

Index Theory and Longo's Method

京大数理研 泉 正己

(Masaki Izumi)

この小文では、Longo が [L2] で定義した sector の理論を紹介し、その index theory における重要性を応用によって示す。具体的な応用としては、

- (1) paragroup E_7 , Dodd の非存在性の証明
- (2) fixed point algebra 及び depth 2 の inclusion の特徴付け
- (3) type III_λ AFD factor の index 3 の subfactor の分類
- (4) Cuntz algebra の index finite な endomorphism の構成などがある。

詳しくは、sector については [L2], [I1], (1)(2)(3) については [I1], (4) については [I2] を参照されたい。

§1. Longo's sector

M を type III factor として、 M の endomorphism 全体の集合 $\text{End}(M)$ に次の同値関係を導入する。

$\rho_1 \sim \rho_2, \rho_1, \rho_2 \in \text{End}(M) \iff M$ の unitary u が存在して

$$\rho_1 = \text{Ad } u \circ \rho_2$$

Longo は $\text{Sect}(M) \equiv \text{End}(M)/\sim$ によって sector を定義した。歴史的には sector という名は、field theory の super selection sector から来ているのだが [D.H.R.] には詳しくは触れない。

$\text{Sect}(M)$ には値和、積、Conjugation が定義される。 $P_1, P_2 \in M$ を non-zero projection で $P_1 + P_2 = 1$ となるもの、 $U_1, U_2 \in M$ を isometry で $U_1 U_1^* = P_1, U_2 U_2^* = P_2$ を満たすものとする。このとき与えられた $\rho_1, \rho_2 \in \text{End}(M)$ に対して $\rho(\alpha) = U_1 \rho_1(\alpha) U_1^* + U_2 \rho_2(\alpha) U_2^*$ で $\rho \in \text{End}(M)$ を定義し、 $\text{Sect}(M)$ に和、積を

$$[\rho_1] \oplus [\rho_2] \equiv [\rho], \quad [\rho_1][\rho_2] \equiv [\rho_1 \rho_2]$$

と定義する。上の和、積が、代表元、 P_i, U_i によらないことは簡単に示せる。Conjugation の定義は複雑なので [L2] [I1] を読んでいただきたい。ここでは次を満たすことだけを注意しておく。 $[\rho] \in \text{Sect}(M)$ に対して (conjugate sector を $\overline{[\rho]}$ と書くことにする。(しばしば $\overline{[\rho]}$ の代表元を $\bar{\rho}$ と書く。)

$$\overline{[\rho_1] \oplus [\rho_2]} = \overline{[\rho_1]} \oplus \overline{[\rho_2]} \quad \overline{[\rho_1 \rho_2]} = \overline{[\rho_2]} \overline{[\rho_1]} \quad \rho_1, \rho_2 \in \text{End}(M)$$

$$[\alpha] \in \text{Out}(M) \Rightarrow \overline{[\alpha]} = [\alpha']$$

$\rho \in \text{End}(M)$ が $\dim M \cap \rho(M)' < \infty$ を満たすとき、 $[\rho] \in \text{Sect}(M)$ の既約分解が定義される。 $\{P_i\} \subset M \cap \rho(M)'$ を minimal projections で $\sum P_i = 1$ を満たすもの、 $\{U_i\} \subset M$ を isometries で $U_i U_i^* = P_i$ を満たすものとする。このとき $\rho(\alpha) \equiv U_i^* \rho(\alpha) U_i$ とすれば、上

で定義した意味で $[\rho] = \bigoplus [\rho_i]$ となる。 $[M: \rho(M)] < \infty$ のときは常に $\dim M \cap \rho(M) < \infty$ となる。 $M \cap \rho(M)$ の minimal projection p_i と $[\rho_i]$ が対応していることを注意されたい。

Conjugate sector に対しては次の特徴付けがある。

1) $\rho \in \text{End}(M)$, $\gamma: M \rightarrow \rho(M)$ を canonical endomorphism (定義, 性質については [L3] 参照) とすると

$$[\rho\rho] = [\gamma]$$

2) $\rho_1, \rho_2 \in \text{End}(M)$ が $[M: \rho_i(M)] < \infty$, $M \cap \rho_i(M) = \mathbb{C}1$ $i=1,2$ を満たすとすると。このとき次は同値

