数理解析研究所講究録
第 759 巻 1991 年 13-24

q-analogue の構成

名大理 佐藤 潤也 (JUNYA SATO)

※) 注。予定講演題目は、「Dedekind 和の q-analogue」でしたが Dedekind 和に限定せず一般論で話しを進めることにしました。御了承ください。

目的: 巾級数 (母関数) の q-analogue を一般的に定義することにより、Carlitz の q-Bernoulli 数、q-Euler 数の満足する恒等式を古典的な Bernoulli 数、Euler 数の満足する恒等式から極自然に導く。

§1 q: 不定元 (複素数の特殊値で意味を持てば、複素数と考えることもできる。)

定義 1 $\mathcal{C} := \mathbb{C}[[q-1]]$ $\mathcal{R} := \mathcal{C}[[t]] = \mathbb{C}[[q-1,t]]$

(但し t は不定元)

この時、$\mathbb{C}$ から $\mathcal{C}$ への map $\langle\ \rangle$ を次の様に一つ固定する:

$$\langle\ \rangle : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad s.t.$$

$$a \longmapsto \langle a\rangle \equiv a \mod \deg_{q-1} 1$$

$$\langle a\rangle = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$\langle 1\rangle = 1$$

簡略の為 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\langle n\rangle! := \langle 1\rangle \cdot \cdots \cdot \langle n\rangle$ とする。

更に、$\mathcal{R}$ 上の $\mathbb{C}$-lin. map. D_q 及び φ_q を次の様に定める。

$$D_q : t^n \longmapsto \langle n\rangle t^{n-1} \qquad (n \geqq 0)$$

$$\varphi_q := \mathrm{1id} + (q-1)D_q$$

<u>補題1</u>　$\exists!\, \Phi_n : \mathcal{R}^n \longrightarrow \mathcal{R}$: $\mathbb{C}$-lin. map. s.t.

i) $\Phi_n(F_1, \cdots, F_n) \equiv F_1(0) \cdot \cdots \cdot F_n(0) \mod \deg_t 1$

ii) $\Phi_n(F_1, \cdots, F_{n-1}, 1) = \Phi_{n-1}(F_1, \cdots, F_{n-1})$ if $n > 1$

iii) $\varphi_q(\Phi_n(F_1, \cdots, F_n)) = \Phi_n(\varphi_q(F_1), \cdots, \varphi_q(F_n))$

for $F_1, \cdots, F_n \in \mathcal{R}$　　for each $n \geqq 1$

証明は帰納法による。

<u>定義2</u>　$F, G \in \mathcal{R}$ に対して $F *_q G := \Phi_2(F, G)$

注　$*_q$ により $\mathcal{R}$ 上には積構造が入り、$\mathcal{R}$ は $\mathbb{C}$-algebra の構造を持つ。今後この $\mathbb{C}$-algebra を $\mathcal{R}_q$ と記す。

更に ψ_q を $\mathcal{R}$ から $\mathcal{R}_q$ への自然準同形、ι_q を $\mathcal{R}_q$ から $\mathcal{R}$ への集合としての包含写像とすれば、

$$\iota_q \circ \varphi_q \circ \psi_q$$

は $\mathcal{R}$ の自己準同形写像を与える。この時次が成立する。

<u>主定理</u> $H(t_1,\cdots,t_n)=\sum_{m_1,\cdots,m_n\in \mathbb{C}} a_{m_1\cdots m_n}\, t_1^{m_1}\cdots t_n^{m_n}$

$\in \mathbb{C}[t_1,\cdots,t_n]$ に対して形式的に

$$H^{*q}(t_1,\cdots,t_n)=\sum_{m_i} a_{m_1\cdots m_n}\,\overbrace{t_1 *_q\cdots *_q t_1}^{m_1コ}\cdots\cdots\overbrace{t_n *_q\cdots *_q t_n}^{m_nコ}$$

とおく。 この時 $F_1,\cdots,F_n\in \mathcal{R}$ に対して

$$H(F_1,\cdots,F_n)=0$$

が成立すれば、

$$H^{*q}\left((F_1)_q,\cdots,(F_n)_q\right)=0$$

も同時に成立する。 但し $(F)_q=\iota_q\circ\varphi_q\circ\psi_q(F)$.

