数理解析研究所講究録
第753巻 1991年 22-27

Zeuthen's Ruleについて

日大理工・小林　英恒，　東京職業訓練短大・鈴木　秀夫
(Hidetsune KOBAYASHI)　(Hideo SUZUKI)

§1.　はじめに

数式処理を用いて連立代数方程式を解く方法として，Groebner Basis を用いる方法があるが，この方法ではメモリの制約から５変数以上の方程式を解くのは，かなり困難となる．６変数以上の方程式では，各方程式が２次の場合解の個数が 2^6以上となるが，このような方程式を解くことは，実際上ほとんど不可能と言ってよい．一方数値的な解法では，かなり大きな連立方程式の系も解くことができるが，重複解の重複度まで含めて，求めることは困難であると言われている．

我々は，代数的対応に関する "Zeuthen's Rule" を用いて，２変数の連立代数方程式の解の重複度をいくつかの例について実際に計算した．その結果，実用上十分な精度で重複度を求めることができたので，それを報告する．

§2.　Zeuthen's Rule

この古典的な方法は，代数的対応の不動点の重複度を求める方法である．その為にまず代数的対応について述べる．ここに，代数的対応の不動点 u とは，u に対応する値のうちに u 自身が現れる点のことである．$F(x, y)$ を x について m 次，yについて n 次の多項式とする．複素数 a が与えられたとき，

$$F(a, y) = 0$$

の解を $b_1, b_2, \ldots, b_n$ とするとき，a に $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ を対応させる．これを代数的対応という．b を固定すると b に対応する点は，$a_1, a_2, \ldots, a_m$ と m 個あるから，この対応は，(m, n)-対応であるという．$F(x,y)$が一般の多項式のとき不動点uの個数はn+m個である．

定理　(Zeuthen's Rule)

ある代数的対応が与えられたとする．x に対応する $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ のうち，

$\{y_1, y_2, \ldots, y_s\}$ が，$x \dashrightarrow a$ なら $y_1, y_2, \ldots, y_s \dashrightarrow a$ となるとき，点 a の重複度は

$y_1 - x, \ldots, y_s - x$ の無限小の程度を $x - a$ を基準に測った値の和に等しい．

この定理は次の補題より，簡単に導かれる．

補題　$\Phi(x, y) = 0$ で定義される曲線は原点を通り，$x = 0$ を含まないとする．$x \dashrightarrow 0$ のとき，対応する $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ のうち $y_1, y_2, \ldots, y_s \dashrightarrow 0$ となるとき，$y_i \sim x^{m_i}$　$i = 1, 2, \ldots, s$ ならば，$m_1 + m_2 + \ldots + m_s$ は，$y = 0$ とこの曲線との原点における交わりの重複度に等しい．

証明　(J. Semple and L. Roth, Introduction to Algebraic Geometry, pp. 70 - 71)

この定理を用いると，連立代数方程式の解の重複度を計算することができるのだが，そのためにはまず次の平面上の点に関する代数的対応の指標に関する命題が必要である．

点Pは平面上の曲線を動くとし，点Pに対応する点Qが同じ平面上に与えられているとき，点P，Qを通る直線 l が自然に与えられているとする．このとき，

$$(P, Q; l)$$

を基本形式という．基本形式の全体をΣ_1とかく．Σ_1の指標（α，β；μ）を次のように定義する．

α：　任意に直線が与えられたとき，(P, Q; l) で P がこの直線上にあるものすべての個数

β：　　　　　　　　　　　　　　　Q

μ：　点 O を任意に与えたとき，$O \in l$ なる (P, Q; l) 全ての個数

命題　P = Q となる基本形式の個数を ξ とすると，

$$\xi = \alpha + \beta - \mu$$

証明　（Ibid. p.64 Theorem Ⅲ）

この命題に現れる平面上の点の代数的対応は，次の定理の証明に見られるように，数に関する代数的対応（実際は，双対的にペンシルに関する代数的対応）に翻訳される．このペンシルの対応を使って２変数連立代数方程式の解の個数に関するベズーの定理が次のように示される．

定理　位数 n，m の既約代数曲線 C_1，C_2 の交点の個数は nm である．

証明

点 0 をどちらの曲線上にもないようにとる．点 0 を通る直線 l と曲線 C_1 との交点を $P_1, P_2, \ldots, P_n$，l と曲線 C_2 との交点を $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ とするとき基本形式（P_i，Q_j，l）が得られる．この代数的対応の指標は（nm．nm; nm）である．交点では，P = Q となっているのだから，上の命題より交点の個数は

$$nm + nm - nm$$

証了

次の節で，交点の重複度を調べるのであるが，その際この平面上の点に関する代数的対応を，基本に使う．どのような対応を用いても重複度が測れると言うものではない．このことは，高次元の代数方程式の解の重複度を調べる際に必要な注意である．

