数理解析研究所講究録
第 753 巻 1991 年 28-34

高次代数曲線の computation diagram

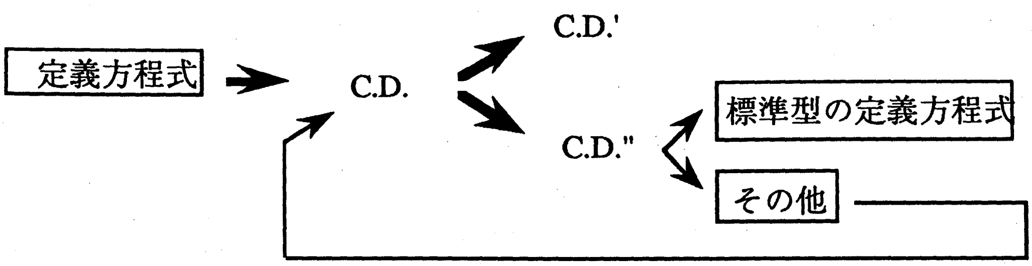
九大総理工　中川重和　(Shigekazu Nakagawa)
群馬高専　高橋　正　(Tadashi Takahashi)

代数曲線を特異点によって分類することは、その次数が上がるに伴って急激に難しくなる。5次以上の代数曲線の分類には大規模な代数的計算が必要であるが、近年の計算機及び数式処理システムの進歩はそれを可能にしている。しかし、そのような計算の結果を数式を通じて把握することに困難を感じる場合が多い。我々は、計算結果の判断の助けとなる computation diagram という概念を提唱する。

1．本研究の目的

19世紀以来、特異点による4次曲線の分類は何度も試みられ、現在その完全な結果が得られている。同じ趣旨で5次曲線の分類も試みられており、不完全ながらも230余りに分類できることが知られている。より高次（6次以上）の代数曲線に関しては、さまざまなアプローチがなされたが、未だ完全な分類はなされていない。そこでは大規模な代数的計算が問題として残っている。

その問題を解決するために、まず[T1] において、代数曲線の(一意的に表される)標準型を定義し､計算機を用いて4次曲線の標準型を求めた。ここでは、より難しい問題に取り組むための道具として、代数曲線の定義方程式を視覚化した図（本稿では computation diagramと呼ぶ）を提唱する。この図を用いることにより、大規模な計算における、計算結果の判断を容易にすることができる（図 1.1参照）。