以下本稿では、この定理の応用例について述べる。

$\iota_q\circ\varphi_q\circ\psi_q=\varphi_q\circ\iota_q\circ\psi_q$ であるから $\iota_q\circ\psi_q$ の像を調べる。

<u>Prop.1</u> $\iota_q\circ\psi_q(e^t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\varepsilon_q t)^n}{\langle n\rangle!}$

但し $\varepsilon_q=\frac{e^{q-1}-1}{q-1}\in\mathbb{C}$

(証明) $n\geqq 0$, $k\geqq 0$ に対して $S_2(n,k)$ を第2種 Stirling 数とすれば、$*_q$ の定義により

(1) $$\underbrace{t *_q\cdots *_q t}_{nコ}=\sum_{k=0}^{n}\frac{k!}{\langle k\rangle!}S_2(n,k)(q-1)^{n-k}t^k$$

更に $\varepsilon_q t^k = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{k!}{n!} S_2(n,k)(q-1)^{n-k}$ により、Prop. 1は得られる。今後 $\iota_q \circ \psi_q(e^t) = e_q(t)$ と記す。

<u>Prop. 2</u> ($e_q(t)$ の指数法則) $\forall a, b \in \mathbb{C}$ に対し

$$e_q([a:q_0]t) *_q e_q([b:q_0]t) = e_q([a+b:q_0]t)$$

但し $q_0 = e^{q-1}$, $[a:q_0] = \frac{q_0^a - 1}{q_0 - 1}$

(証明) 主定理により $e^{at} \cdot e^{bt} = e^{(a+b)t}$ に対して $\iota_q \circ \psi_q$ を作用させればよい。

<u>例1</u> $\widehat{G}_q(t)$ を q-Bernoulli 数の母関数とすれば $\widehat{G}_{q_0}(\varepsilon_q t) = \varepsilon_q \left(\frac{t}{e^t - 1}\right)_q$

即ち、q-Bernoulli 数は $\left(\frac{t}{e^t-1}\right)_q = \iota_q \circ \varphi_q \circ \psi_q\left(\frac{1}{e^t-1}\right)$ の係数として現われる。(但しこの例は $\langle\ \rangle = id$ の場合である)

以下一般の F_q の係数について調べる。(先の注意により $\iota_q \circ \psi_q$ の像を調べれば十分であるから $F_q = \iota_q \circ \psi_q(F)$ と改めて定義する。)

$F = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{n!} t^n$ ($f_n \in \mathbb{C}$) に対して $\iota_q \circ \psi_q$ を作用させれば、

$$F_q(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\langle k \rangle !} k! \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f_n}{n!} S_2(n,k)(q-1)^{n-k}$$

であるから $\frac{t^k}{\langle k \rangle !}$ の係数を $f_k(q)$ とすれば、

(2)
$$f_k(q) = k! \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f_n}{n!} S_2(n.k)(q-1)^{n-k}$$

が得られる。

注　$f_k(q)$ は $\langle\ \rangle$ の選び方に依存しない。

<u>例2</u>　$a \neq 0\ (\in \mathbb{C})$ に対して　$F(t) = \frac{a}{t+a}$ を考えれば、

$$f_k(q) = k! \left(-\frac{1}{a}\right)^k \prod_{l=0}^{k} \frac{1}{1 + l\frac{q-1}{a}}$$

が成立する。　これを利用して、

<u>定義3</u>

$$a^{[k]} = \begin{cases} 1 & (k=0) \\ a \prod_{l=1}^{k} \left\{ \frac{\langle l \rangle}{l} a + (q-1)\langle l \rangle \right\} & (k \geqq 1) \end{cases}$$

この記法を用いれば

$$\left(\frac{a}{t+a}\right)_q = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^{[k]}} t^k$$

と表わされる。

<u>例3</u>　$\cot \pi t$ の展開

$$\frac{2\pi i t}{e^{2\pi i t} - 1} + \pi i t = \sum_{a \in \mathbb{Z}} \frac{t}{t+a}$$

を利用すれば、我々の巾を用いて構成される q-zeta 函数の正の整数値での特殊値が計算される。

<u>Prop3</u>　$\langle\ \rangle$ が trivial の場合、　$k \geqq 2$ に対し

$$\sum_{a\neq 0} \frac{a}{a^{[k+1]}} = \frac{(-1)^{k-1}}{k!} 2\pi i\left([2\pi i : q_0]\,\varepsilon_q\right)^{k-1} \beta_k\left(q_0^{2\pi i}\right)$$

