数理解析研究所講究録
第754巻 1991年 129-134

線形セル環について

東洋大学工学部　佐藤　忠一

1. まえがき

セル構造オートマトンにおいて，セルの状態数が有限の場合「並列写像が単射であることとそれが逆変換を持つこととは等価である。その結果，並列写像が単射ならばそれは全射である。」ということが知られている。しかし，セルの状態数が無限の場合には，もはや上記の関係は一般には成り立たない。

文献［４］において線形セル構造オートマトンにおけるセルの状態集合として無限環の場合を論じている。単にセルの状態数を無限にしたのでは，線形セル構造オートマトンの持つ豊かな代数構造が失われてしまう。そこで，どのような環ならば有限状態と同じような議論ができるかという意味で，線形セル環なる新しい環が導入された。

可換環Ｒが線形セル環になるためには，Ｒの素イデアルの分布が問題となる。有限環と異なり無限環の場合，その素イデアルも一般に無限個あらわれる。そのために何らかのtopology的な取り扱いが必要になる。Ｒのすべての素イデアルの集合をSpec(Ｒ)で表すとSpec(Ｒ)にはZariski位相とよばれる位相が定まるが，この位相は線形セル構造オートマトンにおける局所関数の単射性・全射性を論じる際にすでに現われていたものである。

本論文では，Zariski位相を用いて線形セル構造オートマトン，線形セル環を論じる。最後に線形セル環の行列環への一つの応用を述べる。

2．準備

R上の線形セル構造オートマトンとは（Z^k，R，N，f）で与えられ，Zは整数の集合，Z^kはk次元セル空間，Rは環で各セルが取り得る状態の集合を表す。NはZ^kの有限部分集合で$N=\{v_1,\cdots,v_n\}$，Nは近傍を表す。fは$R^n\to R$なる線形写像で$f=\Sigma a_j x_j$である。fはスコープ幅nの線形局所関数と呼ばれる。Z^kからRへの写像を様相という。様相の集合をC(R)で表す。fに対して，$f\infty$：C(R)→(R)を次のように定める。　u，w ∈ C(R) および $r\in Z^k$ に対して

$$f\infty(u)=w \Longleftrightarrow w(r)=\Sigma a_j u(r+v_j)$$

ここで，$r+v_1,\cdots,r+v_n$ なるn個のセルはセルrの近傍と呼ばれる。$f\infty$ を線形並列写像という。

$f\infty$がC(R)上で単射のときfはR上で単射といい，$f\infty$がC(R)上で全射のときfはR上で全射という。また，$f\infty$がC(R)上で逆変換を持つときfはR上で逆変換を持つという。

3．Zariski 位相

Rを環（単位元1を有する可換環）とする。Rの素イデアルの全体（ただし，R自身をのぞく）の集合を Spec(R) で表す。

Sを Rの任意の部分集合とし，

$$V(S)=\{p\in \mathrm{Spec}(R)\mid S\subseteq p\}$$
$$D(S)=\mathrm{Spec}(R)-V(S)$$

とする。また，Rの部分集合Sによって生成されるRのイデアルをαとする。このとき $V(S)=V(\alpha)=V(\mathrm{rad}\ \alpha)$ が成り立つ。したがって，$D(S)=D(\alpha)=D(\mathrm{rad}\ \alpha)$ が成り立つ。

次の命題1はV(S)全体を考え 各V(S)を閉集合と考えることにより，空間 Spec(R) に位相を定義する。このことは命題2で示すように D(S)を開集合と考えることにより，空間 Spec(R) に位相を定義するということと全く同じことである。

命題1 [5] 次の(1)〜(4)が成り立つ。

(1) $\mathrm{Spec}(R) = V(\{0\})$

(2) $\phi = V(\{1\})$

(3) 有限個の $V(S1)$, $V(S2)$, $\cdots$, $V(Sm)$ が与えられているとする。このとき, $\cup_{i=1}^{m} V(Si) = V(S)$ をみたすRの部分集合Sが存在する。

(4) 有限または無限個の $V(Si)$; $i \in I$ が与えられているとする。このとき, $\cap_{i \in I} V(Si) = V(\cup_{i \in I} Si)$ が成り立つ。

