数理解析研究所講究録
第 763 巻 1991 年 100-123

Cauchy-Fantappiè 型積分核に対する Microlocal な Homotopy 公式について。

新潟大・教養　田島慎一
Shinichi TAJIMA

偏微分方程式のような解析学の問題を扱う際、積分変換や積分核の理論が有効であることが多い。最も簡単でしかも重要な積分核として

i) Dirac の δ-函数
ii) Cauchy 核

の2つをあげることができる。いうまでもなく前者は Distribution や hyperfunction に対する恒等変換を与える積分核であり、後者は正則函数に対する再生核である。両者が密接に関係していることは有名である。実際、δ-函数は Cauchy 核の実領域への境界値として定義される。

一言に Cauchy 核といっても実際には考えている問題や領域の形状等に応じて様々の形の Cauchy 核がある。同様に δ-函数も積分核や積分路の取り方を具体的に表示しようとすれば様々な表現を持っている。両者とも本来 cohomology 的に定義されるものであり、従って様々な表現を持ちうるわけである。

さて、δ-函数及び Cauchy 核の具体的表現のうちでも Cauchy-Fantappiè 型の積分核は特に重要である。以下にその理由を簡単に述べる。

i) 様々な Cauchy 核が Cauchy-Fantappiè 核から導ける。

ii) δ-函数の平面波分解公式及び曲面波分解公式に表われる積分核は Cauchy-Fantappiè 型の microfunction として理解できる。

すなわち、Cauchy-Fantappiè 型積分核をもとにして考えれば（多変数函数論とか偏微分方程式論とかいう既成の分野にとらわれずに） Cauchy 核と δ-函数を統一的に理解することができる。また Cauchy-Fantappiè 型積分核を考えることは積分変換を microlocal に考える

ことに対応している。

以上が我々の Cauchy-Fantappiè 型積分核に対する基本的な考え方である。さて，多変数函数論においては Cauchy-Fantappiè 型積分核に対する Koppelman の homotopy 公式は基本的である。そこで戸瀬信之氏との共著の論文 [28] で我々は

i) Cauchy-Fantappiè (-Koppelman) 型 microfunction の導入

ii) Microlocal な Koppelman 型の homotopy 公式の証明

iii) δ-函数の曲面波分解公式の一般化

を行った。本稿では主に Koppelman 型の microlocal な homotopy 公式について説明したい。§1 では，Bochner-Martinelli 核について復習する。§2 では，古典的な Koppelman の homotopy 公式について説明する。具体例として Bochner-Martinelli 核と Aizenberg 核とが homotope なことを示す。§3 では，Bony 核を例にとって，microlocal な homotopy 公式について説明する。

§1. 多変数函数論における Cauchy 核

多変数の正則函数に対する再生核としては，通常の Cauchy 核とともに Bochner-Martinelli 核が有名である。両者が共に δ-函数の別の表現を与えているという事実を復習しておく。

簡単の為2変数の正則函数 f の原点 $\xi=(0,0)$ における値 $f(0,0)$ の積分表示を考えることにする。$X=\mathbb{C}^2$ の座標を (z_1, z_2) とする。Cauchy の積分表示

$$f(0,0)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\substack{|z_1|=r_1\\ |z_2|=r_2}} \frac{1}{z_1 z_2} f(z_1, z_2)\, dz_1\wedge dz_2$$

及び Bochner-Martinelli 表示

$$f(0,0)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{|z_1|^2+|z_2|^2=r^2} \frac{\bar{z}_1 d\bar{z}_2-\bar{z}_2 d\bar{z}_1}{(z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2)^2} f(z_1, z_2)\, dz_1\wedge dz_2$$

について考える。

X 上の正則函数の germ 全体のなす層を $\mathcal{O}_X$ で表わす。

Mayer-Vietoris sequence と簡単な消滅定理より

$$H^1(X-\{P\}, \mathcal{O}_X) \cong H^2_{\{P\}}(X, \mathcal{O}_X) \neq 0$$

を得る。今、X の開集合 U_1, U_2 を

$$U_1 = \{(z_1, z_2) \in X \mid z_1 \neq 0\}, \quad U_2 = \{(z_1, z_2) \in X \mid z_2 \neq 0\}$$

で定めると $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$ は $X - \{P\}$ の Čech covering を与える。

