

Apéry Numbers and Modular Forms

神戸大・自然科学 石川恒男

(Tsuneco Ishikawa)

§0. 序

1978年. R. Apéry は

$$A(0) = 1, \quad A(1) = 5,$$

$$(1) \quad n^3 A(n) = (34n^3 - 51n^2 + 27n - 5)A(n-1) - (n-1)^3 A(n-2)$$

で定義される数列 $\{A(n)\}$ を使って, $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ の無理数性の証明をした。([1] を見よ) 初めの数項は.

1, 5, 73, 1445, 33001, 89005, 21460825, 584307365, ...

であり, 一般項は

$$A(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2$$

で与えられる。アペリー-数の初等的な合同式の研究は, [2], [6], [10] で得られている。また F. Beukers は, $\zeta(3)$ の無理数性の別証明 [1], [3] を通じて, アペリー-数の研究が代数的微分方程式や代数幾何, 形式群, modular forms などに関連していることを発見した。この小論では, $A(n)$ の母関数の性質から, $A(n)$ とある modular form のフーリエ係数との合同式, すなわち, R, ℓ を互いに素な自然数, $P \equiv \ell \pmod{R}$ なる素

数に対して,

$$a\left(\frac{p-l}{k}\right) \equiv \gamma_p \pmod{p}$$

なる形の合同式について, F. Beukers の結果と最近の結果を述べようと思います。ここで γ_p はある modular form の p 番目のフーリエ係数である。

§ 1. $a(n)$ の母関数について.

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)t^n$$

をアペリ-数の母関数とする。漸化式(1)より $A(t)$ は次の3階の線型微分方程式:

$$(2) \quad (t^4 - 34t^3 + t^2) \frac{d^3 y}{dt^3} + (6t^3 - 153t^2 + 3t) \frac{d^2 y}{dt^2} \\ + (7t^2 - 112t + 1) \frac{dy}{dt} + (t - 5)y = 0$$

の $t=0$ の周りの正則解になっている。この微分方程式は、特殊な形で、 $y_0 = A(t)$, y_1, y_2 を(2)の解空間の生成元とすると、2階の微分方程式:

$$(3) \quad (t^3 - 34t^2 + t) \frac{d^2 v}{dt^2} + (2t^2 - 51t + 1) \frac{dv}{dt} + \frac{1}{4}(t - 10)v = 0$$

のある2解 v_0, v_1 (v_0 は $t=0$ の周りの正則解) で

$$y_0 = v_0^2, \quad y_1 = v_0 v_1, \quad y_2 = v_1^2$$

と書ける。すなわち(3)の symmetric tensor である。さらに、

$$t = \frac{x(1-9x)}{1-x}, \quad v = \sqrt{1-x} \cdot u$$

によって、(3)は

$$(4) \quad x(x-1)(9x-1) \frac{d^2 u}{dx^2} + (27x^2 - 20x + 1) \frac{du}{dx} + (9x-3)u = 0$$

となる。これは楕円曲線の族:

$$(5) \quad Y^2 + (1+x)XY - (x^2-x)Y = X^3 - (x^2-x)X^2$$

に付随した Picard-Fuchs 方程式, すなわち楕円曲線の 1-form の周期の満たす微分方程式である。([12] を見よ。) (2) についてもある $K3$ 曲面の族の 2-form の周期の満たす方程式であることが [5] で示されている。

modular forms との関係について次の命題がわかっている。

命題 1 (F. Beukers, J. Strienstra)

$f(x)$ を $f(0) = 1$ なる (4) の $x=0$ の周りの正則解とする。

$$\alpha(\tau) = \frac{\eta(6\tau)^8 \eta(\tau)^4}{\eta(2\tau)^8 \eta(3\tau)^4}, \quad \eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \quad q = e^{2\pi i \tau}$$

