数理解析研究所講究録
第 764 巻 1991 年 136-149

安定写像の特異点集合の連結成分の数と特異値の配置について

東工大・理・ 小林真人
(Mahito Kobayashi)

§1. 問題の設定

滑らかな多様体が2つ与えられたとき、その間にどれだけ簡単な写像が存在するのか考えてみよう。 相対関係の難しさを除くために、まず値域となる多様体がEuclid空間であると仮定する。

たとえば、多様体Mと$\mathbb{R}$の間にはモース関数がたくさん存在するが、もしM上に特異点が2点しかないような「簡単」なモース関数が存在したら、実はMは球面S^nと位相同型である。 この良く知られた例が物語るように、多様体Mのホモトピー型、位相型、C^∞-構造を写像を用いて調べるとき、できるだけ簡単な写像を捜すことは、とても重要である。

さて、冒頭にかかげた基本姿勢に沿って、ここでは次のように問題を設定しよう。 閉じた4次元単連結多様体の族$\mathcal{M}_1$を次のように定義する。

定義： $M^4 \in \mathcal{M}_1 \Leftrightarrow \exists f: M \longrightarrow D^2 \subset \mathbb{R}^2$, onto, stable, s.t 1) $\forall a$, regular value に対して $f^{-1}(a)$ は torus か sphere.

2) f の cusp point は高々1点.

この多様体の族 $\mathcal{M}_1$ から平面への写像について調べることにする. とくに4次元多様体の族を選んだのは、M の C^∞-構造はよく判っていないが、一般ファイバー、即ち閉曲面の C^∞ 構造は解明されているからである. この族 $\mathcal{M}_1$ の「広さ」については未だ判然としないが、次のことが云える: S^4, $\mathbb{C}^2P$, $S^2 \times S^2$, $S^2 \tilde{\times} S^2$ (S^2 上の non-trivial S^2 bundle), 及びこれらの連結和は、$\mathcal{M}_1$ の元である.

問題: $M \in \mathcal{M}_1$ から D^2 への安定写像はどれだけ「簡単」になるか.

さて次に、どのような写像を簡単と呼ぶのか、提言しなければならない. 多様体を調べるという目的に沿って、対 $(f(M), C(f))$ の位相型が簡単であることを要求したい。

定義: $f: M \longrightarrow D^2$, stable が "simple"

$\iff$ 1) $\#$ cusp of $f \leq 1$

2) $f \mid S(f) \setminus \{cusp\} : S(f) \setminus \{cusp\} \longrightarrow D^2 \subset \mathbb{R}^2$ が embedding.

3) 全ての f-map fibre $f^{-1}(a)$ が連結.

このような写像に対して $(f(M), C(f))$ はすでに簡単であると云って良いだろう.

<u>事実</u>: $M \in \mathcal{M}_1 \Rightarrow {}^{\exists}f : M \to D^2$, simple, かつ regular な f-fibre は T^2 か S^2.

簡単のために, 「f の regular な fibre が T^2 か S^2」のとき, 「$g_f \leq 1$」と書くことにしよう. 上の事実をふまえて, $M \in \mathcal{M}_1$ 上の "simple" かつ $g_f \leq 1$ の写像の間で, より「簡単」ということを次のように考える. (simple かつ $g_f < 1$ な map は, そうでない map より簡単だと思う). すなわち $f, g : M \to D^2$, simple, $g_f \leq 1$, $g_g \leq 1$. のとき, f が g より簡単 $\Leftrightarrow$ $\# S(f) \lneq \# S(g)$. すると問題は次のように書き換えられる.

<u>問題</u>: $M \in \mathcal{M}_1$, $f : M \to D^2$ simple, $g_f \leq 1$
$\# S(f)$ はどこまで減らせるか?

<u>注意</u> $f : M^4 \to \mathbb{R}^2$, stable の特異値集合 $S(f)$ は, M に埋込まれた何本かの simple closed curves となる. 特異点のタイプは, "fold" と "cusp" のみが現れる.

