数理解析研究所講究録
第 754 巻 1991 年 125-128

有限線型セル・オートマトンの状態遷移について

乃美正哉（九州工大・情報工）

1 はじめに

本稿では，有限線型セル・オートマトンの大域的な状態遷移を特徴づける不変量を定義し，遷移関数の表現行列の単因子との関連を具体的に示す．また，不動点空間の構造についても示す．

2 有限線型セル・オートマトンの不変量

状態集合 C と大域的遷移関数 τ で定義される有限線型セル・オートマトンを $\mathcal{C} =< C, \tau >$ で表す．ここで，大域的遷移関数は，ある局所的遷移関数を一様に拡張したものであると仮定するのが一般的である．頂点集合を C とし，辺集合を $\{(c_1, c_2) \mid \tau(c_1) = c_2\}$ とする有向グラフを状態遷移図といい，$G(\mathcal{C})$で表す．この節では，状態遷移図の構造が 4 種類の不変量

$$(\kappa,\ (\kappa_i)_{i=1}^{\mu},\ \Lambda,\ (c_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) \tag{1}$$

により決定されることを示す．

まず，状態遷移図の頂点集合を

$$\mathrm{Ker}\ \tau^\infty = \{c \in C \mid \tau^i(c) = 0,\ \text{for some } i \geq 0\}$$

に限ったものを *kernel tree* と呼ぶことにし，この構造を決定する．ただし後で述べる都合により，0 から 0 への辺だけは取り除いておくこととし，これを $K(\mathcal{C})$で表す．第一の不変量 κ は

$$\kappa = \dim\,(\mathrm{Ker}\ \tau^\infty)$$

で与えられる．$\mathrm{Ker}\ \tau^\infty$の部分集合の列 K_i $(i \geq 0)$ を

$$K_i = \{c \in C \mid \tau^i(c) = 0\}, \qquad (i \geq 1) \tag{2}$$

$$K_0 = \{0\} \tag{3}$$

で定義する．$K_i = \mathrm{Ker}\ \tau^\infty$ を満たす最小の i を ν と書く．k_i $(i = 1, \cdots, \nu)$ を

$$k_i' = \dim K_i - \dim K_{i-1},$$
$$k_i = k_{i+1}' - k_i' \quad (i = 1, \cdots, \nu - 1), \qquad k_\nu = k_\nu'$$

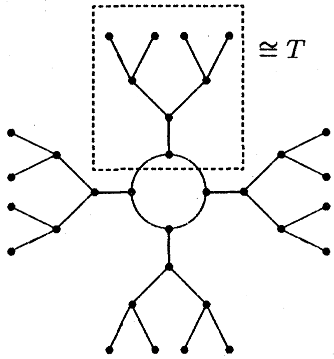
により定義し，第二の不変量 $(\kappa_1, \kappa_2, \cdots, \kappa_\mu)$ を

$$(\kappa_1, \kappa_2, \cdots, \kappa_\mu) = (1^{k_1}, 2^{k_2}, \cdots, \nu^{k_\nu})$$

により定義する．ここで i^{k_i} は $\underbrace{(i, \cdots, i)}_{k_i}$ を表し，$k_i = 0$ の時は，その成分は省略するものとする．

Theorem 2.1 *kernel tree* $K(\mathcal{C})$ の構造は二種類の不変量 κ と $(\kappa_1, \kappa_2, \cdots, \kappa_\mu)$ により決定される．

次に，$G(\mathcal{C})$全体の構造を考える．任意の tree T と loop に対し，loop の各節点に T の根を接合して得られる下図のような型のグラフを，*loop with T-nodes* と呼ぶことにする．loop with T-nodes Lに対し，loop 上の節点の個数を L の周期と呼び ord (L) で表すことにする．



Theorem 2.2 (P. Guan, Y. He) 有限線型セル・オートマトン $\mathcal{C} =< C, \tau >$ の状態遷移図 $G(\mathcal{C})$ の各連結成分はすべて *loop with $K(\mathcal{C})$-nodes* である．

Theorem 2.2, により$K(\mathcal{C})$ および各連結成分の周期を決定すれば $G(\mathcal{C})$ の構造が完全に決定されることがわかる．そこで第三の不変量 $\Lambda(\mathcal{C})$ を

$$\Lambda = \Lambda(\mathcal{C}) = \{\text{ord } (L_1), \cdots, \text{ord } (L_\rho)\}$$