(1) $[\rho_1\rho_2]$ 又は $[\rho_2\rho_1]$ が identity sector $[\text{id}]$ を含む

(2) $[\rho_1] = \overline{[\rho_2]}$

このとき $[\text{id}]$ の multiplicity は 1 である。

次の事実は sector と index theory とを結び付ける上で重要である。

$M \supset \rho(M) \supset \rho\rho(M) \supset \rho\rho\rho(M) \supset \dots$ は $M \supset \rho(M)$ に付随する tower である。

このように index theory では, $M \supset \rho(M)$ に対し, 自然に $[\rho\rho]^n$, $[\rho\rho\rho]^n$, $[\rho]$ という sectors が現われる。これらが $M \supset \rho(M)$ の構造に対する豊かな情報を与えてくれるのである。 $[\rho\rho]^n$, $[\rho\rho\rho]^n$, $[\rho]$ の分解によって得られる sectors を $[\rho]$ の descendant

sectors, $[P\bar{P}]^M$ (resp. $[P\bar{P}]^N[P]$) の分解によって得られるものを \mathcal{P} -even (resp. \mathcal{P} -odd) と呼ぶ。

sector をあつかう際には minimal index $[M: \mathcal{P}(M)]$ よりも statistical dimension $d_{\mathcal{P}} \equiv [M: \mathcal{P}(M)]^{\frac{1}{2}}$ のほうが便利である。その理由を説明するには、次の定理が必要である。

定理 (Hiai) M を factor, N をその subfactor とし、 $E \in E(M, N)$ ($E(M, N)$ は M から N への faithful normal conditional expectation 全体) とすると、次は同値

1) E は minimal expectation

2) $E|_{M \cap N}$, $E^{-1}|_{M \cap N}$ が trace で $E^{-1}|_{M \cap N} = (\text{Index } E) E|_{M \cap N}$

3) $\text{Index } Ee = E(e)^2 \text{Index } E$ for all projection $e \in M \cap N$

$$\text{ここで } Ee = E(e \cdot e) / E(e) |_{M \cap N}$$

$\mathcal{P} \in \text{End}(M)$, $N = \mathcal{P}(M)$, $[P] = \bigoplus [P_i]$ を $[P]$ の既約分解、 P_i を P_i に対応する $M \cap \mathcal{P}(M)$ の projection とすると 3) より

$$d_{P_i} = (\text{Index } E P_i)^{\frac{1}{2}} = E(P_i) (\text{Index } E)^{\frac{1}{2}} = E(P_i) d_{\mathcal{P}}$$

$$\sum_i d_{P_i} = \sum_i E(P_i) d_{\mathcal{P}} = d_{\mathcal{P}}$$

となり statistical dimension の加法性も得られる。

statistical dimension の乗法性は、一般的にはわかっていないが応用上は次の定理で十分である。

定理 (Kosaki, Longo) M は factor, N はその subfactor とし
 $M \supset N \supset N_1 \supset N_2 \supset N_3 \supset \dots$ を それに付随する tower とする。
 $\epsilon_0 \in E(M, N)$, $\epsilon_i \in E(N_{i-1}, N_i)$ を minimal expectations と
 すると $E_n \equiv \epsilon_n \circ \epsilon_{n-1} \circ \dots \circ \epsilon_1 \circ \epsilon_0$ は M から N_n への minimal
 expectation であり $[M: N_n]_c = [M: N]_c^{n+1}$

この定理と前の定理を組み合わせると次が示せる。

補題 $\varphi \equiv \lim E_n | \bigvee_m (M \cap N'_m)$ とすると φ は $\bigvee_m M \cap N'_m$
 上の trace であり $\varphi | M \cap N'_m = E | M \cap N'_m$ を満たす。