従って次の Cauchy 核

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\frac{1}{z_1 z_2} \in \Gamma(U_1 \cap U_2, \mathcal{O}_X)$$

$$\bmod \Gamma(U_1, \mathcal{O}_X) + \Gamma(U_2, \mathcal{O}_X)$$

は $H^1(X-\{P\}, \mathcal{O}_X)$ の元を定める。

この cohomology 類

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\frac{1}{z_1 z_2} \in H^1(X-\{P\}, \mathcal{O}_X) \cong H^2_{\{P\}}(X, \mathcal{O}_X)$$

に対応する $H^2_{\{P\}}(X, \mathcal{O}_X)$ の元は原点 P に台を持つ δ-函数である。

次に Cauchy 核と Bochner-Martinelli 核の関係について述べる。$X=\mathbb{C}^2$ を実多様体とみなしたものを $X_{\mathbb{R}}$ とおき，$X_{\mathbb{R}}$ 上の hyperfunctions のなす層を $\mathcal{B}_{X_{\mathbb{R}}}$ で表わす。

$$
\begin{cases}
b_1 = \dfrac{\overline{z_2}}{z_1(z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2})} \in \Gamma(U_1, \mathcal{B}_{X_{\mathbb{R}}}), \\[2ex]
b_2 = \dfrac{-\overline{z_1}}{z_2(z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2})} \in \Gamma(U_2, \mathcal{B}_{X_{\mathbb{R}}})
\end{cases}
$$

とおけば，$U_1 \cap U_2$ において

$$
b_1 - b_2 = \frac{z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}}{z_1 z_2(z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2})} = \frac{1}{z_1 z_2}
$$

が成りたつ。更に

$$
\begin{cases}
\bar\partial b_1 = \dfrac{-\overline{z_2}\,d\overline{z_1}+\overline{z_1}\,d\overline{z_2}}{(z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2})^2} & \text{on } U_1 \\[2ex]
\bar\partial b_2 = \dfrac{-\overline{z_2}\,d\overline{z_1}+\overline{z_1}\,d\overline{z_2}}{(z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2})^2} & \text{on } U_2
\end{cases}
$$

を満たす。従って Bochner-Martinelli 核の定める hyperfunction 係数の微分型式

$$\frac{-\bar{z}_2 d\bar{z}_1 + \bar{z}_1 d\bar{z}_2}{(z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2)^2} \in \Gamma(X - \{P\}, \mathcal{B}_{X_{\mathbb{R}}}^{(0,1)})$$

は $\dfrac{1}{z_1 z_2}$ で表わされる Čech cohomology class の Dolbeault 表現であることが確かめられた。

多変数の正則函数が様々な形の再生核を持つ理由の一つは，Cauchy 核自体が本質的に cohomology 的な対象であることによる。逆にいえば，各々の Cauchy 型積分核は本来一つのものの別の表現であるともいえる。

<u>Note.</u> 積分表示式における cycle の選び方については Harvey [7] や Tong [29] を参照されたい。

多変数の正則函数に対する再生核としては Bochner-Martinelli 核（1938年，45年，53年）の他にも Bergman-Weil 核（1935年，36年），古典領域に対す

る積分核（Hua，1958年），Aizenberg核（1963年）強擬凸領域に対するHenkin-Ramírez核（1969年，70年）等が有名である。

これらは全て．Leray（1959年）によるCauchy-Fantappiè型積分核から導くことができる。例えば2変数のBochner-Martinelli核は次のCauchy-Fantappiè核

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\,\frac{\xi_1 d\xi_2 - \xi_2 d\xi_1}{\xi_1(\zeta_1 - z_1) + \xi_2(\zeta_2 - z_2)}\, d\zeta_1 \wedge d\zeta_2$$

において，$\xi_1 = \bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1$，$\xi_2 = \bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2$ を代入したものである。

上記のことから，Cauchy-Fantappiè核は様々なCauchy核のうちでも最も基本的なCauchy型積分核と見做すことができる．

<u>Note.</u> Cauchy-Fantappiè核と他のCauchy型積分核との関係については，たとえばNorguet[20]，Gindikin[6] Lu Qi-Keng[17] Øvrelid[21]等を参照されたい。

§2. Cauchy-Fantappiè-Koppelman 核に対する Koppelman の homotopy 公式.