§2. 結果 ([Ma])

<u>定理A</u>: $M \in \mathcal{M}_1$, $f : M \to D^2$, simple, $g_f \leq 1$

$\Rightarrow$

$$\# S(f) \geq \begin{cases} \frac{1}{2} b_2(M) + 3 & (b_2(M), \text{偶数}, \text{non } 0) \\ \frac{1}{2}(b_2(M) + 5) & (b_2(M), \text{奇数}) \end{cases}$$

ただし $\# S(f)$ は $S(f)$ の連結成分の数を，$b_2(M)$ は M の第2 Betti 数をあらわす．

多様体 M を homeo. に変形することを許せば，さらに詳しく次のことが示せる．

<u>定理B</u>: $M \in \mathcal{M}_1$, に対し $^\exists N \in \mathcal{M}_1$, s.t. $N \approx M$ (homeo)

$^\exists g : N \to D^2$, simple, $g_g \leq 1$ s.t.

(1)

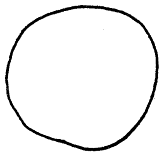
$$\# S(g) \begin{cases} = 1 & (b_2(M) = 0) \\ \leq \frac{3}{2} b_2(M) + 1 & (b_2(M), \text{偶数}, \text{non } 0) \\ \leq \frac{3}{2}(b_2(M) + 1) & (b_2(M), \text{奇数}) \end{cases}$$

(2) g の特異値の配置は"自明"，すなわち D^2 内の T^2-fibred な連結領域の内側に，別の T^2-fibred な領域はない．

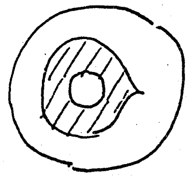
この2つの定理から，多様体 $M \in \mathcal{M}_1$ の各 homeo 類に対して，次のような特異値集合を持つ簡単な写像の存在が示される．

例　$[M] \in \mathcal{M}_1/_{\text{homeo}}$ 上には. 次のような簡単な写像が存在する.

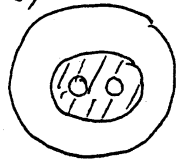
1) $b_2(M) = 0$ case,

$\exists f : [M] \longrightarrow$ 

2) $b_2(M) = 1$ case,

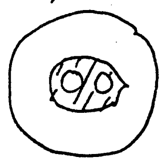
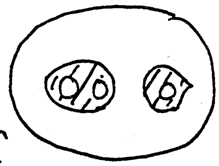
$\exists f : [M] \longrightarrow$ 

3) $b_2(M) = 2$ case,

$\exists f : [M] \longrightarrow$ 

＊斜線部は, その上の fibre $f^{-1}(a)$ が Torus となる領域。残りの一般 fibre は S^2.

4) $b_2(M) = 3$ case,

$\exists f : [M] \longrightarrow$  or 

5) ……

注意1: 定理 A, B の等号を成立させる多様体と写像が存在する.

注意2: 多様体 M が $M = M' \# S^2 \times S^2$, $M' \in \mathcal{M}_1$ と分解できるなら, M の diffeo. 型を保ったまま定理 B (をより強めたもの) が示せる.

以下の § で証明の概略を述べる.

§3 写像の改変. ([Ma])

写像を取りかえる、いくつかの具体的な方法を説明しよう.

I. 写像の連結和 $f \# g$

$f: M \to D^2$, $g: N \to D^2$, いずれも stable, onto とする. このとき ∂D^2 は definite な fold points $(u, x, y, z) \longmapsto (u, x^2+y^2+z^2)$ の像になっている. f の像となる D^2 を D_1, g のそれを D_2 と区別して書くことにしよう. 図 2.1 のように ∂D_i の小さな弧と、その両端を結ぶ弦とで囲まれる D_i 内の領域 E_i を取ると Levine, ([$\mathbb{R}^2$]) の議論から、$f^{-1}(E_1)$, $g^{-1}(E_2)$ は4次元円板 D^4 と diffeo. になる. そこで M, N から $f^{-1}(E_1)$, $g^{-1}(E_2)$ をとり除いて連結和を取れば、写像

$$f \# g : M \# N \to D_1 \natural D_2 = D^2$$

が定義できる. $f \# g$ も stable である.

