数理解析研究所講究録
第751巻 1991年 122-132

Microdifferential Equations with Non-Involutory Characteristics.

防衛大 打越 敬祐
(Keisuke Uchikoshi).

要旨 従来，Fuchsian 双曲型作用素と呼ばれていたものについて，Levi 条件のない一般的な情況で 右(左)パラメトリクスを構成する。

§0. 主要結果

$(x,\xi)\in\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^n$ とし，$\mathring{x}^*=(0,0,\cdots,0,\sqrt{-1})\in\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^n$ とする。$P\in\mathcal{E}_{\mathring{x}^*}$ が

(1) $$P(x,D)=(x_1D_1)^m+\sum_{j=0}^{m-1}P^{(j)}(x,D)(x_1D_1)^j$$

という形になっているとする。ここで，$(x_1D_1)^j=(x_1D_1)\cdots(x_1D_1)$ とし，

(2) $$\operatorname{ord}P^{(j)}\ (=P^{(j)}\text{ の階数})\le m-j-1,\qquad 0\le j\le m-1$$

とする．以下，ℓ 階作用素 $X \in \mathcal{E}_{\dot{x}}^{*}$ に対し，X の完全表象 (resp. 主要表象) を $\sigma(X)$ (resp. $\sigma_\ell(X)$) と記す．(1), (2) より，$\sigma_m(P) = (x_1 \xi_1)^m$ である．$\kappa \in \mathbb{Q}$ ($\kappa < 1$) を，

(3) $$\kappa = \max_{0 \le j \le m-1} (\mathrm{ord}\, P^{(j)}/m-j)$$

とする．$\kappa \le 0$ のとき，P は Levi 条件をみたすという．従来は，Levi 条件を仮定したとき $Pu=0$ の解 u の特異性の伝播に関する多くの研究がなされた．以下，Levi 条件がなくてもほとんど同様の結果が成立することを示す．

$d \subset \{0, \cdots, m-1\}$ を，

(4) $$d = \{0 \le j \le m-1 ;\ \mathrm{ord}\, P^{(j)} = \kappa(m-j)\}$$

と定める．

(5) $$\lambda^m + \sum_{j \in d} \sigma_{\kappa(m-j)}(P^{(j)}) \lambda^j = 0$$

の根を $\lambda = \lambda_j(x, \xi)$, $0 \le j \le m-1$ とする (λ_j を特性根と呼ぶ).

例．$P = (x_1 D_1)^m + P^{(0)}(x', D')$ ($x' = (x_2, \cdots, x_m)$) とする ($\mathrm{ord}\, P^{(0)} \le m-1$)．$\kappa = \mathrm{ord}\, P^{(0)}/m$ であり，Levi 条件とは $\mathrm{ord}\, P^{(0)} \le 0$ のことである．また，$0 \le j \le m-1$ に対して

$$\lambda_j(x,\xi) = \exp\left(\frac{1}{m}(2j+1)\pi\sqrt{-1}\right)\cdot(\sigma_{m-1}(P^{(0)}))^{1/m},$$

となる．

x^* を通る ξ_1 の陪特性帯を $b(x^*)$ とする：

$$b(x^*) = \{(x_1, 0, \cdots, 0; 0, \cdots, 0, \sqrt{-1}) \in \sqrt{-1}S^*M\}.$$

従来よく知られている結果を記す：

定理0． $\kappa \leq 0$，$\lambda_j \notin \{-1, -2, \cdots\}$，$0 \leq j \leq m-1$ とすると，

(6)　$u \in \mathcal{C}_{x^*}$，$Pu = 0$，$b(x^*) \cap \mathrm{supp}\, u = \phi$

なら $u = 0$ at x^* である．

以下，常に $0 < \kappa\ (<1)$ とする．本稿の主要結果を記す：

定理1． $0 < \kappa < 1$，$\lambda_j \notin \{0, -1, -2, \cdots\}$，$0 \leq j \leq m-1$，$(|\xi/|\xi| - (0, \cdots, 0, \sqrt{-1})| \ll 1)$ とすると，(6) のとき $u = 0$ at x^* である．