$\tau \in \mathbb{H}$ は Dedekind η -関数

とすると

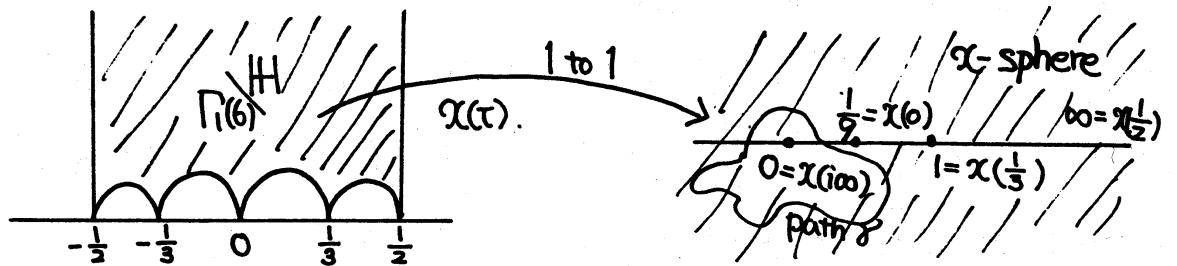
$$f(\alpha(\tau)) = E_1(\tau, \alpha) = 1 + 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi(k) q^k}{1 - q^k}$$

ここで $\chi(k) = \begin{cases} 1 & k \equiv 1 \pmod{6} \\ -1 & k \equiv 5 \pmod{6} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$

これは (4) が重さ 1 の Eisenstein 級数 $E_1(\tau, \alpha)$ に付随した K 方程式 ([13] を見よ) であることを示している。証明は $\alpha(\tau)$ が、合同部分群

$$\Gamma_1(6) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{6} \right\}$$

に関する modular 関数であり、図のように $\Gamma_1(6)$ の基本領域を α -sphere に写すことを用いる。



$g(\tau) = E_1(\tau, \chi)$, $\hat{g}(\tau) = \tau g(\tau)$ とおくと.

$$\hat{g}(\sigma\tau) = a\hat{g}(\tau) + b g(\tau)$$

$$g(\sigma\tau) = c\hat{g}(\tau) + d g(\tau)$$

$$\forall \sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1(6)$$

となる。 $x(\tau)$ の local inverse による x の関数 $g(x)$, $\hat{g}(x)$ を考えると $\sigma \in \Gamma_1(6)$ に対応した path γ により

$$(6) \quad \hat{g}(x) \xrightarrow{\gamma} a\hat{g}(x) + b g(x)$$

$$g(x) \xrightarrow{\gamma} c\hat{g}(x) + d g(x)$$

の変換を受けることがわかる。 $g(x)$, $\hat{g}(x)$ は

$$\begin{vmatrix} g & g' \\ \hat{g} & \hat{g}' \end{vmatrix} g'' - \begin{vmatrix} g & g'' \\ \hat{g} & \hat{g}'' \end{vmatrix} g' + \begin{vmatrix} g' & g'' \\ \hat{g}' & \hat{g}'' \end{vmatrix} g = 0$$

の解で, (6)より行列式の部分は x の有理関数になることがわかり, 直接計算で(4)と等しいことがわかる。詳しい証明は, [4], [12], [13] を見よたい。

命題1と微分方程式(2), (3), (4)の関係より, 次が得られる。

定理1 (F. Beukers)

$$t(\tau) = \frac{x(1-9x)}{1-x} = \left\{ \frac{\eta(\tau)\eta(6\tau)}{\eta(2\tau)\eta(3\tau)} \right\}^{12}$$

とおくと

$$A(t(\tau)) = \frac{1}{24} \left\{ 2E_2(2\tau) - 3E_2(3\tau) - 5E_2(\tau) + 30E_2(6\tau) \right\}$$

ただし $E_2(\tau) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n q^n}{1 - q^n}$: 重た2の Eisenstein.