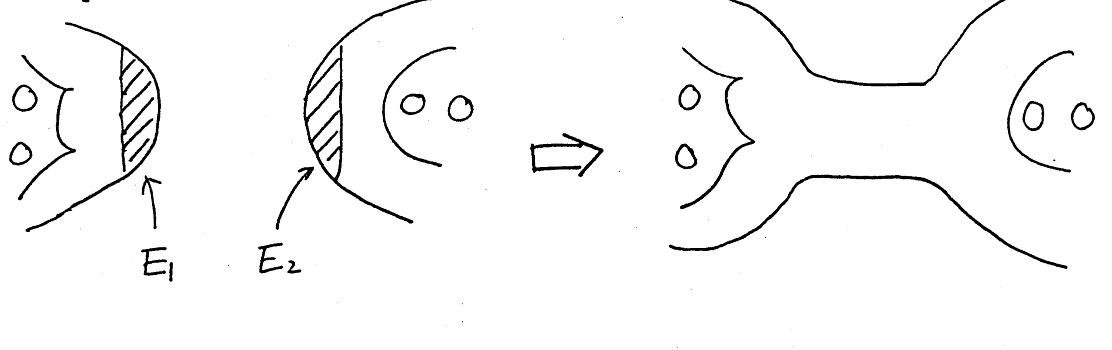


図 2.1.

次の記号を用意しておく.

<u>記号:</u> $f: M \to D^2$, $f_i: M_i \to D^2$, all stable.

$(M, f) = (M_1, f_1) \natural (M_2, f_2)$

$\Leftrightarrow$ 1) $M \cong M_1 \# M_2$ (diffeo)

2) f と $f_1 \# f_2$ が $\mathcal{A}$-同値 (M と D^2 の diffeo s で移りあう)

II. $f: M \to D^2$ から $\tilde{f}: M \# S^2 \times S^2 \longrightarrow S^2$ をつくる.

$f: M \to D^2$ が stable のとき, 先に述べたように $\exists C \subset S(f)$, $\partial D^2 = f(C)$. である. ∂D の小さなカラー近傍 $\bar{\tau}(\partial D)$ を取ると $f^{-1}(\tau(\partial D))$ は C の tubular nbd. となる. これを $\nu(C)$ とかく.

このとき $\overline{M \setminus \nu(C)}$ と $S^2 \times D^2$ を貼り合わせて得られた多様体を $\tilde{M}$ と書こう. 今, M が単連結と仮定すれば, Wall ([W]) の議論によって $\tilde{M} = M \# S^2 \times S^2$ or $M \# S^2 \tilde{\times} S^2$ となる. いま, ある貼り合わせで $\tilde{M}$ が後者になったとしよう.

$\nu(C) \overset{\text{も}}{\cong} D^3 \times S^1$ の diffeo$\overset{\text{も}}{\vee}$の類は $\pi_1 SO(3) = \mathbb{Z}_2$ に応じて 2 つあるので, non-Trivial な元に対応する diffeo. を 1 つ取って, それと先の貼り合わせを合成する. この合成写像で貼り直すと, 今度は $\tilde{M} = M \# S^2 \times S^2$ となる. そこで, $\tilde{M}$ が $M \# S^2 \times S^2$ となるように貼り合わせることにする.

さて, 多様体の改変に応じて写像 $f| : \overline{M \setminus \nu(C)} \to \overline{D \setminus \tau(\partial D)}$

