数理解析研究所講究録
第766巻 1991年 62-67

ある2階退化楕円型作用素の準楕円性について

京大・理　森岡達史　(Morioka Tatsushi)

本文では、3変数2階微分作用素

(1.1) $L = D_t^2 + f(t)D_x^2 + g(x)D_y^2$

が準楕円性(hypoellipticity)をもつための十分条件を与える。

2階微分作用素

(1.2) $P = \sum_{k,\ell=1}^{n} a_{k\ell}(x)D_k D_\ell + i\sum_{k=1}^{n} b_k(x) + c(x)$ in $\mathbb{R}^n$

$(a_{k\ell}, b_k \in C^\infty$, Real, $c(x) \in C^\infty$, $D_k = -i\partial_{x_k})$

が準楕円性をもつための十分条件としては次のことが知られていた。

定理A (森本[6])

$\sum_{k,\ell=1}^{n} a_{k\ell}(x)\xi_k\xi_\ell \geq 0$ for $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$

を仮定する。さらに任意の$\varepsilon > 0$に対してある$C > 0$が存在して

(1.3) $\|\log\Lambda u\|^2 \leq \varepsilon \,\mathrm{Re}\,(Pu, u) + C\|u\|^2$ for $u \in C_0^\infty(\Omega)$

をみたすならば、PはΩで準楕円性をもつ。ここでΩは$\mathbb{R}^n$の開集合、$\log\Lambda$は$\log(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$をSymbolとする擬微分作

用素である。

定理Aは次の結果の一般化になっている。

定理B（Kusuoka - Strook [4]）

(1.4) $L = D_t^2 + D_x^2 + g(x) D_y^2 \quad \text{in } \mathbb{R}^3$

$(g(0)=0, \quad g(x)>0 \text{ for } x \neq 0, \quad x g'(x) \geq 0)$

は $\lim_{x \to 0} |x \log g(x)| = 0$ のとき（かつそのときに限って）準楕円型になる。

$g(x)$が有限次で消えるとき，すなわちあるdに対して$g^{(d)}(0) \neq 0$となるときLが準楕円型になることは[4]以前にすでに知られていた。定理Bは$g(x)$が無限次で消える場合も含んでいる。たとえば$g(x) = e^{-|x|^{-\sigma}}$ $(\sigma > 0)$の場合，定理BよりLは$\sigma < 1$のとき（かつそのときに限って）準楕円型になることがわかる。さらに$\sigma < 1$はLが(1.3)をみたすための必要十分条件になっている。

さて、次の退化楕円型作用素

$L_0 = D_t^2 + t^{2k} D_x^2 + e^{-|x|^{-\sigma}} D_y^2 \quad \text{in } \mathbb{R}^3$

$(k = 0, 1, 2, \cdots)$

の準楕円性を，定理Aを用いて判定してみよう。$k=0$のときは（定理Bによって）Lは$\sigma < 1$の場合に限って準楕円型に

なることがわかっている。一般の（正の整数）k に対しては $\sigma < \frac{1}{k+1}$ が (1.3) をみたすための必要十分条件になっている。したがって $\sigma < \frac{1}{k+1}$ のとき L_0 は準楕円型になる。しかし，$\sigma < \frac{1}{k+1}$ という条件は（L_0 が準楕円性をもつための）必要条件かどうかはわからない。そこで L_0 の係数を一般化した退化楕円型作用素

(1.1) $\quad L = D_t^2 + f(t) D_x^2 + g(x) D_y^2$

の準楕円性について考える。ここで $f(t)$ と $g(x)$ に対しては

(1.5) $\quad f(0) = g(0) = 0 \ ; \quad f(t),\ g(x) > 0 \quad \text{for } t \neq 0,\ x \neq 0$

を仮定している。我々は次の結果を得た。

定理 1. (1.1) の L が (1.5) とさらに

(1.6) $\quad \lim_{t \to 0} |t \log f(t)| = 0$

(1.7) $\quad \lim_{x \to 0} |x \log g(x)| = 0$

をみたすとき，L は準楕円型になる。

注意. $f(t)$ が $t f'(t) \geqq 0$ をみたすときは，(1.6) は（L が準楕円性をもつための）必要条件にもなっている。

定理 1 より L_0 は（正の整数）k の値に関係なく $\sigma < 1$ のとき常に準楕円型になることがわかる。

例 1. $\quad L = D_t^2 + e^{-|t|^{-\sigma}} D_x^2 + e^{-|x|^{-\tilde{\sigma}}} D_y^2$