$M \supset N$ の depth が有限のとき $\bigvee_m (M \cap N'_m)$ 上の trace は一意
 的であり、その値は principal graph の Perron-Frobenius eigen
 vector から決定される。さしに $N = \mathcal{P}(M)$ を仮定し、 $[\mathcal{P}]^n = \bigoplus [P_i]$
 (resp. $[\mathcal{P}]^n [P_i] = \bigoplus [P_j]$) を $[\mathcal{P}]^n$ の (resp. $[\mathcal{P}]^n [P_i]$) の既約分解、 e_i を
 P_i に対応する projection とすると

$$d_{\mathcal{P}_i} = (\text{Index}(E_{2n-1} | e_i))^{1/2} = E_{2n-1}(e_i) d_{\mathcal{P}}^{2n} = \varphi(e_i) d_{\mathcal{P}}^{2n}$$

$$(\text{resp. } d_{\mathcal{P}_i} = \varphi(e_i) d_{\mathcal{P}}^{2n+1})$$

となる。これは descendant sectors の statistical dimension
 を Perron-Frobenius eigen vector から決める公式を与え
 ている。

§2. 応用(1)

sector を使った議論に慣れるため、まず principal graph が A_n のときの、descendant sectors の様子を見てみよう。

M を type III factor、 $\rho_i \in \text{End}(M)$ を $M \supset \rho_i(M)$ の principal graph が A_n となるものとする §1. で注意したように、downward basic construction による tower は次で与えられる。

$$M \supset \rho_i(M) \supset \rho_i \bar{\rho}_i(M) \supset \rho_i \rho_i \bar{\rho}_i(M) \supset \dots$$

よって、

$$M \cap M' = \mathbb{C} \subset M \cap \rho_i(M) \subset M \cap \rho_i \bar{\rho}_i(M) \subset M \cap \rho_i \rho_i \bar{\rho}_i(M) \dots$$

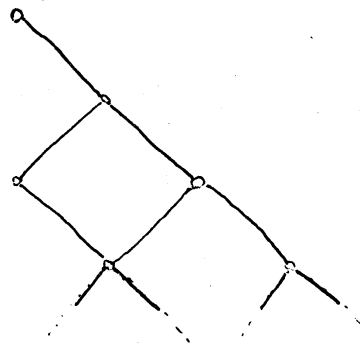
の Bratteli diagram は次のようになる。

$$M \cap M' = \mathbb{C}$$

$$M \cap \rho_i(M) = \mathbb{C}$$

$$M \cap \rho_i \bar{\rho}_i(M)$$

$$M \cap \rho_i \rho_i \bar{\rho}_i(M)$$



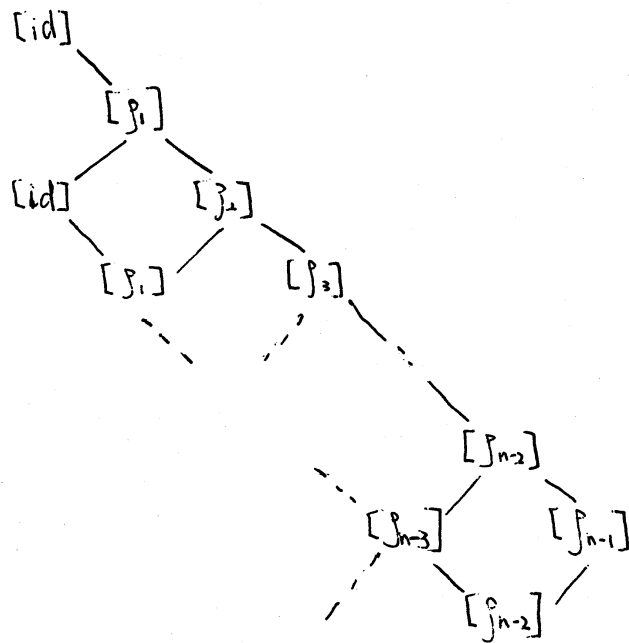
まず、 $M \cap \rho_i \bar{\rho}_i(M) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ に対応して $[\rho_i \bar{\rho}_i]$ が 2 つの sectors に分解することがわかる。§1 の conjugate sector の特徴付けにより、1 つは identity sector $[id]$ であるので、残りを $[e]$ と名付けよう。ところで、 $M \cap \rho_i \bar{\rho}_i(M)$ のレベルの 2 点のうちどちらが $[id]$ に対応しているのだろうか。答は左側である。なぜなら、

$$[\rho, \rho, \rho] = [\rho, \rho] [\rho, \cdot] = ([id] \oplus [\rho_2]) [\rho, \cdot] = [id] [\rho, \cdot] \oplus [\rho_2] [\rho, \cdot]$$