$z=(z_1, z_2, \ldots, z_m)$, $\zeta=(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m) \in \mathbb{C}^m$ とする。 $\Phi(z, \zeta)$ により

$$\Phi(z, \zeta)=(\Phi_1(z, \zeta), \Phi_2(z, \zeta), \ldots, \Phi_m(z, \zeta))$$

なる形のベクトル値関数を表わすことにする。ここで $\Phi(z, \zeta)$ は z, ζ について正則とは限らない。
$\Phi(z, \zeta)$ に対し

$$\langle \Phi, \zeta-z \rangle = \sum_{j=1}^{m} \Phi_j(z, \zeta)(\zeta_j - z_j)$$

$$\langle \Phi, d\zeta \rangle = \sum_{j=1}^{m} \Phi_j(z, \zeta)\, d\zeta_j$$

と定める。

D は $\mathbb{C}^m$ 内の(有界)領域で smooth な境界 ∂D を持つとする。

<u>定義</u>　ベクトル値関数 $\Phi(z,\zeta)$ が

$$\langle \Phi(z,\zeta), \zeta - z \rangle \neq 0 \quad \text{for} \quad (z,\zeta) \in D \times \partial D$$

を満たすとき $\Phi(z,\zeta)$ を Leray map という。ただし

$$\mathrm{Re}\langle \Phi(z,\zeta), \zeta - z \rangle > 0 \quad \text{for} \quad (z,\zeta) \in D \times \partial D$$

を満たすような $\Phi(z,\zeta)$ を Leray map という人も多い。

さて、m 個のベクトル値関数 $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \dots, \Phi^{(m)}$ に対して外微分形式 Ω を

$$\Omega(\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \dots, \Phi^{(m)})$$

$$= \frac{(-1)^{m(m-1)/2}}{(2\pi i)^m} \cdot \frac{\langle \Phi^{(1)}, d\zeta \rangle}{\langle \Phi^{(1)}, \zeta - z \rangle} \wedge d\left(\frac{\langle \Phi^{(2)}, d\zeta \rangle}{\langle \Phi^{(2)}, \zeta - z \rangle} \right) \wedge$$

$$\cdots \wedge d\left(\frac{\langle \Phi^{(m)}, d\zeta \rangle}{\langle \Phi^{(m)}, \zeta - z \rangle} \right)$$

ときめる。これを Cauchy-Fantappiè-Koppelman 核と呼ぶことにする。

次の結果は Bochner-Martinelli-Leray-Koppelman の公式と呼ばれている。

<u>定理.</u> D は $\mathbb{C}^m$ の有界領域とする。$\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \cdots, \Phi^{(m)}$ を D における Leray map とする。$\overline{D}$ において正則な函数 $f(z)$ に対し次の積分表示が成立する。

$$f(z) = \int_{\partial D} \Omega(\Phi^{(1)}(z,\zeta), \cdots, \Phi^{(m)}(z,\zeta)) f(\zeta) .$$

Cauchy-Fantappiè-Koppelman 核に対する次の2つの補題は基本的である。両者とも Koppelman による。

<u>補題1.</u> $\Omega(\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \cdots, \Phi^{(m)})$ は $\Phi^{(1)}$ の取り方に依らない。

<u>補題2.</u> $\Omega(\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \cdots, \Phi^{(m)}) - \Omega(\Phi^{(1)}, \Psi^{(2)}, \Phi^{(3)}, \cdots, \Phi^{(m)})$ は $\bar{\partial}$-exact form である。

上記の2つの補題は　2次元の場合に限れば、具体的に計算をすることで容易に確かめることができる．

補題1の証明

$$\frac{g_1 d\zeta_1 + g_2 d\zeta_2}{g_1\cdot(\zeta_1 - z_1) + g_2\cdot(\zeta_2 - z_2)} \wedge \bar{\partial}\left(\frac{f_1 d\zeta_1 + f_2 d\zeta_2}{f_1\cdot(\zeta_1 - z_1) + f_2\cdot(\zeta_2 - z_2)}\right)$$

が g_1, g_2 に依らないことを確かめればよい。　与式を

$$\frac{分子}{\{g_1\cdot(\zeta_1 - z_1) + g_2\cdot(\zeta_2 - z_2)\}\{f_1\cdot(\zeta_1 - z_1) + f_2\cdot(\zeta_2 - z_2)\}^2}$$