と $\mathrm{proj}: S^2 \times D^2 \longrightarrow D^2$ も貼り合わせることができて,

$\tilde{f}: M \# S^2 \times S^2 \longrightarrow S^2 (= D^2 \cup_{\varphi} D^2)$

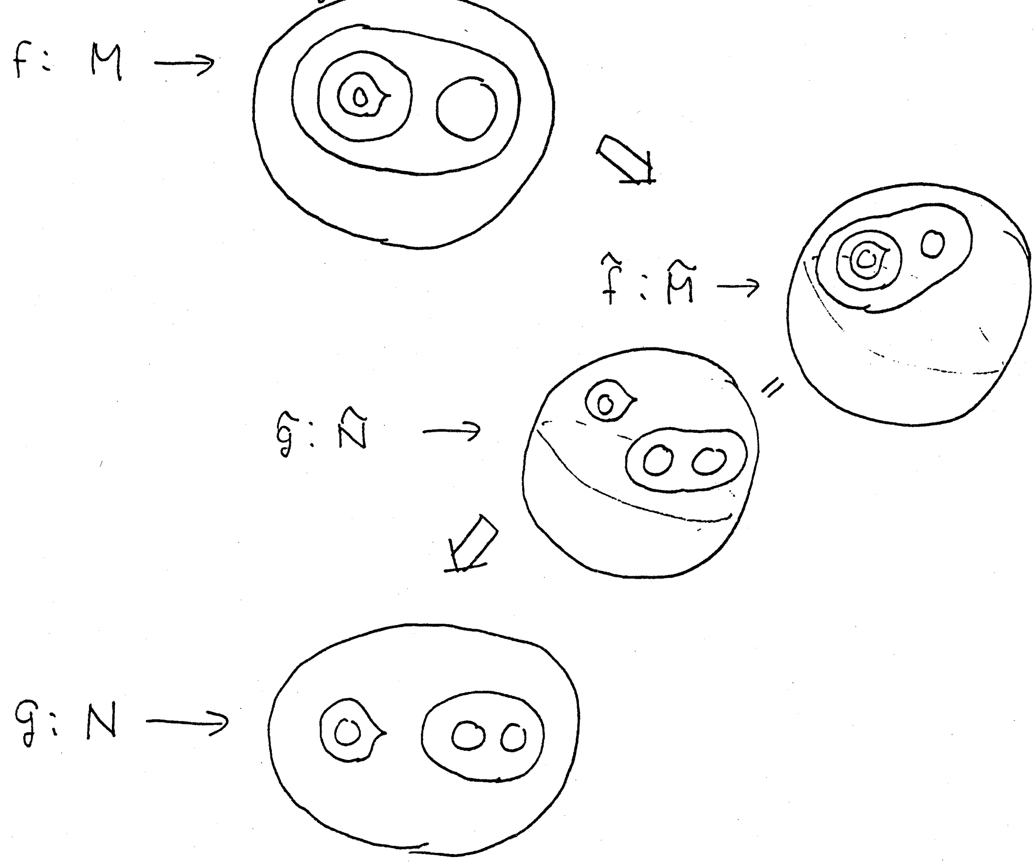
が定義される.

Ⅲ S-operation

<u>定義</u> $f: M \to D^2$, $g: N \to D^2$, stable, $\pi_1(M) = \pi_1(N) = 1$

(M, f) と (N, g) が S-equivalent $\Leftrightarrow$ 1) $M \# S^2 \times S^2$ と $N \# S^2 \times S^2$ が diffeo. 2) $\tilde{f}$ と $\tilde{g}$ が $\mathcal{A}$-同値.

<u>例</u>. $(M, f) \underset{S\text{-eq}}{\sim} (N, g)$



<u>定義</u>：（S-operation） 多様体と写像の組 (M, f) に S-operation を施す $\Longleftrightarrow$

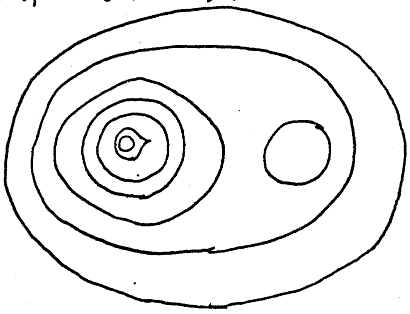
$$(M, f) = (M_1, f_1) \sqcup (M_2, f_2) \sqcup \cdots \sqcup (M_k, f_k)$$