であり $[id] [\rho, \cdot] = [\rho, \cdot]$ は既約なので分解しないからである。

次に、 $M \cap \rho, \rho, \rho, (M)'$ のレベルを見よう。上の議論から、左の点に $[\rho, \cdot]$ が対応し、 $[\rho_2] [\rho, \cdot]$ は2つの sector に分解して、その1つは $[\rho, \cdot]$ であることがわかる。 $[\rho_2] [\rho, \cdot]$ の残りの既約成分を、 $[\rho_3]$ と名付けよう。

このような議論をくり返し、新しく出てくる sector を順に $[\rho_2], [\rho_3], [\rho_4], \dots, [\rho_{n-1}]$ と名付けていくと、次のような図と、basic fusion rules が得られる。



$$[\rho_{2k+1}] [\rho, \cdot] = [\rho_{2k}] \oplus [\rho_{2k+2}] \quad 1 \leq 2k+1 \leq n-2$$

$$[\rho_{2k}] [\rho, \cdot] = [\rho_{2k-1}] \oplus [\rho_{2k+1}] \quad 2 \leq 2k \leq n-2$$

$$[\rho_{n-1}] \begin{pmatrix} [\rho, \cdot], n: \text{odd} \\ [\rho, \cdot], n: \text{even} \end{pmatrix} = [\rho_{n-2}]$$

descendant sectors $\{[\rho_i]\}_{i=1}^{n-1}$ の statistical dimension は次のようにして得られる。 A_n の Perron-Frobenius eigen vector は次である。

$$\frac{\sin \frac{1}{n+1}\pi}{\sin \frac{\pi}{n+1}} \quad \frac{\sin \frac{2}{n+1}\pi}{\sin \frac{\pi}{n+1}} \quad \frac{\sin \frac{3}{n+1}\pi}{\sin \frac{\pi}{n+1}} \quad \dots \quad \frac{\sin \frac{n-1}{n+1}\pi}{\sin \frac{\pi}{n+1}} \quad \frac{\sin \frac{n}{n+1}\pi}{\sin \frac{\pi}{n+1}}$$

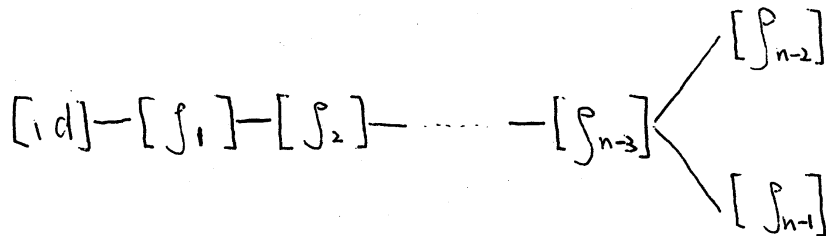
$$d_{id} = 1 = \frac{\sin \frac{\pi}{n+1}}{\sin \frac{\pi}{n+1}}, \quad d_{\rho_i} = 2 \cos \frac{\pi}{n+1} = \frac{\sin \frac{2}{n+1}\pi}{\sin \frac{\pi}{n+1}}$$

であること。 § 1 の議論に注意すると

$$d_{\rho_i} = \frac{\sin \frac{i+1}{n+1}\pi}{\sin \frac{\pi}{n+1}}$$

が得られる。

次に D_n が $M \supset \rho_i(M)$ の principal graph であると仮定してみよう。上と同様な議論により次の図と basic fusion rules を得る。



$$\begin{aligned} [\rho_{2k+1}][\rho_i] &= [\rho_{2k}] \oplus [\rho_{2k+2}] & 1 \leq 2k+1 \leq n-2 \\ [\rho_{2k}][\rho_i] &= [\rho_{2k-1}] \oplus [\rho_{2k+1}] & 2 \leq 2k \leq n-2 \end{aligned}$$

$$[\mathcal{P}_{n-3}] \left(\begin{array}{l} [\mathcal{P}_1] \quad n: \text{odd} \\ \overline{[\mathcal{P}_1]} \quad n: \text{even} \end{array} \right) = [\mathcal{P}_{n-4}] \oplus [\mathcal{P}_{n-2}] \oplus [\mathcal{P}_{n-1}]$$

$$[\mathcal{P}_{n-2}] \left(\begin{array}{l} [\mathcal{P}_1] \quad n: \text{even} \\ \overline{[\mathcal{P}_1]} \quad n: \text{odd} \end{array} \right) = [\mathcal{P}_{n-3}]$$

$$[\mathcal{P}_{n-1}] \left(\begin{array}{l} [\mathcal{P}_1] \quad n: \text{even} \\ \overline{[\mathcal{P}_1]} \quad n: \text{odd} \end{array} \right) = [\mathcal{P}_{n-3}]$$