C.D. は computation diagram を示す。

図 1.1

本研究の目的と関連する研究との関係は、次の図1.2のようになる。本研究は*印の一部分である。

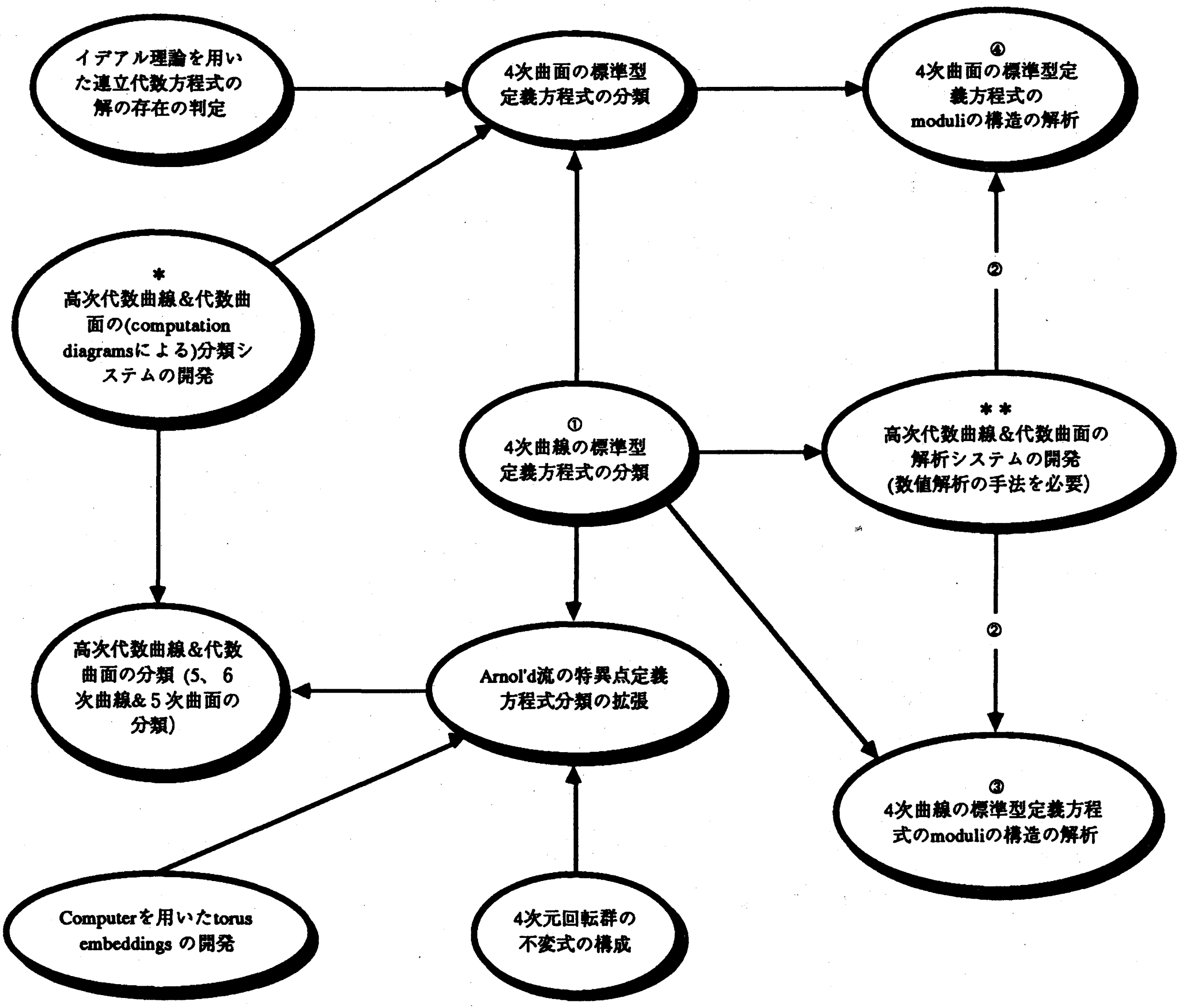


図 1. 2

①に関しては、完全な分類が得られている（[T1]を参照）。②、③、④の研究にはパラメータを持つ連立代数方程式の解を求め、その解の状態（n重解あるとか、どのようなパラメータをのときにn重解でなくなるか等）を考慮することが必要になる。これらの研究には Gröbner 基底の理論及び Wu's method の手法を発展させなければならない。

2．代数曲線の標準型の定義

2次元複素射影空間 $\mathbf{P}^2$におけるn次同次多項式に対し、その標準型を定義する。$\mathbf{P}^2$の座標を $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ とし、$\mathbf{P}^2$におけるn次の同次多項式

$$\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_n=n} a_K X^K = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_n=n} a_{k_1k_2\cdots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} \quad \left(|a_{k_1k_2\cdots k_n}| \geq 1\right) \tag{1.1}$$

を考える。(1.1) 全体をFで表す。

べき積$X^K = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$ に辞書式順序 >>を導入する。また、$z, z' \in \boldsymbol{C}$ に対し、$z_1 >>_c z_2$であるとは「$|z_1| > |z_2|$ あるいは$|z_1| = |z_2|$ ならば$arg(z_1) > arg(z_2)$ (mod 2π)」であると定義する。そして、これらを用いて、F に順序 $>>_p$ を次のように定義する：

$f_1, f_2 \in F$ に対し、$f_1 >>_p f_2$ であるとは

1) $lp(f_1) >> lp(f_2)$

あるいは

2) $lp(f_1) = lp(f_2)$ かつ$lc(f_1) >>_c lc(f_2) \Rightarrow rest(f_1) >>_p rest(f_2)$

