数理解析研究所講究録
第 763 巻 1991 年 1-7

複数のスペクトルパラメタを持つ高次元可積分系について

数理研・大山 陽介* (Ohyama, Yousuke)

ＫＰ方程式系の高次元化を考える時に問題となったのは、naïve に考えると得られる発展方程式が一般には有限の閉じた形にならないということであった([1])。そこで、([2])では話を逆にして、発展方程式が閉じた形になる条件を考えることで、自己双対Yang-Mills方程式（ＳＤＹＭ）と自己双対Einstein方程式（ＳＤＥ）とを合成した形の方程式を得た。ここでは、[2]の枠では扱えなかったWittenのゲージ方程式([3])の場合について述べることにする。残念ながら、このWittenのゲージ方程式は hierarchy を考えると解空間がどんどん小さくなり、発展方程式として面白いものは出てこない。しかし、こういう現象は他の可積分系でははっきりした形で現れなかったので、将来、可積分系の定義を模索するときに役立つものと思う。

記号：

$\mathbb{N}=\{0,1,2,\ldots\}$ ，自然数の集合

C：標数０の代数的閉体（複素数体と思ってよい）

$\mathcal{O}=C[[x_0,x_1,\ldots,x_{s-1},\ldots x_{r-1}]]$, 以下で基礎になる函数環（$0<s<r$）

$x=(x_0,x_1,\ldots,x_{r-1})$ ，$x''=(x_s,\ldots,x_{r-1})$ ，$x'=(x_0,\ldots,x_{s-1})$とする。

$\mathcal{O}$で議論するのは話を簡単にするためで、収束冪級数環を用いても構わないが、その場合はいちいち収束性を証明しなければならない。

* 現在 大阪大 理学部

1° 我々はD加群の変形として可積分系を扱う。そこで、まず擬微分作用素について復習しよう。但し、ここで述べる擬微分作用素は[2]で扱ったものとは異なる。

$\mathcal{O}$上の微分作用素の作る環$\mathcal{D}=\mathcal{O}[D_0, D_1, \ldots, D_{r-1}]$の拡大環として、擬微分作用素の作る環$\mathcal{E}$を定めよう。$m\in\mathbb{Z}$, $\alpha=(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1})\in\mathbb{Z}^s$ に対して、高々m階でタイプαの擬微分作用素の全体$\mathcal{E}(m, \alpha)$を

$$\mathcal{E}(m, \alpha) = \sum_{\substack{\gamma\in\mathbf{N}^{r-1} \\ \beta_j\leqq\alpha_j \\ |\beta|+|\gamma|<m}} \mathcal{O}\cdot D_{X'}^{\beta} D_{X''}^{\gamma}$$

とする。擬微分作用素の作る環$\mathcal{E}$を、$\mathcal{E}=\bigcup_{m,\alpha}\mathcal{E}(m, \alpha)$で定める。$\mathcal{E}$の積の構造は

$$\Sigma\, a_\alpha D_X^{\alpha} \circ \Sigma\, b_\beta D_X^{\beta} = \sum_\gamma \binom{\alpha}{\gamma} a_\alpha \cdot b_\beta^{(\gamma)} D_X^{\alpha+\beta-\gamma}$$

で定める。

[3]と同様に、この$\mathcal{E}$のフィルタ$\mathcal{E}(m, \alpha)$を考えることにより、発展方程式が有限の形で得られる。一般に、$\mathcal{E}$の$\mathcal{O}$部分加群$\mathcal{L}$に対して、$\mathcal{E}$から導かれる$\mathcal{L}$上のフィルタを$\mathcal{L}(m, \alpha)=\mathcal{L}\cap\mathcal{E}(m, \alpha)$で定める。

また、$\mathcal{E}$の$\mathcal{O}$部分加群$\mathcal{E}_\emptyset$を今回は

$$\mathcal{E}_\emptyset = \sum_{\substack{\gamma\in\mathbf{N}^{r-1} \\ \exists\beta_j<0}} \mathcal{O}\cdot D_{X'}^{\beta} D_{X''}^{\gamma}$$

とする。

また$P \in \mathcal{E}$に対して、$P_+ \in \mathcal{D}$を　$P_+ \equiv P \pmod{\mathcal{E}_\emptyset}$で、$P_- \in \mathcal{E}_\emptyset$を　$P_- =$(PのD_x"-負冪部分)で定める。

