数理解析研究所講究録
第758巻 1991年 15-20

DIMENSION OF INFINITE PRODUCTS OF TOPOLOGICAL GROUPS

山口大教育　服部泰直 (Yasunao Hattori)

ここで考える空間は、すべて可分距離空間とする。次元論において最も興味深い対象として、積空間における次元のふるまいがある。よく知られた次元の積定理より、任意の空間 X に対して、$\dim X \leq \dim X^2 \leq 2\dim X$ が成り立つ。ここでは、前者の不等式について、等号が成立させる状況について考える。2つの有限次元空間 X と Y が $\dim X > 0$, $\dim Y > 0$ をみたし、かつ、X かまたは Y がコンパクトであるとき、$\dim(X \times Y) > \max\{\dim X, \dim Y\}$ が成り立つことは、よく知られている。1967年に Anderson と Keisler [1] は、上の定理において、コンパクト性をとり除くことができないことを示した。実際、彼らは任意の自然数 n に対して、$\dim X = \dim X^{\omega} = n$ となる空間 X を構成した。この空間 X は、$\mathbb{R}^{n+1}$ の部分空間であった。これをうけて、Keesling [4] は、1985年に、Anderson と Keisler の例 X を、$\mathbb{R}^{n+1}$ の部分群

として、とることができることを示した。最近、Kulesza [6] は、上の Anderson と Keisler の定理を、Keesling とは、異なる方向で改良した。

<u>定理</u>（[6, Theorem 3]）　$n \leq d$ なる任意の自然数 n, d に対して、$\dim X_{nd} = n$ であり、$\dim (X_{nd})^{\omega} = d$ である $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分空間 X_{nd} が存在する。

Anderson と Keisler の定理は、Kulesza の定理の特殊な場合, i.e. $n = d$ である。ここでの第一の定理は、上の Keesling の定理と Kulesza の定理を同時に改良する次の定理である。

<u>定理 1</u>　　$n \leq d$ なる任意の自然数 n, d に対して、$\dim G_{nd} = n$ であり、$\dim (G_{nd})^{\omega} = d$ である $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分群 G_{nd} が存在する。

この定理は、Keesling と Kulesza の議論を組み合わせることにより、証明される。

<u>注意</u>　Keesling の定理において、位相群 G を $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分群としてではなく、単に $\dim G = \dim G^{\omega} = n$ をみたす位相

群として見つけたいならば、単純な議論により可能である。今、X を Anderson と Keisler の空間とする。$F_a(X)$ を Graev の距離位相を持つ X から生成される free topological group とする。このとき Arhangel'skii [2] と Bel'nov [3] の結果より $F_a(X)$ が可分距離空間であり、

$$(*) \qquad \dim F_a(X) = \sup\{\dim X^m \mid m \in \omega\}$$

であることがわかる。故に、$\dim F_a(X) = \dim (F_a(X))^\omega = n$ である。しかし、この自由群を用いた議論は、我々の定理の証明には応用できない。(G_{nd} を単に位相群として見つける場合に対して) なぜならば、$(*)$ より、$\dim X_{nd} = n$, $\dim (X_{nd})^\omega = d$ なる空間 X_{nd} に対して、自由群 $F_a(X_{nd})$ を考えると、$\dim F_a(X_{nd}) = \dim (F_a(X_{nd}))^\omega = d$ となってしまうからである。従って、我々の例は、"$\mathbb{R}^{n+1}$ の部分群であり" という条件を要求しない場合においても、$\dim G_{nd} = n$, $\dim (G_{nd})^\omega = d$ $(n \leq d)$ となる位相群の初めての例であるように思われる。

位相群が <u>precompact</u> とは、それがコンパクトな位相群の部分群に同型であるときをいう。Shakhmatov [7] は自由群の理論を応用して、$\dim G = \dim G^\omega = n$ となるような precompact 位相群 G を任意の自然数 n に対して構成した。

定理1を使うことにより、Shakhmatovの結果は、Kuleszaの定理のように、改良することができる。

<u>定理2</u>　$n \leq d$ なる任意の自然数 n, d に対して、$\dim H_{nd} = n$ であり、$\dim (H_{nd})^{\omega} = d$ である $n+1$ 次元トーラス T^{n+1} の部分群が存在する。従って、H_{nd} は precompact である。

[6] より早く Kulesza は [5] において Anderson and Keisler の空間を完備にすることに成功した。即ち、任意の自然数 n に対して $\dim X = \dim X^{\omega} = n$ なる完備な可分距離空間でかつ全不連結な空間 X が存在する。次の問題は、未解決である。

<u>問題1</u>（Kulesza [5, Question 1]）　$n \leq d$ なる任意の自然数 n, d に対して、$\dim M = n$, $\dim M^{\omega} = d$ なる完備な可分距離空間 M は、存在するか？

<u>問題2</u>（Kulesza [5, Question 2]）　$n \leq d$ なる任意の自然数 n, d に対して、$\dim H = n$, $\dim H^{\omega} = d$ なる均質な完備可分距離空間 H が、存在するか？

更に

問題3　$n \leq d$ なる任意の自然数 n, d に対して、$\dim G = n$, $\dim G^{\omega} = d$ となる完備な可分距離位相群が存在するか？ 特に、$n = d$ の場合については、どうか？

ここで述べた結果を得るにあたっては J. Kulesza, D. B. Shakhmatov, そして渡辺正の三氏から貴重な助言を得た。これらの方々に対し、深く感謝の意を表します。

References

[1] R. D. Anderson and J. E. Keisler, An example in dimension theory, Proc. Amer. Math. Soc., 18 (1967), 709 - 713.

[2] A. V. Arhangel'skii, Classes of topological groups, Russian Math. Surveys, 36 ; 3 (1981), 151 - 174.

[3] V. K. Bel'nov, On zero-dimensional topological groups, Soviet Math. Dokl. 17 (1976), 164 - 168.

[4] J. Keesling, An n-dimensional subgroup of R^{n+1}, Proc. Amer. Math. Soc., 95 (1985), 106 - 108.

[5] J. Kulesza, The dimension of products of complete separable metric spaces, Fund. Math. (to appear).

[6] J. Kulesza, Dimension and infinite products in separable metric spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 110 (1990), 557 - 563.

[7] D. B. Shakhmatov, A problem of coinciding of dimensions in topological groups, Topology Appl. 33 (1989), 105 - 113.