

境界付き NLC グラフ文法の性質

日本電気 山崎浩一 (Koichi Yamazaki)
東京電機大学 夜久竹夫 (Takeo Yaku)
東京電機大学 西野哲朗 (Tetsuro Nishino)

1 あらまし

NLC グラフ文法に対しては, Janssens と Rozenberg により排出グラフ言語 (非終端記号を伴うグラフを含む) に関するポンプの補題が示されている. 我々は対象を境界付き NLC (BNLC) グラフ文法に制限すると BNLC グラフ言語 (終端記号だけからなる) に関して同様のポンプの補題が成り立つことを示す.

2 準備

本稿で用いられる定義, 記法の詳細は文献 [4,5] にゆずり, 本稿では重要なものだけにとどめる.

[定義 1] Node-Label-Controlled グラフ文法 (NLC 文法) G とは, $G = (\Sigma, \Delta, P, conn, Z_{ax})$ である. ここで Σ は空でないラベルの有限集合である. Δ は Σ の空でない有限部分集合で 終端ラベルの集合 と呼ばれる. P は組 (d, Y) の有限集合で, $d \in \Sigma, Y \in G_{\Sigma}$ を満たす. P の元は 生成規則 と呼ばれる. $conn$ は Σ から 2^{Σ} への関数で 連結関数 と呼ばれる. Z_{ax} は 公理 と呼ばれる Σ の元でラベル付されたグラフである.

■

[定義 2] 境界付き NLC グラフ文法 (BNLC 文法) G とは次の 2 つの条件 (1), (2) を満たす NLC 文法 $G = (\Sigma, \Delta, P, conn, Z_{ax})$ のことである.

(1) Z_{ax} は $\Sigma - \Delta$ 境界付きグラフである。

(2) 全ての $(d, Y) \in P$ に対し, $d \in \Sigma - \Delta$, Y は $\Sigma - \Delta$ 境界付きグラフである。 ■

文法 G の排出言語とは, グラフの集合 $\{X \in G_\Sigma \mid Z_{ax} \Rightarrow_G^* X\}$ のことをいい $S(G)$ で表す. 文法 G の言語とは, グラフの集合 $\{X \in G_\Delta \mid Z_{ax} \Rightarrow_G^* X\}$ のことをいい $L(G)$ で表す.

$x \neq y$, $y \in \text{hist}_D(x)$, $\text{hist}_D(x) = (z_0, z_1, \dots, z_m)$, $\text{hist}_D(y) = (z_0, z_1, \dots, z_n)$, $m < n$ とする. このとき, 列 $(z_m, z_{m+1}, \dots, z_n)$ を $\underline{\text{hist}_D(x, y)}$ で表す.

導出

$$D: X_0 \Rightarrow_{(x_0, Y_1)} X_1 \Rightarrow_{(x_1, Y_2)} \dots \Rightarrow_{(x_{n-1}, Y_n)} X_n$$

$$D': X'_0 \Rightarrow_{(x'_0, Y'_1)} X'_1 \Rightarrow_{(x'_1, Y'_2)} \dots \Rightarrow_{(x'_{n-1}, Y'_n)} X'_n$$

が同型とは, $\bigcup_{i=1}^n V_{X_i}$ から $\bigcup_{i=1}^n V_{X'_i}$ への同型写像 h が存在し,

(1) 各 $1 \leq i \leq n$ に対し, $h|_{V_{X_i}}$ は X_i から X'_i への同型写像で,

(2) 各 $x \in V_D$ に対して, $h(\text{pred}_D(x)) = \text{pred}_D(h(x))$

が成り立つときをいう.

NLC 排出グラフ言語のポンプの補題 (1980 Janssens, Rozenberg

[4])

$G = (\Sigma, \Delta, P, \text{conn}, Z_{ax})$ を NLC 文法とし, $M \in S(G)$ を $\#V_M > \#V_{Z_{ax}} \cdot [\text{maxr}(G)]^{|\Sigma|}$ を満たすグラフとする. このとき各正整数 n に対し以下の性質を満たすグラフ $M_n \in S(G)$ が存在する.