$\mathcal{E}$の左$\mathcal{D}$部分加群$\mathcal{I}$についての splitting condition は次のようになる：

$$\mathcal{E}(m, \alpha) = \mathcal{I}(m, \alpha) \oplus \mathcal{E}_\emptyset(m, \alpha), \qquad \forall m \in \mathbb{Z}, \ \forall \alpha \in \mathbb{Z}^S$$

この時、$m < 0$ならば、$\mathcal{E}(m, \alpha) = \mathcal{E}_\emptyset(m, \alpha)$だから、$\mathcal{I}(m, \alpha) = 0$。また、$m = 0$のときに

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{E}(m, \alpha) & = & \mathcal{I}(m, \alpha) & \oplus & \mathcal{E}_\emptyset(m, \alpha) \\ \Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\ 1 & = & W & + & U \end{array}$$

という分解を考えると、この分解で得られた作用素Wにより、$\mathcal{I} = \mathcal{D}W$となることが分かる。逆に、$W_+ = 1$となる作用素$W \in \mathcal{E}(0, 0)$で生成される$\mathcal{E}$の左$\mathcal{D}$部分加群$\mathcal{I} = \mathcal{D}W$は上の splitting condition を満たす。以後、全て左$\mathcal{D}$加群しか考えないので、単に$\mathcal{D}$加群と呼ぶ。

3°　$P \in \mathcal{E}$を時間発展の無限小生成元として、$\mathcal{I}$の時間発展$\mathcal{I}t$を次の微分方程式で定める：

$$\forall V \in \mathcal{I}, \quad \frac{\partial V}{\partial t} + VP \ \in \ \mathcal{I}_t \quad . \qquad (1)$$

一般には、こうして得られる$\mathcal{I}_t$は splitting condition を満たさないだけでなく、もう

$\mathcal{E}$の部分空間にすらならない。実は、$\mathcal{I}_t$は$\mathcal{E}^{\infty}$の$\mathcal{D}^{\infty}$部分加群と考えられるのだが、その点については[1]を参照されたい。この発展方程式(1)について、もし$\mathcal{I}_t$がsplitting condition を満足するならば、(1)は次のWに関する方程式に帰着する：

$$\frac{\partial W}{\partial t}+WP=BW\,,\quad \text{ここで}B=(WPW)_+\quad . \tag{2}$$

ここで、Wittenのゲージ方程式について復習しよう([3])：

$W=\sum_{\beta_j\leqq 0} w_\beta(x'')D_{x'}^{\beta}$ とする。ここで、$w_i\in \mathrm{Mat}(k, C[[x'']])$、$w_0=1_k$とする。

$P\in\mathcal{E}$として$P=D_iD_j$ $(0\leqq i<s\ ,s\leqq j<r)$を取る。$WD_jW^{-1}=D_j+\psi_j(x', D_0)$ とおくと、発展方程式(2)の$B=D_0D_j+(\psi_jD_n)_+$ 。 $s=2$, $r=6$の時に本来のWittenのゲージ方程式になる。

4° 我々の新しい枠組に対応する無限グラスマン多様体について述べよう。

$I=\mathbb{Z}^s\times\mathbb{N}_c^{r-s}$, $I_0=\mathbb{N}_c^r$ とする。ここで、$\mathbb{N}_c=\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$である。グラスマン多様体を考察する基になる ambient spaceV を$V=\mathcal{E}/\sum_{0\leq j<r}\mathcal{E}x_j$とする。Vは左$\mathcal{E}$加群であり、基底として $e_\alpha=D^\alpha\ (\mathrm{mod}\ \Sigma\mathcal{E}x_j)$ が取れる（ここで$\alpha\in I$）。$V_\emptyset=\mathcal{D}(\mathrm{mod}\ \Sigma\mathcal{E}x_j)$ とすると $V_\emptyset=\sum_{\alpha\in I_0}Ce_\alpha$ である。我々は、$V_\emptyset$とほぼ同じ大きさのVの部

分空間全体を考える。即ち、部分空間を無限サイズのフレイムξであらわすことにして、

$\xi=(\xi^{\alpha\beta}_{\mu\nu})_{\alpha\beta\in I,\mu\nu\in I_0}$で、各列ベクトルはVの元を表し、且つ、$\xi^{\alpha\beta}_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}(\alpha\beta\in I_0)$

となるもの全体を考える。フレイム$\xi=(\xi^{\alpha\beta}_{\mu\nu})_{\alpha\beta\in I,\mu\nu\in I_0}$ に対して、I_0サイズの行列

ξ_+を $\xi_+=(\xi^{\alpha\beta}_{\mu\nu})_{\alpha\beta\in I_0,\mu\nu\in I_0}$ で定める。