である。ここで、$lp(f_1)$ はf_1 のleading power product を表し、$lc(f_1)$ はそのleading coefficient を表す。また、$rest(f_1)$ はf_1 からそのleading term を除いた多項式を表す。

Fを $[x,y,z]$ に関する線形変換で、線形同値な類 C_i に分ける;

$$F = \cup C_i,\ C_i \cap C_j = \emptyset\ (i \neq j).$$

C_i の代表系として、C_i のうち、全順序 $>>_p$ に関して最小の多項式f_i を取る。このとき $\{f_i = 0\}$ をn次代数曲線の標準型と定義する。

例 2.1

座標系 $[x,y]$ の$\boldsymbol{P}^1$における、次数 1, 2, 3, 4 の同次多項式の標準型は次のようになる。

次数	標準型
1	y
2	xy
2	y^2
3	$x^2y + y^3$
3	xy^2
3	y^3
4	$x^3y+pxy^3+qy^4 \quad (4p^3+27q^2 \neq 0)$
4	$x^2y^2 + y^4$

4	x^2y^2
4	xy^3
4	y^4

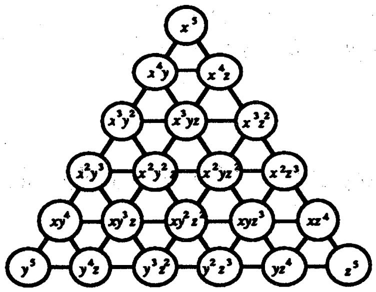
例 2.2

座標系 $[x, y, z]$ の $\boldsymbol{P}^2$ における、次数 1, 2, 3 の同次多項式の標準型は次のようになる([T2]を参照)。

次数	標準型
1	z
2	z^2
2	yz
2	$xy + z^2$
3	$x^2z+y^3+pyz^2+qz^3 \quad (4p^3+27q^2 \neq 0)$
3	$xyz + y^3 + z^3$
3	$xz^2 + y^3$
3	$xyz + z^3$
3	$xz^2 + y^2z$
3	xyz
3	$y^2z + z^3$
3	yz^2
3	z^3

3. Computation diagram

Fに属する多項式のべき積を右図のように対応させる。さらに各係数の状態（ゼロであるとか、パラメータ係数を持つなど）を付加した diagram をcomputation diagram と呼ぶ。



各係数の状態は ○ で係数 0 を示し、◍ はパラメータ係数を示す。そして、○ を z.t.、❶ を o.t. と呼ぶ。また、◍ の示す項のうち >>に関する最小べき積を t.t. と呼ぶ。

4. $\mathbf{P}^2$上のn次代数曲線の標準型の分類アルゴリズム

一連の手続きをdiagramを介して眺めると、その手続きに関するある一定の規則及び標準型の持つべき性質が明確にできる。それらを要約すると次のようになる。

<u>computation diagram上の線形変換に関する規則（下図参照）</u>

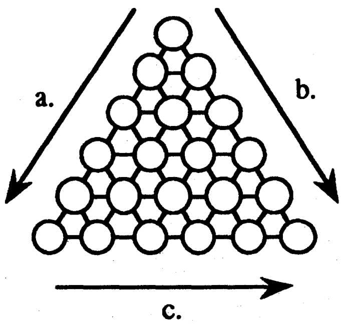
1. 各diagramにおいてo.t.の位置により、標準化のために適用可能な線形変換は決まる。
2. ●を右隅へできる限り移動させるために、適用可能な線形変換は全部で7種類ある。

<u>標準型の持つべき性質</u>

3. o.t.は同一diagramに高々3個現われる。
4. o.t.は同一直線上に3個並ぶことはない。

標準型への分類は、辞書式順序がより小さい項への書換えによる定義方程式の変形であるが、それはdiagram上では、●を右隅へできる限り移動させる操作に対応している。

1. a: $x = x' + ay$
2. b: $x = x' + bz$
3. c: $y = y' + cz$
4. a+b: $x = x' + ay + bz$
5. b+c: $x = x' + az,\ y = y' + bz$
6. a+c: $x = x' + ay',\ y = y' + bz$
7. a+b+c: $x = x' + ay' + bz,\ y = y' + cz$