で定義する．ただし，$L_1, L_2, \cdots, L_\rho$ は $G(\mathcal{C})$の各連結成分である．さらに $\lambda \in \Lambda(\mathcal{C})$ に対し，

$$c_\lambda = \#\{i \mid \text{ord } (L_i) \text{ is devided by } \lambda\}$$

と定義し，これを第四の不変量とする．

3 有限線型セル・オートマトンの大域的性質

C をある有限体 K 上の有限次元ベクトル空間とする．また $A \in M_n(K)$ を遷移関数 τ の標準基底に関する表現行列とし，${}^tJ$ をその Jordan 標準型とする．後の便宜のために J の転置行列を使用する． $e_1(t), e_2(t), \cdots, e_r(t)$ を行列 Aの単因子とし，それぞれ

$$e_k(t) = a_{k1} + a_{k2}t + \cdots + a_{kn_k}t^{n_k - 1} + t^{n_k}$$

と書かれるものとする．行列 ${}^t\tilde{A}$ を 行列 A のいわゆる第一標準型とする．上記の 3 つの線型写像の関係は下図で表される．この図形は可換ではないが，行列 Aに応じて $\overline{K}^n$ の部分集合をとれば，可換となる．

$$\begin{array}{ccc}
\overline{K}^n & \xrightarrow{{}^tJ} & \overline{K}^n \\
{\scriptstyle {}^tP}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle {}^tP^{-1}} \\
F_2^n & \xrightarrow{{}^t\tilde{A}} & F_2^n \\
{\scriptstyle Q}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle Q^{-1}} \\
F_2^n & \xrightarrow[A]{} & F_2^n
\end{array}$$

様相 $v \in C$ の多項式表現を以下の様に定義する．まず $w = Qv$ の各成分を

$$ {}^t w = ({}^t w_1, {}^t w_2, \cdots, {}^t w_r), \qquad w_k \in K^{n_k}, $$
$$ {}^t w_k = (w_{k1}, w_{k2}, \cdots, w_{kn_k}), \qquad (1 \le k \le r) $$

と書き，これを使って多項式 $f_k(t)$ を

$$ f_k(t) = w_{k1} + w_{k2}t + \cdots + w_{kn_k}t^{n_k - 1} \qquad (1 \le k \le r) $$

と定義する．r 個の多項式の組

$$ (f_1(t), f_2(t), \cdots, f_r(t)) $$

を v の多項式表現と定義し，$f_v(t)$ で表す．様相 v を $f_v(t)$ に写す写像は同型

$$ K^n \cong \bigotimes_{k=1}^{r} (K[t] \bmod \deg n_k) $$

を与える．従って，様相の多項式表現は条件 $\deg(f_k(t)) < n_k$，$(1 \le k \le r)$ の下で一意に決定される．

次に，多項式表現を用いて様相 v の周期を求める．ここで周期とは $\tau^i(v) = v$ を満たす最小の i のことである．いま多項式 $e_r(t)$ が

$$ e_r(t) = t^{m_0} \prod_{i=1}^{\mu} e_{ri}(t)^{m_i}, \qquad e_{ri}(t) : \text{既約} $$

の様に既約分解されたとする．1 つの因子 $e_{ri}(t)$ の根はすべて K 上共役であるから，それらの乗法位数もすべて等しく条件

$$ e_{ri}(t) | (t^n - 1) $$

を満たす最小の n として与えられる．これを ord $(e_{ri}(t))$ で表す．いま $\alpha \in \overline{K}$ を $e_{ri}(t)$ の一つの根とする．このとき Jordan block $J(\alpha, j)$ の乗法位数を ord $(e_{ri}(t)^j)$，$(1 \le j \le m_i)$ と書く．ただし ord $(e_{ri}(t)^0) = 1$ とする．

Theorem 3.1 不変量 $\Lambda(\mathcal{C})$ は

$$ \Lambda(\mathcal{C}) = \{\text{l.c.m.}(\text{ord } (e_{r1}(t)^{j_1}), \cdots, \text{ord } (e_{r\mu}(t)^{j_\mu}) \mid j_i = 0, 1, \cdots, m_\mu\} $$