と表わすと

$$\begin{aligned}
分子 &= (g_1 d\zeta_1 + g_2 d\zeta_2) \wedge \{(-\bar{\partial} f_1\cdot(\zeta_1 - z_1) - \bar{\partial} f_2\cdot(\zeta_2 - z_2))(f_1 d\zeta_1 + f_2 d\zeta_2) \\
&\qquad + (f_1\cdot(\zeta_1 - z_1) + f_2\cdot(\zeta_2 - z_2))(\bar{\partial} f_1 \wedge d\zeta_1 + \bar{\partial} f_2 \wedge d\zeta_2)\} \\
&= (g_1 d\zeta_1 + g_2 d\zeta_2) \wedge \{(-f_1 \bar{\partial} f_2\,(\zeta_2 - z_2) + f_2 \bar{\partial} f_1\,(\zeta_2 - z_2)) \wedge d\zeta_1 \\
&\qquad + (-f_2 \bar{\partial} f_1\,(\zeta_1 - z_1) + f_1 \bar{\partial} f_2\,(\zeta_1 - z_1)) \wedge d\zeta_2\}
\end{aligned}$$

$$= (g_1\cdot(\zeta_1 - z_1) + g_2\cdot(\zeta_2 - z_2))(-f_1\bar{\partial}f_2 + f_2\bar{\partial}f_1) \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2$$

となる。従って

$$与式 = \frac{f_1\bar{\partial}f_2 - f_2\bar{\partial}f_1}{\{f_1\cdot(\zeta_1 - z_1) + f_2\cdot(\zeta_2 - z_2)\}^2} d\zeta_1 \wedge d\zeta_2$$

となり、g_1 及び g_2 に依らない。

一般の次元の場合に補題1をこのような初等的な計算のみで証明するのはかなりめんどうであるが、幸い別の方法で簡単に証明することができる。

<u>補題2（Koppelman の homotopy 公式）について．</u>

これより領域 $D = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \rho = x_2 + x_1^2 + y_1^2 < 0\}$ を例にとって homotopy 公式を具体例で計算してみる。

領域 D の定義関数 ρ をもとにして，D に対する Levi 多項式を計算すると，$(\zeta_1, \zeta_2) \in \partial D$ とするとき

$$L(z, \zeta) = \bar{\zeta}_1(\zeta_1 - z_1) + \frac{1}{2}(\zeta_2 - z_2)$$

となる。今 $(\zeta_1, \zeta_2) \in \partial D$ を固定して考えれば

$L=0$ なる complex line は $(z_1, z_2) = (\zeta_1, \zeta_2)$ において ∂D と接し D と共通部分を持たない。すなわち、Levi 多項式は領域 D に対する supporting hypersurface の族を定義する。また、Levi 多項式 L は $(z, \zeta) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ において

$$2\,\mathrm{Re}\, L(z, \zeta) + \rho(z) - \rho(\zeta) \geqq 0$$

を満たす。特に $L(z, \zeta)$ は Leray map であり、しかも変数 z について正則である。

$L(z, \zeta)$ に対する Cauchy-Fantappiè 核は

$$\mathrm{const}\cdot \frac{-\frac{1}{2}\, d\bar{\zeta}_1}{\left\{ \bar{\zeta}_1 (\zeta_1 - z_1) + \frac{1}{2}(\zeta_2 - z_2) \right\}^2}\, d\zeta_1 \wedge d\zeta_2$$

である。このような積分核は Aizenberg [3] や Korány-Vági [14] 等により導入されている。

Note. 佐藤-河合-柏原 (SKK. Chap I. Ex 3.2.4) は H.Lewy 方程式を満たす CR-microfunctions に対する再生核を構成しているが、それは上記の積分核を microfunction として意味付けしたものにほかならない。

さて

$$H=\frac{\bar{\zeta}_1\,d\zeta_1+\frac{1}{2}\,d\zeta_2}{\bar{\zeta}_1(\zeta_1-z_1)+\frac{1}{2}(\zeta_2-z_2)}\wedge\frac{(\bar{\zeta}_1-\bar{z}_1)\,d\zeta_1+(\bar{\zeta}_2-\bar{z}_2)\,d\zeta_2}{(\bar{\zeta}_1-\bar{z}_1)(\zeta_1-z_1)+(\bar{\zeta}_2-\bar{z}_2)(\zeta_2-z_2)}$$