この時、上の splitting condition を満たす$\mathcal{D}$部分加群$\mathcal{J}=\mathcal{D}W$に対応するグラスマン多様体の元 $\xi=(\xi^{\alpha\beta}_{\mu\nu})_{\alpha\beta\in I,\mu\nu\in I_0}$ を、$\xi'=W^{-1}V\varnothing$を正規化したフレイム$\xi=\xi'\cdot\xi'^{-1}_+$で定める。この時、さらに$[W,D_{X'}]=0$ と仮定すると次のことが成りたつ：

命 題1．上で定めたξについて、次は1対1に対応する。

1） splitting condition を満たす$\mathcal{D}$部分加群$\mathcal{J}=\mathcal{D}W$で、$[W,D_{X'}]=0$となるもの。

2） $\xi=(\xi^{\alpha\beta}_{\mu\nu})_{\alpha\beta\in I,\mu\nu\in I_0}$ で次の条件を満たすもの：

$$\xi^{\alpha\beta}_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}\qquad(\alpha\beta\in I_0)\qquad(3a)$$

$$\xi^{\alpha\beta}_{\mu\nu}=0,\qquad(3b)$$

但し、あるi(0≦i<s)について、$\mu_i>\alpha_i<0$ または $|\mu|+|\nu|>|\alpha|+|\beta|$

$$\Lambda_i\xi\subset\xi,\ (0<i<s)\qquad(3c)$$

ここで$\Lambda_i \in \mathrm{End}(V)$, $\Lambda_i e_\alpha = e_{\alpha+\sigma_i}$ $(\sigma_i = (0, \ldots, \overset{i}{\overset{\wedge}{1}}, \ldots, 0))$

ξから$W = \sum_{\alpha\beta} w_{\alpha\beta}(x'') D_{x'}^{\alpha} D_{x''}^{\beta}$ への対応は、$w_{\alpha\beta} = \xi^{\#}_{-\alpha+\iota,\,-\beta+\iota}{}_{\iota,\,\iota}$で与えられる。

ここで、$\iota = (-1, \ldots, -1)$。 $\xi^{\#}$は$\xi'' = \exp(\sum_{s<j<r} x_j \Lambda_j)\xi$ を正規化したフレイム

$\xi^{\#} = \xi'' \cdot \xi_{+}^{-1}$で定義する。 □

5' 時間発展の方程式をグラスマン多様体の座標で書き替えよう。

命 題2. 発展方程式（２）において、$P = D^{\alpha} D^{\beta}$とする。上で述べた対応$W \longleftrightarrow \xi$により、（２）は、次の$I_0 \times I_0$行列Zの存在と同値である：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Lambda'^{\alpha} \Lambda''^{\beta}\right) \xi = \xi Z \qquad (4)$$

ここで、Zはもし存在すればξから一意に定まり、（４）はξの成分に関する非線形方程式になる。 □

[2]の場合と異なり、以下では時間発展の生成元Pとしては、$D_i D_j (0 \leqq i < s,\ s \leqq j < r)$の形のものしか考えない。 ここで、発展方程式の初期データを決定しよう。

定 理3. （３ａ）（３ｂ）（３ｃ）がなりたち、且つ、$\alpha = \sigma_i$, $\beta = \sigma_j$に対して（４）のZが存在するとすると、

$$\mu_i - \beta_j > \alpha_i < 0 \quad のとき, \quad \xi^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = 0 \qquad (5) \quad \square$$

以上の条件（３ａ）（３ｂ）（３ｃ）（５）が定めるグラスマン多様体上で（４）は発展方程式を定める。

定　理4．（３ａ）（３ｂ）（３ｃ）（５）をみたす勝手なξ_0を初期値に持つ、（４）の解が一意に存在する。　解$\xi(t)$は$\xi' = \exp(t\Lambda_i \Lambda_j)\xi_0$を正規化したフレイム $\xi(t) = \xi' \cdot \xi'^{-1}$ で構成される。 $\square$

注）　ここでは具体的にフレイムを用いて方程式を記述したが、この方程式はグラスマン多様体の上で不変的な意味を持つ。

文　献

1］　大 山 ： D加群とグラスマン多様体II
（数研講究録640・D加群と非線形可積分系 35-47, I は存在しない）

2］　大　山 ：高次元可積分系の hierarchy について
（数研講究録・非線形可積分系と代数解析）

3］　N.Suzuki：Witten's gauge field equations and an infinite Grasmann manifold.
Commun.Math.Phys. 113,155-172 (1987)