注意． $\lambda_j \notin \{0, -1, -2, \cdots\}$ という条件について説明する．各 λ_j は ξ について κ 次斉次だから，

$$\lambda_j \notin \{0, -1, -2, \cdots\},\ 0 \leq j \leq m-1$$

$$\Longleftrightarrow\ \lambda_j \cdot \xi_n^{-\kappa} \neq k\,\xi_n^{-\kappa},\quad k = 0, -1, \cdots,\ 0 \leq j \leq m-1$$

$$\Longleftrightarrow\ \lambda_j \neq 0,\ \arg \lambda_j \neq (2l+1)\pi,\quad l \in \mathbb{Z},\ 0 \leq j \leq m-1$$

となる．

§1．パラメトリクス．

(1), (2) をみたす $P(x,D)$ を1階作用素の行列に直す．

$$L = x_1 D_1 I_m + \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & -1 \\ P^{(0)} & \cdots & \cdots & P^{(m-1)} \end{pmatrix} \quad (m,m)\text{行列}$$

とする．$u, f \in \mathcal{E}_{x^*}$ に対し，

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ x_1 D_1 u \\ \vdots \\ (x_1 D_1)^{m-1} u \end{pmatrix}, \qquad \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix} \quad m\text{次ベクトル}$$

として，$Pu = f \Longleftrightarrow L\vec{u} = \vec{f}$ なので L を考えればよい．

L の右(左)パラメトリクスを考えるため，次の準備を行なう．

定義2．① $k(x,y) \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n}$ として，

$$\operatorname{supp}' k = \{(x,y,\xi,\eta)\,;\ (x,y,\xi,-\eta) \in \operatorname{supp} k\}.$$

② $A \subset \sqrt{-1}\,T^*\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n$，$B \subset \sqrt{-1}\,T^*\mathbb{R}^{2n} \setminus \mathbb{R}^{2n}$ に対し

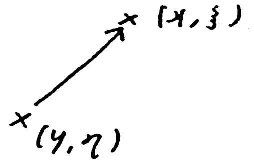
$$B \circ A = \{(x,\xi) \in \sqrt{-1}\,T^*\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n\,;\ \exists (y,\eta) \in A,\ (x,y,\xi,\eta) \in B\}.$$

注意．①において，$\operatorname{supp} k$ (resp. $\operatorname{supp}' k$) を核関数の台 (resp. 作用素の台) という．

② において, $(x, y, \xi, \eta) \in B$ のとき, 点 (y, η) から点 (x, ξ) に向かうベクトルを考える.

$(y, \eta) \in A$ なら $(x, \xi) \in B \circ A$

である. つまり, 右図で



始点 $\in A$, 矢印 $\in B$ としたとき, $B \circ A$ は終点全体を表わす.

さて, $k(x, y) \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n}$ (defined at $(\dot{x}^*, -\dot{x}^*)$) が, 次の条件(ア) or (ア)′ をみたすとする ($C > 0$ は十分大):

(ア) $\mathrm{supp}' k \subset H = \{ (x, y, \xi, \eta) \in \sqrt{-1}\, T^* \mathbb{R}^{2n} \setminus \mathbb{R}^{2n} ;$

① $x_j = y_j, \ \xi_j = \eta_j, \ 2 \le j \le n,$

② $x_1 y_1 \ge 0, \ |x_1| \ge |y_1|,$

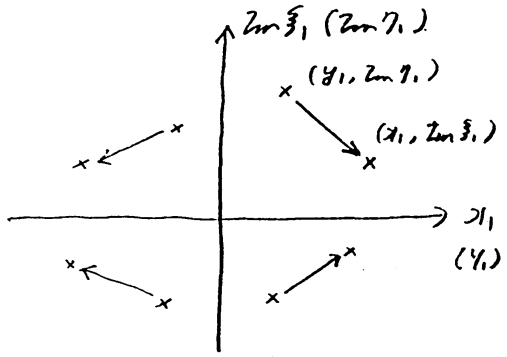
③ $\mathrm{Im}\, \xi_1 \cdot \mathrm{Im}\, \eta_1 \ge 0, \ |\mathrm{Im}\, \xi_1| \le |\mathrm{Im}\, \eta_1|,$