ただし、 $\overline{[\mathcal{P}_1]}$ は principal part のみを書いた。

D_n の Perron-Frobenius eigen vector は次である。

$$\frac{\sin \frac{1}{2n-2}\pi}{\sin \frac{\pi}{2n-2}} \quad \frac{\sin \frac{2}{2n-2}\pi}{\sin \frac{\pi}{2n-2}} \quad \frac{\sin \frac{3}{2n-2}\pi}{\sin \frac{\pi}{2n-2}} \quad \dots \quad \frac{\sin \frac{n-2}{2n-2}\pi}{\sin \frac{\pi}{2n-2}} \quad \begin{array}{l} \frac{1}{2\sin \frac{\pi}{2n-2}} \\ \frac{1}{2\sin \frac{\pi}{2n-2}} \end{array}$$

前と同様に、descendant sectors の statistical dimension は

$$d_{\mathcal{P}_i} = \frac{\sin \frac{i+1}{2n-2}\pi}{\sin \frac{\pi}{2n-2}} \quad 1 \leq i \leq n-3$$

$$d_{\mathcal{P}_{n-2}} = d_{\mathcal{P}_{n-1}} = \frac{1}{2\sin \frac{\pi}{2n-2}}$$

である。

ここで $n=5$ としてみよう。

$$d_{\mathcal{P}_3} = d_{\mathcal{P}_4} = \frac{1}{2\sin \frac{\pi}{8}} \simeq 1.306 \notin \left\{ 2\cos \frac{\pi}{N} ; N=3,4,5 \right\}$$

これは不可能であり D_5 が principal graph に現われないことがわかる。

同様な議論により、 E_7 が現われないことも示せる。一般の D_{odd} については、fusion rules のより詳しい計算を実行することにより、矛盾を得る。

定理 $M \supset N$ を同型な factor の inclusion とする。このとき、 E_7, D_{odd} は principal graph には現われない。

証明は [I1] を参照。

系 $M \supset N$ を AFD factor の inclusion とする。このとき、 E_7, D_{odd} は principal graph には現われない。

(証明) $M \supset N$ を AFD factor の inclusion とする。 M_0 を type III₁ AFD factor とすると、 $M \supset N$ と $M \otimes M_0 \supset N \otimes M_0$ の principal graph は一致するので、 M が type III のときに命題を証明すればよい。 M が type III₁ のとき、 $[M:N] < \infty$ であれば、Loi の定理 [L1] により N も type III₁ である。よって type III₁ AFD factor の一意性により、 M と N は同型であり、上の定理が使える。

§3. 応用2

次の定理は、Kosaki [K3] の crossed product の特徴付けと同値である。

定理 $M \supset N$ を type III factor の inclusion で $M \cap N' = \mathbb{C}$, $[M:N] < \infty$ を満たすものとする。このとき、次の条件は、同値である。

(i) 有限群 G とその M の outer action α が存在して、

$$N = M^\alpha$$

(ii) $\gamma: M \rightarrow N$ を canonical endomorphism, $[\gamma] = \bigoplus [\alpha_i]$ を既約分解とすると、 $d_{\alpha_i} = 1$ (つまり) $[\gamma]$ は $\text{Out}(M)$ の元に分解する。