性質

(1) $2 \leq \#V_{M'} \leq [\text{maxr}(G)]^{|\Sigma|}$

(2) $\#(V_{M'\setminus\alpha}) \geq 1$

(3) $M \setminus \alpha \leq M_n$

(4) $M_n \setminus M''$ は $(M')_{B,\alpha}^{(n)}$ と同型で,

(5) 各 $3 \leq i \leq n$ に対し, $\{(x, y) \mid x \in V_{M''}, y \in V_{M'\setminus\alpha}, \{x, h_i(y)\} \in M_n\} = \{(x, y) \mid x \in V_{M''}, y \in V_{M'\setminus\alpha}, \{x, h_3(y)\} \in M_n\}$

ここで M', M'' は M の誘導部分グラフで $M' = M \setminus M''$ を満たす. α は M' の誘導部分グラフ. $B = (B_1, B_2)$ は, $V'_M \times V'_M$ の部分集合である. h_1, h_2, \dots, h_n は M' からそれぞれの M' のコピーへの同型写像である.

3 BNLC グラフ言語に対するポンプの補題

この節ではいくつかの必要な定義を行った後いくつかの補題を証明し, それらを用いて BNLC 言語に対するポンプの補題を示す.

G を BNLC 文法とし,

$$D: X_0 \Rightarrow_{(x_0, Y_1)} X_1 \Rightarrow_{(x_1, Y_2)} \cdots \Rightarrow_{(x_{n-1}, Y_n)} X_n$$

を G における導出とする. 導出 D において, 書き換えられた非終端節の集合 $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ を C_D で表す.

導出 D が (x_p, x_q) に関して 反復可能な導出を含む とは, 導出 D が節 x_p, x_q に対して以下の2つの条件を満たすことをいう.

(1) $x_p, x_q \in C_D$ ($p < q$) かつ

(2) $x_p \in \text{hist}_D(x_q)$ かつ $\varphi_D(x_p) = \varphi_D(x_q)$

列 $(x_{i(0)}, x_{i(1)}, \dots, x_{i(t-1)})$ を C_D の部分集合 $M = \{x_i \in C_D \mid x_q \in \text{hist}_D(x_i) \text{ か}$

つ $x_q \notin \text{hist}_D(x_l)$ の元 x_l を添え字 l の小さい順に並べた列とする (便宜上 $M=t$ とする). また, $i(t)=q$ とする. このとき

$$D^{\text{orig}} : X_0^{\text{orig}} \Rightarrow_{(x_{i(0)}, Y_{i(0)+1})} X_1^{\text{orig}} \cdots \Rightarrow_{(x_{i(t-1)}, Y_{i(t-1)+1})} X_t^{\text{orig}}$$

を導出 D の (x_p, x_q) に関する反復可能な導出であるといひ, $\text{orig}(D, x_p, x_q)$ で表す.

ここで X_0^{orig} は節 $x_{i(0)}$ だけからなるグラフである.

任意の正整数 s に対して, $D_j^{\text{copy}} (1 \leq j \leq s)$ を $\text{orig}(D, x_p, x_q)$ と同型で以下の条件 (1) から (3) を満たす導出とする. また $\text{orig}(D, x_p, x_q)$ から D_j^{copy} への同型写像を h_j とする.

各 $1 \leq j \leq s$ に対して

$$D_j^{\text{copy}} : X_0^j \Rightarrow_{(x_{i(0)}^j, Y_{i(0)+1}^j)} X_1^j \cdots \Rightarrow_{(x_{i(t-1)}^j, Y_{i(t-1)+1}^j)} X_t^j$$

$$(1) h_j : V_{\text{orig}(D, x_p, x_q)} \rightarrow V_{D_j^{\text{copy}}}, x_l \mapsto x_l^j, \text{ ここで } l \in \{i(0), i(1), \dots, i(t-1), i(t)\}.$$

$$(2) V_{\text{orig}(D, x_p, x_q)} \cap V_{D_1^{\text{copy}}} = \{x_p = x_{i(0)}^1\},$$

$$\text{各 } 2 \leq j \leq s \text{ に対し, } V_{\text{orig}(D, x_p, x_q)} \cap V_{D_j^{\text{copy}}} = \emptyset$$

$$(3) \text{ 各 } 1 \leq j \leq s-1 \text{ に対し, } V_{D_j^{\text{copy}}} \cap V_{D_{j+1}^{\text{copy}}} = \{x_{i(t)}^j\} \text{ かつ } x_{i(t)}^j = x_{i(0)}^{j+1},$$

$$(4) |i-j| \geq 2 \text{ を満たすすべての } 1 \leq i, j \leq s \text{ に対して, } V_{D_i^{\text{copy}}} \cap V_{D_j^{\text{copy}}} = \emptyset.$$