定理2 (T. Ishikawa, F. Beukers)

$R, l \in \mathbb{N}$ で $(R, l) = 1$ とする。

$$\lambda(\tau) = \left\{ \frac{\eta(R\tau)\eta(6R\tau)}{\eta(2R\tau)\eta(3R\tau)} \right\}^{12/R}$$

とする。このとき、

$$A(\lambda^R) d\lambda^l = l \cdot F_{R,l}(\tau) \frac{d\tau}{\tau}.$$

ここで、

$$(7) \quad F_{R,l}(\tau) = \eta(R\tau)^{m-2} \eta(2R\tau)^{10-m} \eta(3R\tau)^{6-m} \eta(6R\tau)^{m-6} \\ - 9 \eta(R\tau)^{m-6} \eta(2R\tau)^{6-m} \eta(3R\tau)^{10-m} \eta(6R\tau)^{m-2}$$

, $m = 12l/R$ で, R 乗根の分岐は正の実軸で正の値をとるように定めておく。

定理1, 2の詳しい証明は, それぞれ [4], [9] を参照して下さい。

§2. 合同式

目標の合同式を得るために次の命題を準備しておく。

命題2 (F. Beukers, T. Ishikawa)

p を素数とし、

$$w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n t^{n-1} dt \quad (u_n \in \mathbb{Z}_p)$$

$$t(x) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n x^n \quad (w_n \in \mathbb{Z}_p, w_1 = 1)$$

として

$$w(\pm(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n x^{n-1} dx \quad (v_n \in \mathbb{Z}_p)$$

となるとする。このとき

$$(i) \quad u_p \equiv v_p \pmod{p}$$

(ii) $\alpha_p, \beta_p \in \mathbb{Z}_p$ で $p \mid \beta_p$ のとき 次の (a), (b) は同値。 $m, r \in \mathbb{N}$

$$(a) \quad U_{mp^r} + \alpha_p U_{mp^{r-1}} + \beta_p U_{mp^{r-2}} \equiv 0 \pmod{p^r}$$

$$(b) \quad V_{mp^r} + \alpha_p V_{mp^{r-1}} + \beta_p V_{mp^{r-2}} \equiv 0 \pmod{p^r}$$

証明は直接計算である。これと定理2を合わせて次の結果がわかる。

定理3 (T. Ishikawa, F. Beukers).

$F_{R, \ell}(\tau)$ を (7) のようにとり,

$$F_{R, \ell}(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{(R, \ell)} q^n, \quad q = e^{2\pi i \tau}$$

とかく。 $\gamma_n^{(R, \ell)} \in \mathbb{Z}_p$ ($p \equiv \ell \pmod{R}$) である。このとき,

(i) $R, \ell \in \mathbb{N}$, $(R, \ell) = 1$ とする。 $p \equiv \ell \pmod{R}$ なる素数

に対して

$$a\left(\frac{p-\ell}{R}\right) \equiv \gamma_p^{(R, \ell)} \pmod{p}$$

(ii) $R=1, \ell=1$ のとき, 素数 p に対して, ($m, r \in \mathbb{N}$)

$$a(mp^r-1) - \gamma_p^{(1,1)} a(mp^{r-1}-1) + p^3 a(mp^{r-2}-1) \equiv 0 \pmod{p^r}$$

(iii) $R=2, \ell=1$ のとき, 奇素数 p に対して, ($m: \text{odd}, r \in \mathbb{N}$)

$$a\left(\frac{mp^r-1}{2}\right) - \gamma_p^{(2,1)} a\left(\frac{mp^{r-1}-1}{2}\right) + p^3 a\left(\frac{mp^{r-2}-1}{2}\right) \equiv 0 \pmod{p^r}$$

証明。(i)は命題2と定理2より求まる。(ii)は

$$F_{1,1}(\tau) = \frac{\eta(6\tau)^6 \eta(\tau)^{10}}{\eta(2\tau)^2 \eta(3\tau)^6} - 9 \cdot \frac{\eta(\tau)^6 \eta(6\tau)^{10}}{\eta(3\tau)^2 \eta(2\tau)^6} \\ = \frac{1}{240} \{ E_4(\tau) - 36E_4(6\tau) - 28E_4(2\tau) + 63E_4(3\tau) \},$$

$\gamma_p^{(1,1)} = \sigma_3(p) = 1 + p^3$ であるので、 $E_4(\tau)$ が Hecke form であることから、命題2を用いる。(iii)は[4]の結果である。