とおく。 補題1を利用することにより

$$\text{(i)}\quad \bar{\partial}_\zeta H=\frac{(\bar{\zeta}_1-\bar{z}_1)\,d\bar{\zeta}_2-(\bar{\zeta}_2-\bar{z}_2)\,d\bar{\zeta}_1}{\left\{(\bar{\zeta}_1-\bar{z}_1)(\zeta_1-z_1)+(\bar{\zeta}_2-\bar{z}_2)(\zeta_2-z_2)\right\}^2}\,d\zeta_1\wedge d\zeta_2$$

$$-\frac{-\frac{1}{2}\,d\bar{\zeta}_1}{\left\{\bar{\zeta}_1(\zeta_1-z_1)+\frac{1}{2}(\zeta_2-z_2)\right\}^2}\,d\zeta_1\wedge d\zeta_2$$

及び

$$\text{(ii)}\quad \bar{\partial}_z H=\frac{(\bar{\zeta}_1-\bar{z}_1)\,d\bar{z}_2-(\bar{\zeta}_2-\bar{z}_2)\,d\bar{z}_1}{\left\{(\bar{\zeta}_1-\bar{z}_1)(\zeta_1-z_1)+(\bar{\zeta}_2-\bar{z}_2)(\zeta_2-z_2)\right\}^2}\,d\zeta_1\wedge d\zeta_2$$

を得る。

これらの式からも予想されるように、Koppelman の homotopy 公式は 接 Cauchy-Riemann 方程式系の microfunction 解を解析する際にも有効に使われる。 この点に関しては 田島[27]等を参考にされたい。

§3. 超局所解析学における Cauchy-Fantappiè 核.

$x, y \in M = \mathbb{R}^m$ とし, ξ はその covector を表わすとする。 δ-函数の平面波分解公式は

$$\delta(x-y) = \frac{(m-1)!}{(-2\pi i)^m} \int_{S^{m-1}} \frac{\omega(\xi)}{(\langle x-y, \xi\rangle + i0)^m}$$

但し

$$\omega(\xi) = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \xi_j \, d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_{j-1} \wedge d\xi_{j+1} \wedge \cdots \wedge d\xi_m$$

で与えられる。 この公式中に使われている積分核は, 複素領域における Cauchy-Fantappiè 核の実領域への境界値として定義されている。($X = \mathbb{C}^m$ とおくとき, $T^*_M X$ は T^*X の中で totally real であることに注意) また、佐藤-河合-柏原が導入した δ-函数の曲面波分解公式 (SKK. Chap III. Ex. 1.2.5) も同様に, Cauchy-Fantappiè 型積分核として理解できる。

この節では これら Cauchy-Fantappiè 型 microfunction の間に成りたつ homotopy 公式について説明したい。

(論文[28]ではより一般の場合すなわち Cauchy-Fantappiè-Koppelman型 microfunction に対する homotopy 公式を扱っている)

Bony [5] が発見した次の曲面波分解公式

$$\delta(x) = \frac{1}{(-2\pi i)^2}\int_{S^1} \frac{1+ix\cdot\xi}{(x\cdot\xi + ix^2 + i0)^2}\,\omega(\xi)$$

(2次元のとき)を例にとって以下考える。

まず、この積分核が Cauchy-Fantappiè 型積分核であることを確かめよう。積分核の分母に表われる関数

$$x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + i(x_1^2 + x_2^2)$$

$$= x_1(\xi_1 + ix_1) + x_2(\xi_2 + ix_2)$$

が (ξ_1, ξ_2) について斉次一次となるように

$$= x_1\left(\xi_1 + ix_1\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}\right) + x_2\left(\xi_2 + ix_2\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}\right)$$

と拡張する。

この関数の虚部は非負であり、SKK の意味で positive type の関数であることに注意しておこう。

今

$$\varphi_1 = \xi_1 + i x_1\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}\,, \quad \varphi_2 = \xi_2 + i x_2\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}$$

更に

$$\Omega = \frac{-1}{(-2\pi i)^2}\cdot\frac{\varphi_1 dx_1 + \varphi_2 dx_2}{\varphi_1 x_1 + \varphi_2 x_2} \wedge d\left(\frac{\varphi_1 dx_1 + \varphi_2 dx_2}{\varphi_1 x_1 + \varphi_2 x_2}\right)$$