§３．連立代数方程式の解の重複度

この報告では，２変数連立代数方程式の解の重複度を求める方法に限って説明する．連立代数方程式

$$f(x, y) = 0,$$

$$g(x, y) = 0$$

が与えられたとする．ただし，イデアル（f，g)の次元は０であるとする．曲線

C_1，C_2

をそれぞれ

$$C_1:\ f = 0,$$
$$C_2:\ g = 0$$

とするとき，この連立代数方程式の解は，これら２つの曲線の交点となる．いま，Ｕを一つの交点とするとき，Ｕの重複度を求める方法を示そう．点Ｈ，Ｈ’を次の条件を満たすようにとる．

(1) H，H’ は C_1，C_2 どちらとも交わらない．

(2) H と U とを結ぶ直線上には，U 以外に交点は含まれない．ＨとＵとを結ぶ直線をｕとする．

q_1，q_2，...，q_t とおく．点 Uをとおり，Ｈ，Ｈ’
をとおらない直線をＬとおき，Ｌとｐの交点をＰ，
Ｌとｑ$_i$の交点を Q_1，Q_2，...，Q_t とするとき，

$$PU\alpha \sim PQj$$

とすると，$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_j$ が U の重複度である．

これを，２変数代数方程式に適用して重複度を求めたのが，つぎの５つの例である．

例１．曲線 $(x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3 = 0$ と $y = x$ との交点のうち原点の重複度
この例では，最初の方程式のyにxを代入して得られる一変数の多項式の最低次の項の次数が求める重複度となる．ただし，数値的な計算としては前に説明したとおりの計算を行っている．次の例２も同様である．

以下どの例でも，H は無限遠にとる．次にHと(h,0)とを結ぶ線とC_1との交点をPなどとする．multiplicity’は，無限小の程度を測る際に

$$h = cq$$

のかたちで現れる定数cを除外する前の値であり，multiplicity はcを除外した後の値である．

h	0.1	0.01	0.02	0.01
multiplicity’	2.992778	3.006801	3.012644	3.006801
multiplicity	3.020823		2.973823	

例２．曲線 $(x^2+y^2)^2+3x^2y-y^3=0$ と $y-x^2=0$ との交点 (0,0) の重複度.

この例も第一式のyにx^2 を代入すればよい.

h	0.1	0.01	0.02	0.01
multiplicity'	3.733937	3.853432	3.831285	3.853432
multiplicity	3.972927		3.978369	
h	0.01	0.001	0.002	0.001
multiplicity'	3.853432	3.899759	3.889096	3.899759
multiplicity	3.992412		3.995357	

例３．曲線 $(x^2+y^2)^2+3x^2y-y^3=0$ と $2x^4-3x^2y+y^4-2y^3+y^2=0$ との交点(0,0)．第２式の(0,0)のまわりのピュイズー展開は

$$2x^2+16x^4+\ldots\ \text{と}\ x^2-2x^4+\ldots$$

である．従って，(0,0)の重複度は，8である.

h	0.1	0.01	0.02	0.01
multiplicity'	7.208272	7.585311	7.519342	7.585311
multiplicity	7.962350		7.957631	
h	0.01	0.001	0.002	0.001
multiplicity'	7.585311	7.718583	7.688143	7.718583
multiplicity	7.985127		7.991507	

例４．曲線 $(x^2+y^2)^2+3x^2y-y^3=0$ と $x^6-x^2y^3-y^5=0$ との交点 (0,0).

この例では，複素根を求める必要が生じる.

h	0.1	0.01	0.02	0.01
multiplicity'	15.08099	15.45520	15.37958	15.45520
multiplicity	15.82942		15.88203	
h	0.01	0.001	0.002	0.001
multiplicity'	15.4552	15.62073	15.58477	15.62073
multiplicity	15.95180		15.94320	

例５．曲線 (x2 + y2)3 - 4x2y2 = 0　と　$x^6 - x^2y^3 - y^5 = 0$ との交点のうち原点の重複度．

h	0.1	0.01	0.02	0.01
multiplicity'	21.76422	21.98819	21.97398	21.98819
multiplicity	22.21216		22.06839	
h	0.01	0.001	0.002	0.003
multiplicity'	21.98819	22.05846	21.99920	22.00568
multiplicity	22.19901		21.90643	

この例では，定数を除いた値が正数値から離れている．これは，定数を除く際の根の対応を混同してしまっている可能性を示す．

最後に，計算時間の比較表を載せる．最初の２つの例では，数式処理は例外的に短い時間である．

（単位，秒．cpu mc68030 25mh, fpcp mc68882, 25mh, os unix）

	例１	例２	例３	例４	例５
数値	0.35	0.35	1.3	4.3	16.9
数式	0.05	0.05	11.8	60.7	165.0

参考文献

[1] J.G. Semple and L. Roth, Introduction to Algebraic Geometry, 1949, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford.

[2] Robert J. Walker, Algebraic curves, 1950, Springer-Verlag