。

この \bar{f}_β を 3-コバリエーションとしよう。

$\alpha_{g, h}(h, k) = L_\alpha(h, k)$ のとき $\bar{n}(g, h, k) = \bar{n}(e, h, k)$

となり $\bar{u}(g, h) = \bar{n}(e, g, h)$ とおけば " L_β はちょうど"

L_α の $\bar{u}(g, h) \in \mathcal{Z}(M)^u$ による Perturbation となる。

3次元コホモロジーは

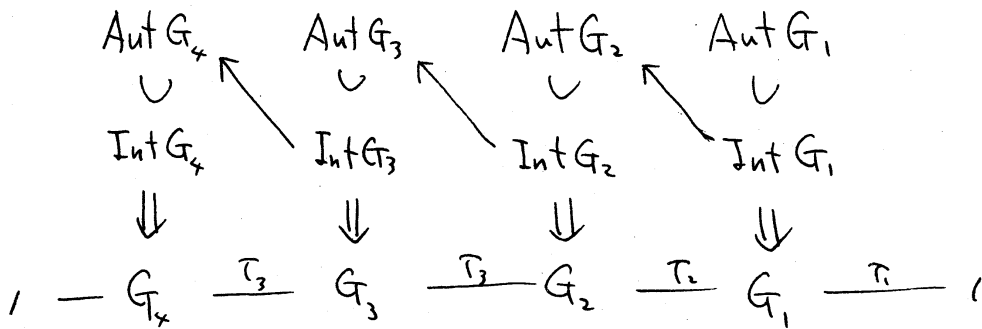
$$H^3(\Gamma, \mathcal{Z}(M)^u) = \mathbb{Z}^3(\Gamma, \mathcal{Z}(M)^u) / \sim$$

と定義できる。

我々の考察は

$$1 \longrightarrow \mathcal{Z}(M)^u \longrightarrow M^u \longrightarrow \text{Aut } M \longrightarrow \text{Out } M \longrightarrow 1$$

の場合であつたが、実際は、



に対応する。

上のダイアグラムにおいて

$\text{Int}(\)$
 \Downarrow は内部自己同型による作用
 $(\)$

$\text{Aut}(\)$
 \swarrow は $\text{Int}(\)$ に両立する内部自己同型の字像のリストを表わす。

Remark.

$H^3(G, \mathcal{Z}(M)^u)$ は定義により $\alpha_g \xrightarrow{\quad} \overline{\alpha_g} = \overline{\alpha_g}_{\mathcal{Z}(G, h)}$ の
 自己同型字像 α_g の選抜によらば。