但し $\beta_k(q)$は k-th の q-Bernoulli 数である。

注. q-2項展開の公式などを考えると巾としては、先の定義3よりも

(3) $$a^{[k]} = a\prod_{l=1}^{k}\{a+(q-1)\langle l\rangle\}$$

の方が自然である。以下では、この巾が自然に扱える様な新たな q-analogue を構成する。

§2 定義3の背景になっている事実は $k\geqq 0$ に対して

$$t^{k} *_q t = \frac{k+1}{\langle k+1\rangle}\, t^{k+1} + (q-1)\,k\,t^{k-1}$$

という関係式である。これに対して(3)は、

(4) $$t^{k} *_q t = t^{k+1} + (q-1)\langle k\rangle\, t^{k-1}$$

を基礎に置いている。そこで(4)が自然に出てくる様に§1の議論を修正する。

<u>補題2</u> $\forall \Phi : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$: $\mathbb{C}$-bilin. map s.t.

$$\begin{cases} \Phi(F,f) = Ff & (F\in\mathcal{R},\ f\in\mathbb{C}) \\ \Phi(t^k, t) = t^{k+1} + (q-1)\langle k\rangle\, t^{k} & (k\geqq 0) \end{cases}$$

に対して $\exists!\ \varphi_q : \mathcal{R}\to\mathbb{C}$: $\mathbb{C}$-lin. map s.t.

$$\begin{cases} \varphi_q(1) = 1 \\ \varphi_q(t) = t + q - 1 \end{cases}$$ 及び

$$\varphi_q(\Phi(t^k, t)) = \Phi(\varphi_q(t^k), \varphi_q(t)) \qquad (k \geq 0)$$

証明は帰納法。

この新しいφ_q（§1のφ_qとは異なる！）に対しても補題1が成立して、更に$\Phi_2 = \Phi$が成立する。（このΦ_2も§1のΦ_2とは異なる！） 以上により(4)の性質を持つ$*_q$，及び$*_q$に関する新しい$\mathbb{C}$-algebra R_qが構成されたことになる。今後、区別の為に§1で構成された積は単に$*$で表わし新しい$*_q$と比較しながら議論を進める。 $*_q$を理解する為には、次のq-Stirling数の概念が役に立つ。

<u>定義4</u> $a \in \mathbb{C}$に対して

$$\langle a \rangle_n := \begin{cases} 1 & (n=0) \\ a(a-1)(a-\langle 2\rangle)\cdots(a-\langle n-1\rangle) & (n \geq 1) \end{cases}$$

とした時、

$$\begin{cases} \langle x \rangle_n = \sum_{k=0}^{n} \widehat{S}_1(n,k)\, x^k \\ x^n = \sum_{k=0}^{n} \widehat{S}_2(n,k) \langle x \rangle_k \end{cases}$$

により第1種及び第2種のq-Stirling数を定める。

<u>補題3</u> $$\sum_{n=k}^{\infty} \widehat{S}_2(n,k)\, t^{n-k} = \prod_{l=0}^{k} \frac{1}{1-\langle l \rangle t}$$

(証明) 略。

これは $\sum_{n=k}^{\infty} S_2(n,k)\, t^{n-k} = \prod_{l=0}^{k} \frac{1}{1-lt}$ の q-analogue である。

<u>Prop.4</u>　$n \geqq 1$ に対して

$$t *_q \cdots *_q t = \sum_{k=0}^{n} \hat{S}_2(n,k)(q-1)^{n-k} t^k$$

証明は帰納法及び(4)による。

注　§1の $*$ に関しては(1)であった。

<u>Prop.5</u>　$F \in \mathcal{R}$ に対して $F_q \left(= \iota_q \circ \psi_q(F)\right)$ の

$t^k/\langle k\rangle!$ の係数 $f_k(q)$ は

$$f_k(q) = \langle k\rangle! \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f_n}{n!} \hat{S}_2(n,k)(q-1)^{n-k}$$

である。

注　(2)と比較せよ。

注　$*_q$ に関しても ι_q, ψ_q を§1と同様に定義すれば我々の主定理はそのまま成立する。

そこで、我々の目標であった新しい巾を以下の様に定義する。

<u>定義5</u>

$$a^{[k]} = \begin{cases} 1 & (k=0) \\ a\prod_{l=1}^{k}\{a+(q-1)\langle l\rangle\} & (k \geqq 1) \end{cases}$$

<u>例4</u>

$$\left(\frac{a}{t+a}\right)_q = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^{[k]}} t^k \qquad (a \neq 0)$$

§1同様に、この巾に対する q-zeta級数の正の整数値での特殊値が以下の様に計算される。

$\cot \pi t$ の巾級数展開を利用して、

Prop 6. $$\left(\sum_{a\in\mathbb{Z}} \frac{t}{t+a}\right)_q = 1+\sum_{a\neq 0}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{a^{[k]}}\, t^{k}$$