このとき

$$\begin{aligned} D_s^{\text{pump}} : X_0^{\text{pump}} &\Rightarrow_{(x_0, Y_1)} X_1^{\text{pump}} \cdots \Rightarrow_{(x_{q-1}, Y_q)} X_q^{\text{pump}} \\ &\Rightarrow_{(x_{i(0)}^1 (=q), Y_{i(0)+1}^1)} X_{q+1}^{\text{pump}} \cdots \Rightarrow_{(x_{i(t-1)}^1, Y_{i(t-1)+1}^1)} X_{q+t}^{\text{pump}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (x_{i(0)}^2 (=q), Y_{i(0)+1}^2) X_{q+t+1}^{pump} \quad \cdots \quad \Rightarrow (x_{i(t-1)}^2, Y_{i(t-1)+1}^2) X_{q+2t}^{pump} \\
&\quad \vdots \\
&\Rightarrow (x_{i(0)}^s, Y_{i(0)+1}^s) X_{q+(s-1)t+1}^{pump} \quad \cdots \quad \Rightarrow (x_{i(t-1)}^s, Y_{i(t-1)+1}^s) X_{q+st}^{pump} \\
&\Rightarrow (x_{i(t)}^s, Y_{q+1}) X_{q+st+1}^{pump} \\
&\Rightarrow (x_{q+1}, Y_{q+2}) X_{q+2+st}^{pump} \quad \cdots \quad \Rightarrow (x_{n-1}, Y_n) X_{n+st}^{pump}
\end{aligned}$$

を導出 D の (x_p, x_q) に関する s 回ポンピング導出と呼び、

$\text{pump}(D, x_p, x_q, s)$ で表す。

写像 h^{-1} を次のように定義する、すなわち、もし $x \in V_{D_j^{copy}}$ のとき $h^{-1}(x) = h_j^{-1}(x)$ 。

このとき、以下の補題1から4が成り立つ。

[補題 1] もしグラフ $X_n \in G_\Delta$ ならば $X_t^{orig} - x_q \in G_\Delta$ である。

(証明) 略 ■

D_j^{copy} ($1 \leq j \leq k$) から構成される導出 D_k^{iter} と集合 B_1, B_2 を以下のよ
うに定義したとき、次の補題2と3が成り立つ。

$$\begin{aligned}
D_k^{iter} : X_0^{iter} &\Rightarrow (x_{i(0)}^1, Y_{i(0)+1}^1) X_1^{iter} \quad \cdots \quad \Rightarrow (x_{i(t-1)}^1, Y_{i(t-1)+1}^1) X_t^{iter} \\
&\Rightarrow (x_{i(0)}^2, Y_{i(0)+1}^2) X_{t+1}^{iter} \quad \cdots \quad \Rightarrow (x_{i(t-1)}^2, Y_{i(t-1)+1}^2) X_{2t}^{iter} \\
&\quad \vdots \\
&\Rightarrow (x_{i(0)}^k, Y_{i(0)+1}^k) X_{(k-1)t+1}^{iter} \quad \cdots \quad \Rightarrow (x_{i(t-1)}^k, Y_{i(t-1)+1}^k) X_{kt}^{iter}
\end{aligned}$$

ここで X_0^{iter} は節 $x_{i(0)}^1$ だけからなるグラフである。

- (1) $B_1 = \{(h_1^{-1}(x), h_2^{-1}(y)) \mid \{x, y\} \in E_{X_{2t}^{iter}}, x \in V_{X_t^{iter}}, y \notin V_{X_t^{iter}}, y \in V_{X_{2t}^{iter}} (y \neq x_{i(t)}^2), \{x, x_{i(t)}^2\} \notin E_{X_{2t}^{iter}}\}$

$$(2) B_2 = \{(h_1^{-1}(x), h_2^{-1}(y)) \mid \{x, y\} \in E_{X_{2t}^{iter}}, x \in V_{X_t^{iter}}, y \notin V_{X_t^{iter}}, y \in V_{X_{2t}^{iter}} (y \neq x_{i(t)}^2), \{x, x_{i(t)}^2\} \in E_{X_{2t}^{iter}}\}$$

[補題 2] 各正整数 $2 \leq k$ に対し, 以下が成り立つ. すなわち $x \in V_{X_{(k-1)t}^{iter}} (x \neq x_{i(t)}^{k-1})$ に対して,

(1) $x \notin V_{X_{(k-2)t}^{iter}}$ で, ある節 $y \in V_{X_t^{iter}}$ が存在し $(h^{-1}(x), y) \in B_1$. または

(2) ある節 $y \in V_{X_t^{iter}}$ が存在し $(h^{-1}(x), y) \in B_2$

ならば $\{x, x_{i(0)}^k\} \in E_{X_{kt}^{iter}}$ である.