と分解して，ある (M_i, f_i) を S-equivalent な (N_i, f_i) で置き換える．

この操作の効果を示そう．

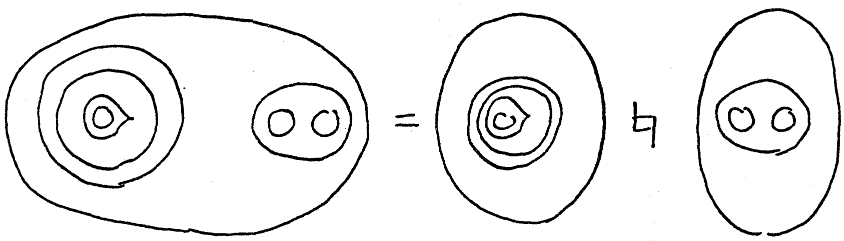
<u>例</u>

$f : M \to$



S-equivalent

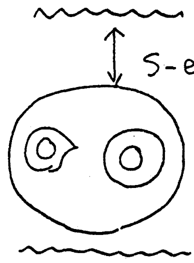
$g : N \to$



$$(g, N) = (g_1, N_1) \sqcup (g_2, N_2)$$

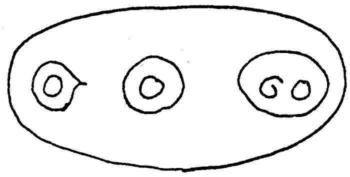
S-eg.

$h_1 : L_1 \to$



$$(M, f) \underset{\text{S-op}}{\sim} (L_1, h_1) \sqcup (g_2, N_2)$$

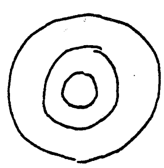
s.t. $h_1 \# g_2 : L_1 \# N_2 \longrightarrow$



ここで $\pi_1(M), \pi_1(N) = 1$ ならば、$M \# S^2\times S^2 \cong N \# S^2\times S^2$ のとき $M \approx N$ となることに注意すれば；

<u>S-operation の効果：</u> 多様体の homeo type を保って特異値の配置を"自明"にする。

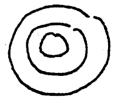
IV C-operation.

<u>補題</u> (Teragaito, Levine,) $\pi_1(M^4)=1$, $\exists f: M \to D^2$ stable, $g_f \leq 1$. s.t $(f(M), C(f)) =$ 

$\Rightarrow M \cong S^4$

ところで S^4 上には、$(f(M), C(f)) = (D^2, \partial D^2)$ となるような simple map が存在する。そこで S^4 上で写像を取り換えれば、この2本の特異点のなす曲線が除去される。

<u>定義</u>：(C-operation) 多様体 $M \in \mathcal{M}_1$ と安定写像の組 (M, f) で次を満たすものを考える。

$(M, f) = (M_1, f_1) \sqcup (M_2, f_2)$, $f_2: M_2 \to$ , $g_{f_2} \leq 1$

このとき (M, f) に C-operation を施す

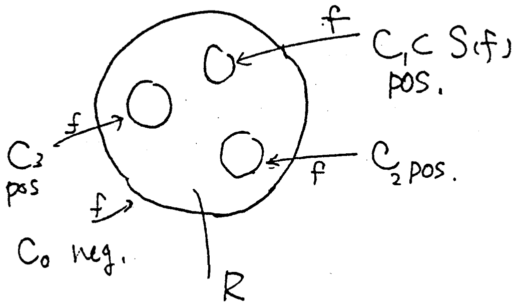
$\Leftrightarrow (M, f)$ を (M_1, f_1) に取りかえる。

C-operationの効果：多様体の diffeo. type を保って1対の fold curves を cancel する.

§4. 証明の輪郭

あと1, 2の準備をすれば証明は,（少くともその輪郭は）簡単にできる. 面倒なので, 以下 $b_2(M) = \text{even}$ とする.

R を正則値 $f(M) \setminus C(f)$ の連結成分で, その上の fibre がトーラスになっているものとする. $\bar{R}$ の外側の境界に対応する曲線 $C \subset S(f)$ を negative curve, 内側のそれを positive curve と呼ぼう. R は必らず穴を持つことが示される.