及び

Prop 7 $$\sum_{a\neq 0} \frac{1}{a^{[k]}} = \frac{(2\pi i)^{k}}{\langle k\rangle !}(-1)^{k-1}\,\hat{\beta}_{k}(\hat{q})$$

for $k \geq 2$

ガただちに得られる。但し $\hat{\beta}_k(q)$ は $\left(\frac{t}{e^t-1}\right)_q$ の $t^k/\langle k\rangle!$ の係数であり $\hat{q} = 2\pi i(q-1)+1$ である。

最後に幾つか注意(補足)を挙げて本稿を終わります。

(i) §1 に関して。

$G(t) = \frac{t}{e^t-1}$ (Bernoulli数の母関数)

と置けば 例1により $\iota_q \circ \varphi_q \circ \psi_q(G(t)) = \hat{G}_{q_0}(\varepsilon_q t)$。省略はしますが q-Euler 数も我の $\iota_q \circ \varphi_q \circ \psi_q$ の作用で説明がつきますから、母関数の比較から得られる様な Bernoulli数及び Euler数に関する恒等式は主定理により殆んどそのまま Carlitz等の q-Bernoulli数及び q-Euler数に対しても成立することになります。改めて他の機会に発表したいと思いますが、上の事を利用すれば q-Bernoulli数により q-Dedekind和が定義され更にそれが相互法則を満足することも証明されます。

Prop 3を証明するには $\iota_q\circ\varphi_q\circ\psi_q(G(at))$ を計算する必要が有ります。我々の議論（§1及び§2）は殆んどすべて帰納法で示すことができるのですが、こればかりはテクニックを要しますのでここで証明を与えます。

補題　〈 〉が trivial の時 $\forall a\in\mathbb{C}$ に対して

$$(5)\qquad \iota_q\circ\varphi_q\circ\psi_q(G(a)) = \frac{a}{\varepsilon_q[a:q_0]}\,\widetilde{G}_{q_0^a}(\varepsilon_q[a:q_0]t)$$

が成立する。

(証明)　右辺は次の方程式の解として一意的に定まる事が主定理によりわかります:

$$(6)\qquad \iota_q\circ\varphi_q\circ\psi_q(G(at))*_q(q_0^a e^{\varepsilon_q[a:q_0]t}-1) = a(t+q-1)$$

従って(5)の右辺が(6)を満たすことを証明すればよい事になり、$\forall F(t)\in\mathcal{R}$ に対して

$$F(t)*_q e^{\varepsilon_q[a:q_0]t} = F(q_0^a t)e^{\varepsilon_q[a:q_0]t}$$

である事を利用すれば、（これの証明は $*_q$ の定義より直ちに得られる。）

$$((5)\text{の右辺})*_q(q_0^a e^{\varepsilon_q[a:q_0]t}-1)$$

$$(7)\qquad = \frac{a}{\varepsilon_q[a:q_0]}\Big\{q_0^a e^{\varepsilon_q[a:q_0]t}\,\widetilde{G}_{q_0^a}(q_0^a\varepsilon_q[a:q_0]t) - \widetilde{G}_{q_0^a}(\varepsilon_q[a:q_0]t)\Big\}$$

ここで [5, (2)] より $\widetilde{G}_q(t)$ は

$$\widetilde{G}_q(t) = q e^t \widetilde{G}_q(qt) - t - q + 1$$

を満足するから

$$(7) = a(t + q - 1)$$

となり (5) の右辺も (6) を満足することが言えた。

(ii) §2 に関して。

我々が導入した q-Stirling 数は古典的な q-Stirling 数の拡張になっています。($\langle x \rangle = [x:q]$ の場合が古典的)

古典的には普通

$[x]_k = [x:q]\cdot[x-1:q]\cdots[x-k+1:q]$ とした時

$$[x:q]^n = \sum_{k=0}^{n} q^{\binom{k}{2}} \widetilde{S}_2(n, k)[x]_k$$

により定義しますが、$\langle [x:q] \rangle_n = q^{\binom{n}{2}}[x]_n$ になっている事に注意すれば $\langle x \rangle = [x:q]$ の場合両者が一致する事がわかります。

参考文献

1. L. Carlitz : q-Bernoulli numbers and polynomials, Duke Math. J. 15 (1948) 987-1000.
2. —— : The reciprocity law for Dedekind sums, Pacific J. Math 3 (1953) 523-527
3. —— : q-Bernoulli and Eulerian numbers,

Trans. Amer. Soc. 76 (1954), 332-350.

4. J. Riordan: "Combinatorial Identities, John Wiley and Sons, Inc., 1968.

5. J Satoh : q-analogue of Riemann's ζ-function and q-Euler numbers, J. Number Theory 31 (1989), 346-362.

6 ——— : A construction of q-analogue (preprint)