上の条件が満たされているとき、 $\{[\alpha_g]\}_{g \in G} = \{[\alpha_i]\}$ 。

(証明) (i) \Rightarrow (ii) 省略。(ii) \Rightarrow (i) M と N が同型するときのみ、証明する。 $\rho \in \text{End}(M)$ を $\rho(M) = N$ となるようにとると、(ii) の仮定より $[\rho\rho] = \bigoplus [\alpha_i]$ が成立する。 $[\rho\rho]$ が self-conjugate より、 $\{[\alpha_i]\}$ は self-conjugate set であり、 $\text{Out}(M)$ 上 conjugation と inverse が一致することに注意すると、 $\{[\alpha_i]\}$ は inverse に関して閉じた集合である。 $[\rho\rho] = \bigoplus [\alpha_i]$ の両辺に左から $[\rho]$ を掛けると

$$[\alpha_j \rho][\rho] = \bigoplus [\alpha_j \alpha_i]。$$

右辺は $[\text{id}]$ を含み、 $[\alpha_j \rho], [\rho]$ が既約なことに注意すると、§1. の conjugate sector の特徴付けにより、 $[\alpha_j \rho] = [\rho]$ が得られその結果 $\bigoplus [\alpha_j][\alpha_i] = \bigoplus [\alpha_i]$ となる。 $[\rho], [\rho]$ が既約なので、 $\{[\alpha_i]\}$ は $[\text{id}]$ を \rightarrow のみ含み、 $\bigoplus [\alpha_j][\alpha_i] = \bigoplus [\alpha_i]$ より、 $[\alpha_i]$

はすべて異なることがわかる。よって $\{[\alpha_i]\}$ は $\text{Out}(M)$ の部分群であり $\{[\alpha_i]\} = \{[\alpha_j]\}_{j \in G}$ と書くことにして、 $[\alpha_j]$ の代表元を $\alpha_j \circ \rho = \rho$ となるように取る。これが求める outer action である。 $g_1, g_2 \in G$ とすると $\alpha_{g_1} \circ \alpha_{g_2} \circ \alpha_{g_1 g_2^{-1}}$ は inner である。ところが、 $M \cap \rho(M)' = \mathbb{C}$ であり、 $\alpha_{g_1} \circ \alpha_{g_2} \circ \alpha_{g_1 g_2^{-1}} \circ \rho = \rho$ より $\alpha_{g_1} \circ \alpha_{g_2} \circ \alpha_{g_1 g_2^{-1}} = \text{id}$ がでる。 $\rho(M) \subset M^{\rho}$ は $\alpha \circ \rho = \rho$ より明らかで、index を比べれば、 $\rho(M) = M^{\rho}$ が出る。 Q.E.D.

§4. 応用(B)

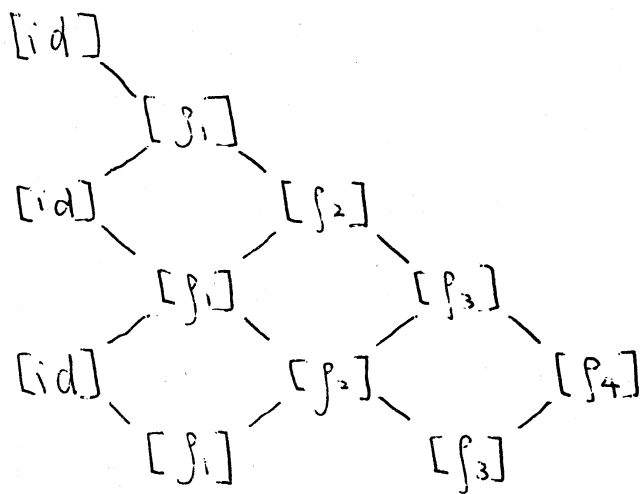
定理 type III₁ AFD factor の index 3 の inclusion は、II 型的である。つまり M を type III₁ AFD factor、 N を M の subfactor で、 $[M:N]_0 = 3$ とする。このとき type II₁ AFD factor の inclusion $R \supset P$ が存在して、

$$M \supset N \simeq R \otimes M_0 \supset P \otimes M_0$$

となる。ここで M_0 は、type III₁ AFD factor である。

(証明の概略) type III₁ AFD factor への有限群の作用は、II 型的であることがわかっているので [KST]、群の話に帰着させることを考える。 $M \supset N$ の principal graph が D_4 の場合は $N = M^{\mathbb{Z}_3}$ なので、 A_5 の場合のみ考える。Loi の定理 [L] より、 N も type III₁ AFD factor であり、 $\rho_i \in \text{End}(M)$ で、 $\rho_i(M) = N$ となるものが存在する。 descendant sectors \times