とおく。

$$\Omega = \frac{-1}{(-2\pi i)^2}\cdot\frac{\varphi_2 d\varphi_1 - \varphi_1 d\varphi_2}{(\varphi_1 x_1 + \varphi_2 x_2)^2} \wedge dx_1 \wedge dx_2$$

$$= \frac{-1}{(-2\pi i)^2}\cdot\frac{\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_1}\varphi_2 - \varphi_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_1}\right)d\xi_1 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_2}\varphi_2 - \varphi_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_2}\right)d\xi_2\right]}{(\varphi_1 x_1 + \varphi_2 x_2)^2} \wedge dx_1 \wedge dx_2$$

となるが、φ_1 及び φ_2 の斉次性を利用すれば

$$\Omega = \frac{-1}{(-2\pi i)^2}\cdot\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_2} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_2} \end{vmatrix}}{(\varphi_1 x_1 + \varphi_2 x_2)^2}(\xi_2 d\xi_1 - \xi_1 d\xi_2) \wedge dx_1 \wedge dx_2$$

となる（参 SKK. Chap III. Ex. 1.2.5）。更に計算を続けて

$$\Omega = \frac{1}{(-2\pi i)^2} \frac{1 + i\frac{1}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}(x_1\xi_1 + x_2\xi_2)}{(\varphi_1 x_1 + \varphi_2 x_2)^2}(\xi_1 d\xi_2 - \xi_2 d\xi_1)\, dx_1 \wedge dx_2$$

が確かめられる。従って Bony 核は Cauchy-Fantappiè 核であることがわかった。次にこの Bony 核と平面波分解公式に使われる普通の Cauchy-Fantappiè 核とを比較してみる。その為に

$$H = \frac{\xi_1 dx_1 + \xi_2 dx_2}{\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2} \wedge \frac{\varphi_1 dx_1 + \varphi_2 dx_2}{\varphi_1 x_1 + \varphi_2 x_2}$$

とおく。§2 での計算と同様にして

$$dH = \frac{\varphi_2 d\varphi_1 - \varphi_1 d\varphi_2}{(\varphi_1 x_1 + \varphi_2 x_2)^2} \wedge dx_1 \wedge dx_2 - \frac{\omega(\xi)}{(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)^2} \wedge dx_1 \wedge dx_2$$

が容易にたしかめられる。すなわち

Bony 核 − 普通の Cauchy-Fantappiè 核 = exact.

が示せた。

佐藤・河合・柏原では Cauchy-Fantappiè 核をもとに positive type の関数を phase function として使うことによって δ-函数の曲面波分解公式を得ている。私達は論文[28]において、Cauchy-Fantappiè-Koppelman 核をもとにして、いくつもの phase function を同時に含むような形の曲面波分解公式を得た。これらの積分核は互いに microlocal に homotope となることが示せる。その際、いくつもの phase function が混在するような microfunction を使うと homotopy を与える微分型式を具体的に与えることができる。§2 でも触れたが、このような形の積分核は、generic CR 部分多様体上で microfunctions を係数とする接 Cauchy-Riemann 複体を解析する際、自然に表われてくる。

§4. あとがきとお礼

Cauchy-Fantappiè 核のような具体的な積分核を使うことにより（抽象度の高い）local cohomology と関連するような現象を理解しようというのが我々の基本的考え方である。

Cauchy-Fantappiè 核を derived category における morphism として捉える必要があるが、その際にも Koppelman 型の homotopy 公式が有効であるように思える。たとえば holomorphic な Lefschetz fixed point formula のような指数定理は holonomic 系と Cauchy 型積分核の理論（を derived category の中で考える）を使って定式化するのが最も素朴なやり方のように思える。

古典的積分核については安達謙三氏（長崎大）の修士論文がたいへん参考になった。また Koppelman の homotopy 公式については津野義道氏（上智大）に教えていただいた。たいへんありがとうございました。

以上

文献

〔1〕 安達謙三 : 正則関数の積分表示について (1969).

〔2〕 R.A. Airapetjan and G.M. Henkin : Integral representations of differential forms on Cauchy-Riemann manifolds and the theory of CR-functions, I, II, Russian Math. Surveys 39 (1984), 41-118, Math. USSR Sbornik 55 (1986), 91-111.