命題2 [5] 次の(1)〜(4)が成り立つ。

(1) $\phi = D(\{0\})$

(2) $\mathrm{Spec}(R) = D(\{1\})$

(3) 有限個の $D(S1)$, $D(S2)$, $\cdots$, $D(Sm)$ が与えられているとする。このとき, $\cap_{i=1}^{m} D(Si) = D(S)$ をみたすRの部分集合Sが存在する。

(4) 有限または無限個の $D(Si)$; $i \in I$ が与えられているとする。このとき, $\cup_{i \in I} D(Si) = D(\cup_{i \in I} Si)$ が成り立つ。

$a \in R$ に対して, $D(a)$ が開集合のベースになっていることが命題2の(4)よりわかる。

二つの可換環 R1, R2 に対して $h : R1 \rightarrow R2$ なる環準同型写像が与えられているとき, $h_* : \mathrm{Spec}(R2) \rightarrow \mathrm{Spec}(R1)$ なる写像が次のようにして自然に定義される。この h_* をhの同伴写像という。

$$h_*(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_1 \Longleftrightarrow h^{-1}(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_1$$

ここで $\mathfrak{p}_1 \in \mathrm{Spec}(R1)$, $\mathfrak{p}_2 \in \mathrm{Spec}(R2)$ である。

このとき $h_*^{-1}(D(a)) = D(h(a))$ が成り立つ。
したがって, h_* は連続写像になる。それ故, R1とR2が同型ならば Spec(R1) と Spec(R2) は同相である。しかし, その逆は成り立たない。

次の定理１は Zariski 位相の立場から，線形局所関数の単射性全射性について述べたものである。

<u>定理１</u>　Rを Spec(R) が有限集合 かつ dim R＝０の可換環とする。 $f = \Sigma a_i x_i$ をR上の線形局所関数とする。
このとき，次の各命題が成り立つ。
（１） fはR上で全射である ⟺ ∪D(aj) ＝Spec(R)。
（２） fはR上で単射である ⟺ ∪D(aj)は Spec(R) の分割。

<u>系　１</u>　IをRの任意イデアルとするとき，次の各命題が成り立つ
（１） fがR上で全射ならば fは R／I 上でも全射である。
（２） fがR上で単射ならば fは R／I 上でも単射である。
（証明） h：R→R／Iとする。 h^{-1}の連続性と定理１より成立。

<u>系　２</u>　JをRのすべての素イデアルの共通集合とし， I ⊆ J なる任意のJに対して，次の各命題が成り立つ。
（１） fがR上で全射である ⟺ fは R／I 上で全射である。
⟺ fは R／J 上で全射である。
（２） fがR上で単射である ⟺ fは R／I 上で単射である。
⟺ fは R／J 上で単射である。
（証明） Spec(R), Spec(R／I) および Spec(R／J)はすべて同相となり，定理１より成り立つ。

<u>注　１</u>　Spec(R) が有限集合で，かつ dim R＝０なる可換環のクラスは可換なアルテイン環のクラスを真に含む。

<u>補題１</u>　a，b∈Rに対して，次の（１）～（３）が成り立つ。
（１） D(a+b) ⊆ D(a) ∪ D(b)
（２） D(a) ∩ D(b)＝φ ならば D(a+b)＝D(a) ∪ D(b)
（３） D(a・b)＝D(a) ∩ D(b)

<u>系　３</u>　Rを定理１で述べた環とするとき，R上の線形局所関数 f＝Σajxjが単射になるための必要かつ十分条件はΣajがRの単元で，かつi≠jならばai・ajはべき零元となることである。
（証明） 定理１と補題１より成り立つ。

<u>定義１</u>　R上の線形局所関数fに対してある二つの係数を加えてスコープ幅を一つ縮めることを縮約という。

<u>定理２</u>　Rを定理１で述べた環とするとき，R上の単射である線形局所関数は縮約に関して閉じている。
（証明） 定理１と補題１より成り立つ。

4. 線形セル環

<u>定義2</u>　環Rがセル環とはR上のすべてのセル構造オートマトンの並列写像が単射ならばそれは逆変換を持つときにいう。また，Rが線形セル環とはR上のすべての線形セル構造オートマトンの並列写像が単射ならばそれは逆変換を持つときにいう。従って，セル環は線形セル環である。以下ではRは単位元を持つ可換環を表す。