④ $\mathrm{Im}\, \xi_n \ge C |\mathrm{Im}\, \xi_j|, |\mathrm{Im}\, \eta_j|, \ 1 \le j \le n-1 \}.$

(ア)′ $\mathrm{supp}' k \subset H' = \{ (x, y, \xi, \eta) ; (y, x, \eta, \xi) \in H \}.$

注意. (ア)の意味は以下の通り. ω を $\dot{x}^*$ の小近傍とし, $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}$, $\mathrm{supp}\, f \subset\subset \omega$ とすると, (ア)のとき, $\int k(x, y) f(y) dy \in \mathcal{C}_{\dot{x}^*}$ は well-def で, $\mathrm{supp} \left(\int k f\, dy \right) \subset H \circ \mathrm{supp}\, f$ となる. 上に述べた通り, $(y, \eta) \in \mathrm{supp}\, f$, $(x, y, \xi, \eta) \in H$ のとき, (y, η) から (x, ξ) へ向かうベクトルを全て寄せ合せば, $\mathrm{supp} \int k f\, dy$ を上から評価できる. そこでこのベクトル

の性質を調べればよい．(x_1, ξ_1) を時間(に関する文字)，$(x_2, \cdots, x_n, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ を空間(に関する文字)と考えて，このベクトルは(カ)の①により，空間方向には0ベクトルである．つまり，この積分作用素は空間方向に microlocal property をもつ(singularity をふやさない)．一方，時間方向の $(y_1, \mathrm{Im}\,\eta_1)$ と $(x_1, \mathrm{Im}\,\xi_1)$ を同一の平面に書き込むと右図の様になる((カ)の②，③より)．つまりこの2点は同一象限上にあり，このベクトルは横軸(resp. 縦軸)方向に遠心的(resp. 求心的)である．(カ)をみたす $k(x, y)$ の定める積分作用素は，こういうベクトルに沿って singularity を伝播させる((カ)$'$ の場合は逆向きに伝播させる)．



以上の議論は Hanges の論法である．さて，L について次の結果を得る；

<u>定理3.</u> ① 定理1の仮定のもとで，(カ)をみたす積分核 $K(x, y)$ ($m \times m$ 行列)が存在し，Kの定める積分作用素 S は $SL(x, D) = Id.$ (at $\mathring{x}$) をみたす．

② P の特性根 $\lambda_j(x, \xi)$ が $\lambda_j \notin \{0, 1, 2, \cdots\}$ をみたすとき，(カ)$'$ をみたす積分核 $K'(x, y)$ ($m \times m$ 行列)をが存在し，K' の定め

る積分作用素 S' は $L\,S' = \mathrm{Id.}$ (at $\mathring{x}^*$) をみたす。

<u>定理1.</u> は <u>定理2.</u> ①から出てくる. <u>定理3.</u> ① は ② のバリエーションから出てくる. そこで <u>定理3.</u> の ② について以下証明の概略を述べる.

<u>§2. シンボルクラス.</u>

以下常に $1 \ll C_1 \ll C_2 \ll C_3$ という3つの定数を固定する. $\sqrt{-1}T^*\mathbb{R}^n \subset T^*\mathbb{C}^n$ と考えて, $T^*\mathbb{C}^n$ の変数をも (x, ξ) と書く. $i = 0, 1, 2, \cdots$ に対し,

$$
\begin{aligned}
\Omega_i = \{ & C_1 |\mathrm{Re}\, x_j|,\ C_1 |\mathrm{Im}\, x_j| < 1, \quad 1 \le j \le n, \\
& \mathrm{Im}\, \xi_n > C_2 (i+1), \\
& \mathrm{Im}\, \xi_n > C_2 |\mathrm{Im}\, \xi_j|, \quad 1 \le j \le n-1, \\
& \mathrm{Im}\, \xi_n > C_3 |\mathrm{Re}\, \xi_j|, \quad 1 \le j \le n \}.
\end{aligned}
$$