例。 $k=3, l=1$ とすると。

$$F_{3,1}(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{(3,1)} q^n = \frac{\eta(3\tau)^2 \eta(6\tau)^6 \eta(9\tau)^2}{\eta(18\tau)^2} - 9 \frac{\eta(6\tau)^2 \eta(9\tau)^6 \eta(18\tau)^2}{\eta(3\tau)^2} \\ = q - 11q^4 - 25q^7 - 15q^{10} + 20q^{13} + \dots$$

$p=7$ ならば、

$$a\left(\frac{7-1}{3}\right) = a(2) = 73 \equiv -25 = \gamma_7^{(3,1)} \pmod{7}$$

$p=13$ ならば、

$$a\left(\frac{13-1}{3}\right) = a(4) = 33001 \equiv 20 = \gamma_{13}^{(3,1)} \pmod{13}.$$

関数 $F_{k,l}(\tau)$ は一般に正則ではないので、Hecke 作用素の理論が使えず、(ii)(iii)のような結果は得られないが、 $l=1$ のときは、次のことが成り立つであろうと思われる。

予想

$p \equiv 1 \pmod{k}$ なる素数とし、 $m \equiv 1 \pmod{k}$ 、 $r \in \mathbb{N}$ とすると

$$a\left(\frac{mp^r-1}{k}\right) - \gamma_p^{(k,1)} a\left(\frac{mp^{r-1}-1}{k}\right) + p^3 a\left(\frac{mp^{r-2}-1}{k}\right) \equiv 0 \pmod{p^r}$$

$k=1, 2, l=1$ の場合には、より高い p 巾を法とする合同式も得られている。F. Beukers は、これを \mathbb{Q} super

congruences \square と呼んでいる。

定理 4 (T. Ishikawa)

$$(8) \quad a\left(\frac{p-1}{2}\right) \not\equiv 0 \pmod{p}$$

となる素数 p に対して,

$$a\left(\frac{p-1}{2}\right) \equiv \gamma_p^{(2,1)} \pmod{p^2}$$

証明は [6] の結果と定理 3(iii) を用いる。([7], [8] を見よ)

(8) が成り立たないような素数は、 $p < 10$ 万に対して $p = 11, 3137$ だけであって、その 2 つに対しても定理 4 は成り立っているので、(8) の条件は不要であろうと思われる。

参考文献

- [1] F. Beukers, A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$,
Bull. London Math. Soc. 11 (1979), 268~272.
- [2] ———, Some congruences for the Apéry numbers,
J. Number Theory, 21 (1985), 141~155.
- [3] ———. Irrationality proofs using modular forms, Jour.
arith. Besunçon, Astérisque 147-148 (1987), 271~283.
- [4] ———, Another congruences for the Apéry numbers,
J. Number Theory, 25 (1987), 201~210.
- [5] ——— and C.A.M. Peters, A family of K3 surface and
 $\zeta(3)$, J. Reine Angew. Math. 351 (1984), 42~54.

- [6] I. Gessel, Some congruences for Apéry numbers, J. Number Theory, 14 (1982), 362 ~ 368.
- [7] T. Ishikawa, On Beukers conjecture, Kobe J. Math. 6 (1989), 49 ~ 52.
- [8] ———, Super congruence for the Apéry numbers, Nagoya Math. J. 118 (1990), 195 ~ 202.
- [9] ———, Congruences between binomial coefficients $\binom{2f}{f}$ and Fourier coefficients of certain η -products, preprint.
- [10] Y. Mimura, Congruence properties of Apéry numbers, J. Number Theory, 16 (1983), 138 ~ 146.
- [11] A. J. van der Pooten, A proof that Euler missed ... Apéry proof of the irrationality of $\zeta(3)$, Math. Intelligencer 1 (1979) 195 ~ 203.
- [12] J. Stienstra and F. Beukers, On the Picard-Fuchs equation and the formal Brauer group of certain elliptic K3 surface, Math. Ann. 271 (1985), 269 ~ 304.
- [13] P. F. Stiller, A note on automorphic forms of weight one and weight three, Trans. Amer. Math. Soc. 291 (1985), 503 ~ 518.