<u>定理3</u>　Rのすべての素イデアルの共通集合をJで表す。この時次の各命題はすべて等価である。

（1）Rは線形セル環である。

（2）R／J は線形セル環である。

（3）$I \subseteq J$なる任意のイデアルIに対して，R／I は線形セル環である。

<u>系　4</u>　$h : R_1 \to R_2$ を上への準同型写像とする。$\mathrm{Spec}(R_1)$と$\mathrm{Spec}(R_2)$が同相のとき，R_1とR_2のうちどちらか一方が線形セル環ならば他方もそうである。

<u>系　5</u>　Rが唯一の素イデアルを持てばRは線形セル環である。

<u>系　6</u>　Rが$|\mathrm{Spec}(R)| = 1$を満足するとき，Rと同相な可換環は線形セル環である。

<u>注　2</u>　Z_mをm法とする剰余環とし，Fを任意の可換体とする。このとき，$\mathrm{Spec}(Z_2) \simeq \mathrm{Spec}(Z_4) \simeq \mathrm{Spec}(F)$が成り立つ。

<u>注　3</u>　$\mathrm{Spec}(R) = \{p_1, p_2\}$とする。（ただし，$p_1 \subsetneq p_2$）このとき，$\mathrm{Spec}(R) \not\simeq \mathrm{Spec}(Z_6)$

<u>定理4</u>　R_1が$|\mathrm{Spec}(R_1)| \leqq 2$を満足し，$R_1$と$R_2$が同相のとき，いずれか一方が線形セル環ならば他方もそうである。

<u>定理5</u>　各R_iが線形セル環ならば直積環ΠR_iもそうである。

<u>系　7</u>　各R_iが$|\mathrm{Spec}(R_i)| = 1$のとき，直積環ΠR_iは線形セル環である。

<u>注　4</u>　線形セル環のクラスはネーター環のクラスに含まれない。

次に線形セル環の行列環への応用を述べる。
Rが単位元1を持つ線形セル環の場合，可換・非可換を問わず1スコープの線形局所関数において，次の性質が成り立つ。

<u>性質1</u>　$f = ax$ に対して，次の各命題はすべて等価である。

（1）fはR上で逆変換を持つ。

（2）fはR上で単射である。

（3）fはR上で全射である。

<u>定理6</u>　可換体F上のn次の行列環Mn(F)は線形セル環である。

<u>定理7</u>　Mn(F)上の線形局所関数fに対して，次の各命題が成り立つ。ここでVn(F)は可換体F上のn次元ベクトル空間。

（1）fはMn(F)上で逆変換を持つ⟺fはVn(F)上で逆変換を持つ。

（2）fはMn(F)上で単射である⟺fはVn(F)上で単射である。

（3）fはMn(F)上で全射である⟺fはVn(F)上で全射である。

<u>系　8</u>　Vを可換体上の有限次元ベクトル空間とし，AをVから自分自身への線形変換の行列表現とする。このとき次の各命題はすべて等価である。

（1）Aは正則行列である。

（2）Aは単射である。

（3）Aは全射である。

（証明）性質1，定理6，定理7より成り立つ。

参考文献

1. G.A.Hedlund, Endmorphisms and automorphisms of the shift dynamical systems ,Math.Systems Theory 3 1969
2. D.Richadson, Tessellations with local transformations, J.Com.System Sci 5 1972
3. 佐藤忠一， 線形ｾﾙ構造ｵｰﾄﾏﾄﾝのｲﾃﾞｱﾙ論的ｱﾌﾟﾛｰﾁＩ，Ⅱ 数理解析研究所講究録 458 1982, 522 1984
4. 佐藤忠一， 無限環上の線形ｾﾙ構造ｵｰﾄﾏﾄﾝ，科研費総合研究A「ｾﾙ構造に基づく高度並列情報処理ｼｽﾃﾑに関する総合的研究A」1990
5. 成田正雄， ｲﾃﾞｱﾙ論入門，共立全書