C_1, C_2, C_3 が目ざわりであるが, $\Omega_0 \supset \Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \cdots$ はいずれも $\mathring{x}^*$ 方向の錐を表わす. $\Omega_\cdot = \{\Omega_0, \Omega_1, \cdots\}$ とする.

<u>定義4.</u> $\tilde{\mathcal{S}}_+(\Omega_\cdot)$ は次の条件をみたす形式和 $\sum_{i=0}^{\infty} T_i(x, \xi)$ 全体を表わす: 各 T_i は Ω_i で正則で, $\exists C \gg 1$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists C_\varepsilon > 0$,

$$
|T_i(x, \xi)| \le C_\varepsilon C^{-i} \exp\{(-\mathrm{Re}(x_1 \xi_1))_+ + \varepsilon\, \mathrm{Im}\, \xi_n\}
$$

on Ω_i, $i = 0, 1, 2, \cdots$ ($t_+ = \max(0, t)$, $t \in \mathbb{R}$).

例. $T_i = c^{-i}\exp\left(\int_0^{x_1} -\sqrt{-1}\,\xi_1\,dt\right)$, $i = 0, 1, 2, \cdots$ なら $\sum T_i \in \mathscr{S}_+$.

$\Delta_i = \{\xi \in \sqrt{-1}\mathbb{R}^n ;\ \mathrm{Im}\,\xi_n > C_2(i+1),\ \mathrm{Im}\,\xi_n > C_2|\mathrm{Im}\,\xi_k|,$ $1 \leq k \leq n-1\}$ として, $\sum_{i=0}^{\infty} T_i(x,\xi) \in \hat{\mathscr{S}}_+(\Omega.)$ に対し,

$$\check{T}(x,y) = (2\pi\sqrt{-1})^{-n}\sum_{i=0}^{\infty}\int_{\Delta_i} e^{(x-y)\xi}\,T_i(x,\xi)\,d\xi$$

とする. $\check{T}(x,y)$ は適当な複素領域で正則となり, $\check{T}(x,y)$ はあるマイクロ函数 $\mathrm{sp}\,\check{T}(x,y)$ を与え, $\mathrm{sp}\,\check{T}(x,y)$ は条件(ア)′をみたすことがわかる. $\check{T}(x,y)$ を積分核とする作用素を象徴的に $T(x,D) = \sum_{i=0}^{\infty} T_i(x,D)$ と書き, このとき $\sigma(T) \sim \sum_{i=0}^{\infty} T_i(x,\xi)$ と記す. このとき, 次のことがわかる.

命題5. $A(x,D) \in \mathscr{E}_{x^*}$ を $l\ (<\infty)$ 階の microdifferential operator とし, $\sigma(A) \sim \sum_{i=0}^{\infty} A_i(x,\xi)$ ($A_i(x,\xi)$ は ξ について $(l-i)$ 次斉次) とする. $\sum_{i=0}^{\infty} T_i(x,\xi) \in \hat{\mathscr{S}}_+(\Omega.)$ に対し,

$$T'_i(x,\xi) = \sum_{j+k+|\alpha|=i} \frac{1}{\alpha!}\,\partial_\xi^\alpha A_j\,\partial_x^\alpha T_k$$

とすると, $\sum_{i=0}^{\infty} T_i'(x,\xi) \in \hat{\mathscr{S}}_+(\Omega.)$ であり,

$$\sigma(A(x,D)T(x,D)) \sim \sum_{i=0}^{\infty} T_i'(x,\xi).$$

となる.