により与えられる．

ある様相の位数 $\lambda \in \Lambda(\mathcal{C})$ をとり，これを固定する．位数 λ を持つ様相の個数を数えるため，判別式 $\Phi_\lambda(t)$ を定義する．各因子 $e_{ri}(t)$ $(1 = 1, \cdots, \mu)$ に対し，条件 ord $(e_{ri}(t)^j)|\lambda$ を満たす最大の j を j_i で表す．判別式は

$$ \Phi_\lambda(t) = t^{m_0} \prod_{i=1}^{\mu} e_{ri}(t)^{m_i - j_i} $$

で定義される．ただし $m_i < j_i$ の場合その因子は取り除くものとする．

Theorem 3.2 様相 $v \in C$ の多項式表現を $f_v = (f_1(t), f_2(t), \cdots, f_r(t))$ とする．また，$\lambda \in \Lambda(\mathcal{C})$ とする．このとき，ord $(v)|\lambda$ となる必要十分条件は $\Phi_\lambda(t)|f_k(t)$，$(k = 1, 2, \cdots, r)$ である．

Theorem 3.3 様相 $v \in C$ に対し，

$$ v \in Im\, \tau^\infty \iff (t^{\kappa_1}, \cdots, t^{\kappa_r}) | f_v(t), $$
$$ v \in Ker\, \tau^\infty \iff (e'_1(t), \cdots, e'_r(t)) | f_v(t) $$

が成り立つ．

これにより直ちに周期が $\lambda \in \Lambda(\mathcal{C})$ もしくはその約数となる様相の個数を求めることができる.

Theorem 3.4 有限体 K の位数を q とすれば

$$c_\lambda = q^{\sum_{k=1}^{r} \min((n_k - deg\ \Phi_\lambda(t)),\ 0)}$$

が成り立つ.

Theorem 3.5 不変量 $\kappa_1, \kappa_2, \cdots, \kappa_r$ は

$$e_i(t) = t^{\kappa_i} e_i'(t), \quad t \nmid e_i'(t)$$

により与えられる. 従って $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_r$ となる.

4 有限線型セル・オートマトンの不動点

この節では不動点について考察する. いま

$$(t-1) \nmid e_k(t), \qquad (k = 1, \cdots, r')$$
$$(t-1) \mid e_k(t), \qquad (k = r'+1, \cdots, r)$$

が成り立っているとする. もし $(t-1)|e_1(t)$ ならば $r' = 0$ と定義し, $(t-1) \nmid e_r(t)$ ならば $r' = r$ と定義する. このとき多項式表現

$$f_{v_k}(t) = (0, \cdots, 0, \frac{e_k(t)}{t-1}, 0, \cdots, 0)$$

により定義される様相を v_k $(r'+1 \le k \le r)$ と書く.

Theorem 4.1 有限線型セル・オートマトン $\mathcal{C} = < C, \tau >$ の不動点全体の空間は,

$$F(\mathcal{C}) = < f_{v_k}(t) >_{k=r'+1}^{r}$$

で与えられる. $r' = r$ のときは, 自明でない不動点は存在しない. 従って、有限体 K の位数を q とすれば, 不動点の個数は, $f = q^{r-r'}$ となる.

References

[1] P. Guan, Y. He, Exact results for deterministic cellular automata with additive rules, J. of Statist. Phys, Vol. 43. 3/4 (1986).

[2] E. Jen, Cylindrical cellular automata, Commun. Math. Phys, 118 (1988), 569-590.

[3] E. Jen, Global properties of cellular automata, J. of Statist. Phys, Vol 43. Nos. 1/2 (1986).

[4] 河原康雄, Existence of Huzino's characteristic number associated with cellular automata with local transition rule 90.

[5] 北川敏男, 藤野精一, n 次元連立 1 次合同型反復模型とその挙動解析, Research Report of Mathematics of Computation, 64-09J (1989).

[6] O. Martin, A. M. Odlyzko, S. Wolfram, Algebraic properties of cellular automata, Commun. Math. Phys, 93 (1984), 219-258.

[7] 松本真, セルオートマトン $CA-90(m)$ について, ノート, (1988).

[8] 乃美正哉, On a polynomial representation of finite linear cellular automata, Bull. of Informatics and cybernetics, 24 No. 3/4 (1991).

[9] S. Wolfram, Statistical mechanics of cellular automata, Rev. Mod. Phys, 55 (1982).