〔3〕 L.A. Aizenberg : Integral representations of functions which are holomorphic in convex regions of C^n space. Soviet Math. 4 (1963), 1149-1152.

〔4〕 S. Bochner : Analytic and meromorphic continuation by means of Green's formula, Ann. of Math. 44 (1943), 652-673.

〔5〕 J.M. Bony : Propagation des singularités différentiables pour une classe d'opérateurs différentiels à coefficients analytiques, Astérisques 34-35 (1976), 43-91.

〔6〕 С.Г. Гиндикин : Преобразование Радона для голоморфных функций от нескольких переменных и связанные с ним интегральные формулы, Успехи Мат. Наук 20 (1965), 237-239.

〔7〕 F.R. Harvey : Integral formulae connected by Dolbeault's isomorphism, Rice univ. Studies 56 (1970), 77-97.

〔8〕 G.M. Henkin : Integral representations of functions holomorphic in strictly pseudoconvex domains and some applications, Math. USSR Sbornik 7 (1969), 597-616.

〔9〕 ____________ : The Lewy equation and analysis on pseudoconvex manifolds, I, II, Russian Math. Surveys 32 (1977), 59-130, Math. USSR Sbornik 31 (1977), 63-94.

〔10〕 G.M. Henkin and J. Leiterer : Theory of functions on complex manifolds, Birkhäuser (1984).

[11] L. Hua : Harmonic analysis of functions of several complex variables in the classical domains, AMS, Providence (1963).

[12] W. Koppelman : The Cauchy integral for functions of several complex variables, Bull. AMS. 73 (1967), 373-377.

[13] ———————— : The Cauchy integral for differential forms, Bull. AMS. 73 (1967),554-556.

[14] A. Korány and S. Vāgi : Singular integrals on homogeneous spaces and some problems of classical analysis, Annali. Scuola Norm. Sup. Pisa, 25 (1971), 575-648.

[15] J. Leray : Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe, Bull. Soc. Math. Fr. 87 (1959), 81-180.

[16] I. Lieb : Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf streng pseudokonvexen Gebieten, Math. Ann. 190 (1970), 6-44.

[17] Lu Qi-Keng : On the Cauchy-Fantappiē formula, Acta Math. Scinica 17 (1965), 344-363.

[18] E. Martinelli : Sopra una dimostrazione di R. Fueter per un teorema di Hartogs, Comm. Math. Helv. 15 (1942), 340-349.

[19] ————————— : Sulle estensioni della formula integrale di Cauchy alle funzione analitiche di piū variabile complesse, Ann. Mat. Pura ed Appl. 34 (1953), 277-347.

[20] F. Norguet : Problēmes sur les fonctions différentielles et les courants, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 11 (1961), 1-81.

[21] N. Øvrelid : Integral representation formulas and L^p-estimates for the $\bar{\partial}$-equations, Math. Scand. 29 (1971), 137-160.

[22] P.L. Poljakov : The Cauchy-Weil formula for differential forms, Math. USSR Sbornik 14 (1971), 383-398.

[23] E. Ramírez de Arellano : Ein Divisionsproblem und Randintegraldarstellung in der Komplexen Analysis, Math. Ann. 184 (1970), 172-187.

[24] M. Sato, T. Kawai and M. Kashiwara : Microfunctions and pseudo-differential equations, Lecture Notes in Math. 287 (1973), 265-529.

[25] D. Schiltz : Un procédé de localisation de la formule de Cauchy-Fantappiè, C.R. Acad. Sci. Paris, 305 (1987), 873-875.

[26] S. Tajima : CR-microfunctions and the Henkin-Ramírez reproducing kernels, Proc. Japan Acad. 61 (1985), 137-139.

[27] ———— : Analisi microlocale delle formule di rappresentazioni integrali per domini di tipo $\mathrm{Re}z_2 + |z_1|^{2m} < 0$, Boll. UMI. (7) 3-A (1989), 185-193.

[28] S. Tajima and N. Tose : Microlocal homotopy formula and curvilinear wave expansions of delta-function, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. 42 (1988), 123-129.

[29] Y.L.L. Tong : Integral representation formulae and Grothendieck residue symbol, Amer. J. Math. 95 (1973), 904-917.

[30] A. Weil : L'intégral de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables, Math. Ann. 111 (1935), 178-182.