$T_i(x,\xi) = \delta_{i0}$, $i=0,1,2,\cdots$ なら，$\mathcal{T}(x,D)=Id$. である．そして，定理3 の②の条件のもとで，

$$\sigma(L(x,D)\,T(x,D)) \sim I_m + 0 + 0 + \cdots$$

となるような $\sum_{i=0}^{\infty} T_i(x,\xi) \in \hat{\mathcal{S}}_+(\Omega_\cdot)$ を求めることが可能なのである．そこで定理3 の②が成立する．

上述の $\sum_{i=0}^{\infty} T_i(x,\xi)$ を求める計算は省略するが，最も簡単な例だけをあげておく ($\alpha \in \mathbb{C}$):

$$L = x_1 D_1 I_m + \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & -1 \\ \alpha D_n^{m-1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = x_1 D_1 I_m + L'.$$

とする．漸近展開の番号を少しずらして(ずらしてもよい)

(8) $(x_1\xi_1 + x_1\partial_{x_1})U + L'(\xi_n)U = I_m$

を解く．

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \xi_n^{k} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi_n^{(m-1)k} \end{pmatrix}$$

として，(8)の左から Λ^{-1}，右から Λ^{+1} をかけて，

(9) $(x_1\xi_1 + x_1\partial_{x_1})\Lambda^{-1}U\Lambda + \Lambda^{-1}L'\Lambda \cdot \Lambda^{-1}U\Lambda = I_m$

を解く．

$$\Lambda^{-1}L'\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & -\xi_n^{k} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & -\xi_n^{k} \\ \alpha\xi_n^{k} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

となり，$\Lambda^{-1}L'\Lambda$ の固有値は，$\lambda_j = \exp\left(\frac{1}{m}(2j+1)\pi\sqrt{-1}\right)\alpha^{1/m}\xi_n^{\kappa}$，$0 \le j \le m-1$ となる．$\Lambda^{-1}L'\Lambda = M'$，$\Lambda^{-1}U\Lambda = V$ と書いて，

(10) $$(x_1\xi_1 + x_1\partial_{x_1})V + M'V = 0$$

とする．問題を少しかえて，M' の固有値が

$$\lambda_j = \mu_j \cdot \xi_n^{\kappa}, \quad 0 \le j \le m-1$$

とする．ここで，μ_j は実数で，$(\arg \mu_j) + \frac{\kappa}{2}\pi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，$0 \le j \le m-1$，とする（本当は $(\arg \mu_j) \neq (2\ell+1-\frac{\kappa}{2})\pi$，$\ell \in \mathbb{Z}$，$0 \le j \le m-1$ でよいが，このときは計算は複雑になる）．更に，M' が対角行列の場合を考えることにする．このとき，(10) の解として，

$$V = \int_0^{x_1} \exp(-x_1\xi_1 I_m - M'\log x_1 + t\xi_1 I_m + M'\log t)\,\frac{dt}{t}$$

$$= \int_0^1 \exp(-(1-s)x_1\xi_1 I_m + (M'-I_m)\log s)\,ds$$

をとると，$V + 0 + 0 + \cdots \in \mathcal{S}_+(\Omega_\cdot)$ となる．

<u>文献</u> §1 の議論は

[1]. N. Hanges, Parametrices and propagations of singularities for operators with non-involutory characteristics, Indiana Univ. Math. J., 28(1979),

87-97

による、

$P(x,D)$ が Levi 条件をみたす場合の研究は夥しい.

hyperfunction 関係のものだけ挙げておく.

[2]. S. Nakane, Propagation of singularities and uniqueness in the Cauchy problem at a class of doubly characteristic points, Comm. Partial Differential Equations, 6(1981), 917-927.

[3]. T. Ôaku, A canonical form of a system of microdifferential equations with non-involutory characteristics and branching of singularities, Invent. Math., 65(1982), 491-525.

[4] H. Tahara, Fuchsian type equations and hyperbolic equations, Japan J. Math., 5(1979), 245-347.