S(f)の各成分は, $\partial f(M)$ に対応する1つを除いて全て, positive か negative になっている. この S(f) の"向き付け"に対して次の Levine の式が成立する.

$$b_2(M) = 2\,(N_+ (\#\text{ of all positive curves}) - N_- (\#\text{ of neg. curves}))$$

定理A の証明.（$b_2(M) = 4$ のとき）

$N_+ - N_- = 2$, $S(f) = N_+ + N_- + 1$ だから

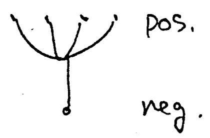
$S(f) = 2N_- + 3$ となる．ここで N_- の最小値を求めれば良いが，$N_- = 0$ だと，前述の領域 R は存在しないことになる．したがって $S(f)$ は $\partial f(M)$ に対応する1本だけとなり，矛盾を生ずる．よって $\min N_- = 1$ となり，

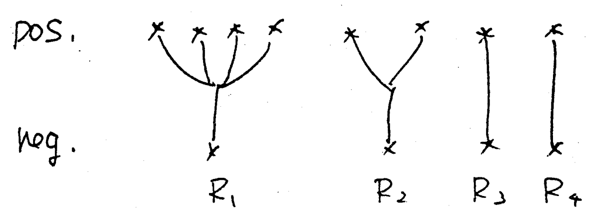
$$S(f) \geq 2 + 3 = 5 .$$

(「=」を満たす M と f は具体的に作れる) □

<u>定理Bの証明</u>　($b_2(M) = 4$ のとき)

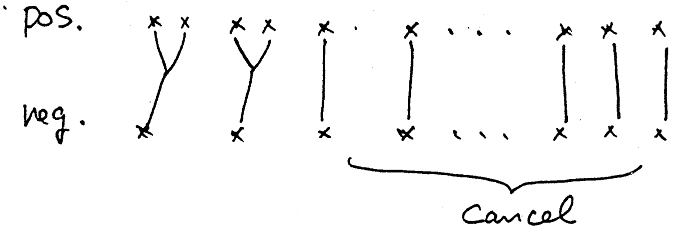
まず勝手に $f: M \to D^2$, simple, $g_f \leq 1$ を取ってくる．(M, f) に S-operation を施して特異値の配置が「自明」な組 (N, h) を作る．$N \approx M$ と $\# S(f) = \# S(g)$ に注意しておく．

“トーラスファイバー”の領域 R は，1つの negative curve に対して複数の pos. curve を対応させているが，これを模式的に  と表わそう．全ての pos. 又は neg. curves の間の対応関係を同じように表わそう．



さて，上図のR_3, R_4 に対応する部分は，C-operation が適要できることを示している．従って (N, f_t) に C-oper. を施してこの4つの $S(f)$ の成分は除去できる．

$N_+ - N_- = 2$ を用いて，Cancel される $S(f)$ の成分が最小となる組合わせを調べると，

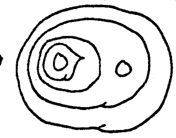
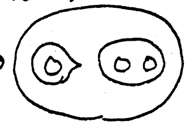


従って，どんなに「まずい」組合わせでも，$\# S(f)$ は $4 + 2 + 1 = 7$ 以下には減らせる．（最後の +1 は $\partial f(M)$ の分）
この「=」を成立させる M と f が具体的に作れる．□

§5. 明らかになった問題

<u>問題1</u> 定理Bで求められた簡単な写像から $M \in \mathcal{M}_1$ の位相型を求めよ．

<u>問題2</u> $C(f)$ の配置は M の C^∞ 構造と本質的に関係するか．

たとえば，$M \xrightarrow{f}$  に対し，$\exists N \xrightarrow{g}$  , $N \approx M$．

であるが，$M \cong N$ が云えるか？

参考文献

[Ma] Mahito. K, Simplifying mappings from certain simply connected 4-manifolds into the plane, (preprint)

[R²] H. Levine, Mappings of manifolds into the plane Amer. J. Math. 88 (1966), 357-365.

[W] C.T.C. Wall, Diffeomorphisms of 4-manifolds, Journal. London Math. Soc. 39 (1964) 131-140.

M. Teragaito, Fibred 2-knots and lens spaces, Osaka J. Math. 26 (1989), 57-63, 953.