(証明) 略 ■

[補題 3] 任意の正整数 $2 \leq k$ に対して, X_{kt}^{iter} と $X_t^{orig(k)}_{B, x_{i(t)}}$ は同型である.

(証明) k に関する帰納法を用いて証明する.

初期段階 $k=2$ のとき, 導出 D_k^{iter} と集合 B_1, B_2 の定義より明らか.

帰納段階 $X_{(k-1)t}^{iter}$ まで成り立つと仮定して X_{kt}^{iter} を考える.

$X_t^{orig(k)}_{B, x_{i(t)}}$ を構成する X_t^{orig} と同型な k 個のグラフを $X_t^j (1 \leq j \leq k)$ とする. すなわち, グラフ $X_t^{orig(k)}_{B, x_{i(t)}}$ と X_{kt}^{iter} は構成される方法が異なるだけで, 同じ節から構成される. また写像 g_i を $g_i : V_{X_t^{orig}} \rightarrow V_{X_t^j}$ とする. このとき $h_j|_{V_{X_t^{orig}}} = g_i$. また, 写像 g^{-1} を次のように定義する, すなわち, もし $x \in V_{X_t^j}$ のとき $g^{-1}(x) = g_j^{-1}(x)$.

仮定より $x \in V_{X_{(k-1)t}^{iter}}, y \in V_{X_{kt}^{iter}} - V_{X_{(k-1)t}^{iter}}$ に関する辺についてののみを考えれば十分である.

逆も同様にして証明できるので, ここでは $\{x, y\} \in X_t^{orig(k)}_{B, x_{i(t)}}$ ならば $\{x, y\} \in X_{kt}^{iter}$ のみを示す.

$\text{hist}_D(x_{i(0)}^2, h^2 \circ h^{-1}(y)) = (u_0, u_1, \dots, u_m)$ とする.

$\{x, y\} \in X_t^{\text{orig}(k)}_{B, x_{i(0)}}$ より $(g^{-1}(x), g^{-1}(y)) \in B_1 \cup B_2$.

このとき以下の2つについてのみ考えれば十分である.

(1) $\{x, y\} \in \{g_{k-1}(u), g_k(v)\} \mid (u, v) \in B_1\}$

(2) $\{x, y\} \in \{g_i(u), g_k(v)\} \mid (u, v) \in B_2, 1 \leq i \leq k-1\}$

(1) の場合

B_1 の定義より $x \notin V_{X_{(k-2)t}^{\text{iter}}}$. 従って補題2より $\{x, x_{i(0)}^k\} \in E_{X_{kt}^{\text{iter}}}$. また, B_1 の定義より, $(g_{k-1}^{-1}(x), g_k^{-1}(y)) \in B_1$. これは, $\{h^{-1}(x), h_2 \circ h^{-1}(y)\} \in E_{X_{2t}^{\text{iter}}}$ を意味する. 従って, 各 $0 \leq j \leq m$ に対し $\varphi_{D_k^{\text{iter}}}(h^{-1}(x)) \in \text{conn}(\varphi_{D_k^{\text{iter}}}(u_j))$. よって, 各 $0 \leq j \leq m$ に対し $\varphi_{D_k^{\text{iter}}}(x) \in \text{conn}(\varphi_{D_k^{\text{iter}}}(h_k \circ h^{-1}(u_j)))$. 結局 $\{x, y\} \in E_{X_{kt}^{\text{iter}}}$.

(2) の場合

補題2より $\{x, x_{i(0)}^k\} \in E_{X_{kt}^{\text{iter}}}$. 従って(1)の場合と同様に $\{x, y\} \in E_{X_{kt}^{\text{iter}}}$. ■

[補題4] D を導出, s を任意の正整数とし, D^p を D の (x_p, x_q) に関する s 回ポンピング導出とする. また, X を D が導出するグラフとし, X^p を D^p が導出するグラフとする. このとき, もし $X \in G_\Delta$ ならば $X^p \in G_\Delta$ である.

(証明) 略 ■

次に補題1から4を用いて, BNLC言語のポンプの補題を証明する.