これらの規則に基づき、$\mathbf{P}^2$上のn次代数曲線の標準型の分類アルゴリズムを与えることができる。

$\mathbf{P}^2$上のn次代数曲線の標準型の分類アルゴリズム

入力：　$\{d_1, d_2, \ldots, d_p\}$　$\mathbf{P}^1$上の1からn次までの標準型を表すdiagramのリスト

出力：　NF　$\mathbf{P}^2$上のn次代数曲線の標準型を表すdiagram

```
1.D:={d1,d2,...,dp};
  NF := NULL ;
2. if NULL (D ) then return NF  as results ;
3. d := CAR( D );
   f := apply-linear-p(d) ;
4. if NULL (f) then
          << if d ∉ NF then  NF := CONS(d, NF) ;
             D := CDR( D);
             go back to step 2. >> ;
5. if z.t. vanishes in d then
          << d := linear-tr(f,d) ;
             D := CONS( d, CDR(D ))  >>
     else
          << d1:= t.t. replaces with z.t. in d ;
             d2:= t.t. replaces with o.t. in d ;
             D := CONS( d1, CONS( d2, CDR(D )))  >> ;
  go back to step 2.;
```

ただし、

a) *linear-tr*(f,e) はdiagram e に線形変換 f を施してできるdiagramを値としてもつ関数であり、

b) *apply-linear-p*(d) はdiagram e に線形変換が適用可能かどうかを規則 1.,2.に基づいて調べ、適用可能ならばその変換を値として返し、そうでなければnilを返す関数である。

5．今後の発展と課題

1) 分類アルゴリズムの Mathematica へのインプリメント

高次代数曲線、代数曲面の定義方程式をその標準形に変換するアルゴリズムを計算機にインプリメントする。その際、先に述べたように、定義方程式の変換を computation diagram 上の操作に置き換える。その際、グラフィック機能に優れた数式処理システムである Mathematica を用いる。

2) 大域的解析プログラムの作成

1) より得られた結果を用いて、その moduli による大域的解析（その曲線、曲面上

のすべての状況（特異点が他の位相型に線形変換が可能となるときの係数たちの関係式等））（[T3]を参照）を求めるプログラムを作成する。これを実行する際にも、先に述べたことと同様にGröbner 基底の理論及び Wu's method の手法を用いる。

3) 汎用解析システムの開発

1),2)の結果を用いることにより、定義方程式を計算機に入力すると、その曲線または曲面がどこにどのような特異点を幾つ持つのかを計算し、グラフの概形とともに表示するシステムを作成する。そのために、数式処理と数値解析を融合させたプログラムを作成し、工学をはじめとする多くの分野において使用できる（簡単に使える）システムを作成する。

最終的には、1),2)の機能を持つソフトウェアを開発することをめざす。すなわち、曲線または曲面全体の状態を調べ表示する解析システムを構築することである(図1.2　において＊＊の部分）。現在、得られている、代数曲線の分類結果では、工学をはじめとする科学技術全般に対して応用できる解析システムにはならない。それは、次数が５次まででは、実用にならないからである。逆に、数学研究に対しても、高次代数曲線の分類及び全体的な特異点の状況等の情報は重要である。理論の拡張、不変量の発見等、その結果が期待される。

数式処理システム研究の動向においても、数学的に興味のある問題ばかりを解くシステムではなく、工学等の現実の問題に利用しやすい形のシステムを提供することが求められている（[Y1]）。この観点からも、本研究の発展が期待される。

参考文献

[T1] T.Takahashi (1990), Normal Forms of Quartic Curves and their Moduli, *preprint*.

[T2] T.Takahashi (1987), An Algorithm for the Normal Forms of Cubic Curves, *Gunma Technical College Review*, No. 5, pp. 19-24.

[T3] 高橋　正 (1990), Some Examples of Moduli of Singularities, 数理解析研究所講究録 722, pp. 21-33.

[Y1] 横山　和弘 (1990), Gröbner Basis の基礎, 数理解析研究所講究録 722, pp. 64-75.