basic fusion rules は次のようになる。



$$[\beta_1][\overline{\beta_1}] = [id] \oplus [\beta_2]$$

$$[\beta_2][\beta_2] = [\beta_1] \oplus [\beta_3]$$

$$[\beta_3][\overline{\beta_1}] = [\beta_2] \oplus [\beta_4]$$

$$[\beta_4][\beta_1] = [\beta_3]$$

$$d_{\beta_1} = \frac{\sin \frac{41}{6}\pi}{\sin \frac{\pi}{6}}$$

$[\beta_1\beta_1] = [id] \oplus [\beta_2]$, $[\beta_1\beta_1]$ が self-conjugate かつ $[\beta_2]$ が self-conjugate. 同様に $[\beta_1\beta_1\beta_1] = 2[id] \oplus 3[\beta_2] \oplus [\beta_4]$ かつ $[\beta_4]$ が self-conjugate であり, $d_{\beta_4} = 1$ かつ $\beta_4 \in \text{Aut}(M)$ であることを注意する. さらに計算すると

$$[\beta_3] = [\alpha\beta_1]$$

$$[\beta_2]^2 = [id] \oplus [\alpha] \oplus [\beta_2]$$

$$[\alpha][\beta_2] = [\beta_2][\alpha] = [\beta_2]$$

を得られ、 $\alpha \circ \beta_2 = \beta_2$ と代表元を取ると、§3の定理の証明と同様にして、 $\alpha^2 = \text{id}$ (つまり、 \mathbb{Z}_2 action) を得られる。

ここで type III AFD factor の場合を考えてみよう。この場合、 $R \supset P$ の principal graph が A_5 であれば常に、 P の subfactor Q と Q 上の S_2 action が存在して、 $R = Q \rtimes S_3 \supset P = Q \rtimes S_2$ となる。よって Q に相当するものが必要となるが、実はこれは $\mathcal{F}_1(M^d)$ である。 $M \supset \mathcal{F}_1(M^d)$ の関係が crossed product になることを示すには、もっと準備を必要とするので省略するが、このときに \mathbb{Z}_2 action の一意性を必要とし、type III AFD という条件が必要になるのである。

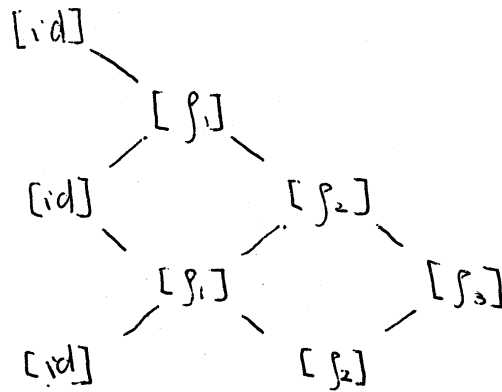
§5. 応用4

詳しくは、[I2]に書く予定なので、ここでは motivation のみを書く。[L2]で Longo は次のことを示している。

Fact M を type III factor、 $\beta \in \text{End}(M)$ を self-conjugate で $d_\beta < \infty$ 、 $M \cap \beta(M)' = \mathbb{C}1$ とする。このとき $H(\beta) = \{v \in M; v\alpha = \beta^2(v)\}$ は一次元であり、 $v \in H(\beta)$ 、 $\|v\| = 1$ ならば $v^* \beta(v) = \pm \frac{1}{d_\beta}$ 。

+ のとき、 β を real sector、- のとき pseudo-real sector

と彼は呼んでいる。real sector の例として、 $M \supset \mathcal{P}_1(M)$ の principal graph が A_4 になる場合を考えてみよう。descendant sectors と、basic fusion rules は次のようになる。



$$[f_1][\bar{f}_1] = [id] \oplus [f_2]$$

$$[f_2][f_1] = [f_1] \oplus [f_3]$$

$$[f_3][\bar{f}_1] = [f_2]$$

$$d_{f_i} = \frac{\sin \frac{4i}{5}\pi}{\sin \frac{\pi}{5}}$$

$[f_2]$ は self-conjugate であり $[f_2]^2 = [f_1][\bar{f}_3][f_3][\bar{f}_1] = [f_1][\bar{f}_1] = [id] \oplus [f_2]$ を満たす ($d_{f_3}=1$ の) $f_3 \in \text{Aut}(M)$ を使った)。

id, f_2 と f_2^2 の間の intertwiner を S_1, S_2 とすると実際に、 S_1, S_2 上の f_2 の action が計算でき、up to relative phase で

$$\begin{cases}
 f_2(S_1) = \frac{S_1}{d} + \frac{S_2 S_2}{\sqrt{d}} \\
 f_2(S_2) = S_2 S_1 S_1^* + \left(\frac{S_1}{\sqrt{d}} - \frac{S_2 S_2}{d} \right) S_2^* \\
 d = 2 \cos \frac{\pi}{5}
 \end{cases}$$