は $\sigma < 1$, $\tilde{\sigma} < 1$ のとき準楕円型，$\sigma \geqq 1$ のとき準楕円型でない。

さて、保城[3]は次の微分作用素の準楕円性を考察した。

(1.8) $$L = D_t^2 + f(t)D_x^2 + g(t)D_y^2$$

ここで、$f(t)$, $g(t)$ に対しては

(1.9) $$f(0)=g(0)=0\ ,\quad tf'(t)\geqq 0,\quad tg'(t)\geqq 0$$

を仮定している。

定理 C-I　(1.8)のLが(1.9)とさらに

(1.10) $$\begin{cases} \lim_{t\to 0} \sqrt{f(t)}\,|t \log g(t)| = 0 \\ \lim_{t\to 0} \sqrt{g(t)}\,|t \log f(t)| = 0 \end{cases}$$

をみたすとき、Lは準楕円型になる。

定理 C-II　(1.8)のLが(1.9)とさらに次の条件：

$\exists\, \gamma\ (0<\gamma<1)$ が存在して

(1.11) $$\sqrt{f(\gamma t)}\,|t \log g(t)| \geqq \varepsilon > 0 \quad \text{near } t=0$$

をみたすとき、Lは準楕円型でない。

定理 C-I, II は $f(t)$ と $g(t)$ がある程度同じ速さで消えるときLは準楕円型になり、そうでないときLは準楕円型にならないことを示している。

例2，定理 C-I, II より

$$L = D_t^2 + t^{2k} D_x^2 + e^{-|t|^{-\sigma}} D_y^2 \qquad (k=0,1,2\cdots)$$

は $\sigma < k+1$ のとき、かつそのときに限って準楕円性をもつ。

さて、我々は(1.1)と(1.8)を一般化した

(1.12) $\quad L = D_t^2 + f(t) D_x^2 + g(t) h(x) D_y^2$

の準楕円性を考察する。ここで $f(t)$, $g(t)$, $h(x)$ に対しては

$$(1.13) \quad \begin{cases} f(0) = g(0) = h(0) = 0 \\ f(t),\ g(t),\ h(x) \neq 0 \quad \text{for} \quad t,\ x \neq 0 \\ t f'(t) \geqq 0, \quad t g'(t) \geqq 0 \end{cases}$$

を仮定している。

定理２　(1.12)の L が (1.13) とさらに

$$(1.14) \quad \begin{cases} \lim_{t \to 0} \sqrt{f(t)}\, |t \log g(t)| = 0 \\ \lim_{t \to 0} \sqrt{g(t)}\, |t \log f(t)| = 0 \\ \lim_{x \to 0} |x \log h(x)| = 0 \end{cases}$$

をみたしているとき、L は準楕円型になる。

補足.　最近、平良[8]は２階微分作用素の準楕円性について考察し、定理２の主張を含む結果を得た。

文献

1. V. S. Fedi On a criterion for hypoellipticity, Math. USSR Sb 14. (1971) 15 - 45

2. T. Hoshiro Microlocal energy method of Mizohata and hypoellipticity, J. Math. Kyoto Univ 28. (1988) 1-12

3. T. Hoshiro Hypoellipticity for infinitely degenerate elliptic and parabolic operators of second order, J. Math. Kyoto Univ. 28 (1988) 615 - 632

4. S. Kusuoka - D. Stroock Application of the Malliavin calculus part II, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA. Math 32 (1985) 1- 76

5. S. Mizohata On the Cauchy problem, Academic Press, 1986

6. Y. Morimoto A criterion for hypoellipticity of second order differential operators, Osaka J. Math 24 (1987), 651-675

7. T. Morioka Hypoellipticity for some infinitely degenerate elliptic operators of second order, to appear in J. Math Kyoto Univ

8. K. Taira preprint.