[定理1] (BNLCグラフ言語のポンプの補題) $G = (\Sigma, \Delta, P, \text{conn}, Z_{ax})$ をBNLC文法とし, $M \in L(G)$ を $\#V_M > \#V_{Z_{ax}} \cdot [\text{maxr}(G)]^{12}$ を満たすグラフとする. このとき各正整数 s に対し以下の性質を満たすグラフ $M_s \in L(G)$ が存在する.

- (1) $2 \leq \#V_{M'} \leq [\max r(G)]^{|\Sigma|}$
- (2) $\#(V_{M'} \setminus \alpha) \geq 1$
- (3) $M \setminus \alpha \leq M_s$
- (4) $M_s \setminus M''$ は $(M')_{B, \alpha}^{(s)}$ と同型で,
- (5) 各 $3 \leq i \leq s$ に対し, $\{(x, y) \mid x \in V_{M''}, y \in V_{M'} \setminus \alpha, \{x, h_i(y)\} \in M_s\} =$
 $\{(x, y) \mid x \in V_{M''}, y \in V_{M'} \setminus \alpha, \{x, h_3(y)\} \in M_s\}$

ここで M', M'' は M の誘導部分グラフで $M' = M \setminus M''$ を満たす. α は M' の誘導部分グラフ. $B = (B_1, B_2)$ は, $V'_M \times V'_M$ の部分集合である. h_1, h_2, \dots, h_s は M' からそれぞれの M' のコピーへの同型写像である.

(証明) 導出

$$D: X_0 \Rightarrow_{(x_0, Y_1)} X_1 \Rightarrow_{(x_1, Y_2)} \dots \Rightarrow_{(x_{n-1}, Y_n)} X_n = M$$

をグラフ M の導出とする. $\#V_M > \#V_{Z_{ax}} \cdot [\max r(G)]^{|\Sigma|}$ より $x_p \in \text{hist}_D(x_q)$ かつ $\varphi_D(x_p) = \varphi_D(x_q)$ を満たす $x_p, x_q \in C_D$ ($p < q$) が存在する. 一般にこのような添え字の組 (p, q) は複数存在するが, ここでは上記の性質を満たし p が最大となるように p, q を選ぶ. このとき導出 D は (x_p, x_q) に関して反復可能な導出を含む.

任意の正整数 s に対し, D_s^{pump} を (x_p, x_q) に関する s 回ポンピング導出とする. また, D_s^{pump} の結果を M_s とする.

M' を $\{x \in M \mid x_p \in \text{hist}_D(x)\}$ を節の集合として持つ M の誘導部分グラフとし, $M'' = M \setminus M'$ とする. また α を $\{x \in M \mid x_q \in \text{hist}_D(x)\}$ を節の集合として持つ M の誘導部分グラフとする

p, q の選び方から(1)から(3)は明か. 補題3より $M, \setminus M''$ と $(M')_{B, \alpha}^{(*)}$ は同型. (5)も補題4を用いることにより補題3と同様にして証明できる. ■

4 むすび

我々は, BNLC文法を対象とすることにより, BNLCグラフ言語に対するポンプの補題を得た.

5 参考文献

- [1] Claus, V.; Ehrig, H.; Rozenberg, G., Graph-Grammars and Their Application to Computer Science and Biology. Springer, 1979, Lect. Notes Comp. Sci. 73
- [2] Ehrig, H.; Nagle, M.; Rozenberg, G., Graph-Grammars and Their Application to Computer Science. Springer, 1983, Lect. Notes Comp. Sci. 153
- [3] Ehrig, H.; Nagle, M.; Rozenberg, G.; Rosenfeld, A., Graph-Grammars and Their Application to Computer Science. Springer, 1987, Lect. Notes Comp. Sci. 291
- [4] Janssens, D., Rozenberg, G. (1980), On the Structure of Node-Label-Controlled Graph Languages, Inf. Sci. 20, 191-216.
- [5] Rozenberg, G., Welzl, E. (1986), Boundary NLC Graph Grammars = Basic Definition, Normal Normal Forms, and Complexity, Information and Control, 69, 136-167.
- [6] Rozenberg, G., Welzl, E. (1986), Graph Theoretic Closure Properties of the Family of Boundary NLC Graph Language, Acta Informatica, 23, 289-309.
- [8] Harary, F. (1969), "Graph Theory," Addison-Wesley, Reading, Mass.