となる。つまり $[S_2]$ が real sector であることがわかる。ところが、この計算結果は、それ以上のことを言っているのである。 $C^*(S_1, S_2) = O_2$ であることに注意してもらいたい。Cuntz algebra O_2 上に、上の関係式で endomorphism を定義すると、 $O_2 \supset \mathcal{J}_2(O_2)$ が Watatani の意味 $[W]$ で、index d^2 の inclusion になっていることは、容易に想像がつく。実際 $E(x) \equiv \mathcal{J}_2(S_1^* \mathcal{J}_2(x) S_1)$ で conditional expectation を定義すると、 $d S_1$ を quasi basis として index が $d^2 = 4 \log^2 \frac{\pi}{5}$ となることが示せる。又、 $\gamma_t(S_1) = e^{it} S_1$, $\gamma_t(S_2) = e^{it} S_2$ で、 \mathbb{R} action を入れ、その KMS-state で表現することにより、Type III_λ の inclusion を作ることもできる。このような方法で作られる index の値として今のところ知られているのは、 $4+2\sqrt{3}$, $3+2\sqrt{2}$, integer などである。ただし、すべて real sector であり、pseudo-real sector の例は、まだ知られていない。

Reference

- [C] M.Choda, in preparation
- [H] F.Hiai, *Minimizing indices of conditional expectations on a subfactor*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **24** (1988), 673-678.
- [Ka] Y.Kawahigashi, *On flatness of Ocneanu's connection on the Dynkin diagrams and classification of subfactors*, preprint.
- [KST] Y.kawahigashi, C.E.Sutherland, M.Takesaki, *The structure of an injective factor and the cocycle conjugacy of discrete abelian group action*, to appear in Acta.Math.
- [K1] H.Kosaki, *Extension of Jonnes theory on index to arbitrary factors*, J. Funct. Anal. **66** (1986), 123-140.
- [K2] H.Kosaki, private communication
- [K3] H.Kosaki, *Characterization of crossed product (properly infinite case)*, Pacific J. Math. **137** (1989), 159-167. [KL] H.Kosaki, and R.Longo, in preparation
- [L1] R.Longo, *Index of subfactors and statistics of quantum fields. I*, Commun. Math. Phy. **126**(1989), 217-247 .
- [L2] R.Longo, *Index of subfactors and statistics of quantum fields. II*, Commun. Math. Phy. **130** (1990), 285-309.
- [L3] R.Longo, *Simple injective subfactors*, Adv. Math. **63** (1987), 152-171.
- [Li] P.H.Loi, *On the theory of index and type III factors*, thesis, Pennsylvania State University, 1988.
- [O1] A.Ocneanu, *Quantized group string algebras and Galois theory for algebras*, in "Operator algebras and applications, Vol. 2 (Warwick, 1987)," London Math. Soc. Lect. Note Series Vol. 136, Cambridge University Press, 1988, pp. 119-172.
- [O2] A.Ocneanu, *Quantum symmetry, differential geometry of finite graphs and classifica-*

tion of subfactors, University of Tokyo Seminary Notes, (Notes recorded by Y.Kawahigashi),
1990.

[P1] S.Popa, *Classification of subfactors: reduction to commuting squares*, Invent. Math.
101 (1990), 19-43.

[P2] S.Popa, *Sur la classification des sousfacteurs d'indice fini du facteur hyperfini*, C. R.
Acad. Sc. Paris. 311 (1990), 95-100.

[P3] S.Popa, *Correspondences*, preprint.

[I1] M. Izumi, *Some results on classification of subfactors*,
preprint.

[I2] M. Izumi, *in preparation*.