数理解析研究所講究録
第766巻1991年104-116

Regularity of the solution to the hyperbolic equation with non-smooth coefficients

大阪大・理 加藤 圭一 (Keiichi Kato)

1. 序

線型双曲型方程式の特異性の伝播については、数多くの結果があるが、そのほとんどは、係数が解析的あるいはC^∞という仮定をおいている。ここでは、係数がC^∞でない場合の特異性の伝播について考察する。[1]では、係数が連続であるような場合を考察しているが、我々は、係数の滑らかさをもう少しさげて、しかも、[1]で考察しているのより高いregularityの伝播を調べる。

次の方程式(1)を用いて問題の意味をもう少しはっきりさせよう。

$$(1) \qquad \square u + a(t,x)u = 0 \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n,$$

ここで、$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$.

しばらくは、この(1)についてのみ考察し、§3において、もう少し一般の方程式を取り扱うことにしよう。

今、図のWにおいてのみ、係数aが滑らかでないとする。解uがΩで(1)をみたしているとし、$u \in C^\infty$ on Kとするとき、「aのWにおけるsingularityがどのような場合に解uがDにおいてC^∞となるか」という問題を考える。

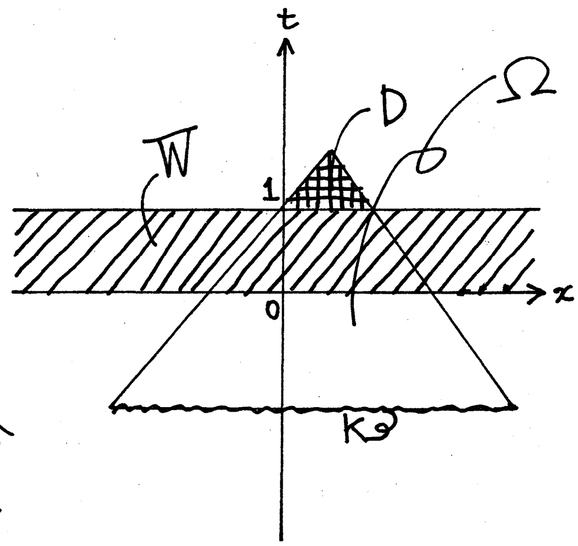

図 1

結果を述べるために少し記号を定義しよう。

(定義)

$s, r \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x$ に対し、

$$u \in H^{s,r}_{v,loc}(\Omega)$$

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ かつ

$$(1+\tau^2+|\xi|^2)^{s/2}(1+|\tau+v\cdot\xi|^2)^{r/2}\,\widehat{\chi u}(\tau,\xi) \in L^2(\mathbb{R}^{n+1})$$

for $\forall \chi(t,x) \in C_0^\infty(\Omega)$.

(定義)

$u \in H^r$ at $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0) \in T^*\Omega \setminus 0$

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\exists \chi(t,x) \in C_0^\infty(\Omega)$ with $\chi(t_0,x_0) \neq 0$ と

(τ_0,ξ_0)の${}^\exists$錐近傍 $\Gamma(\tau_0,\xi_0)$ in $\mathbb{R}^{n+1}$ が存在して、

$$\iint_{\Gamma(\tau_0,\xi_0)} (1+\tau^2+|\xi|^2)^r\,|\widehat{\chi u}|^2\,d\tau d\xi < +\infty.$$

（定義）

$$\mathrm{Char}\,\Box = \{ (t,x,\tau,\xi) \in T^*\Omega\backslash 0 \mid \tau^2 - |\xi|^2 = 0 \}$$

係数 a が次の仮定をみたすことが、上記のことが成立するための十分条件である。

（仮定A）

$\exists s_1 > \frac{n+1}{2} - 1$, $\exists v_1 \in \mathbb{R}^n$ with $|v| < 1$ があって

$$a(t,x) \in H^{s_1,\infty}_{v,loc}(\Omega)$$

をみたす。

ただし、$u \in H^{s_1,\infty}_{v,loc}(\Omega)$ とは $u \in H^{s_1,r}_{v,loc}(\Omega)$ for $\forall r \in \mathbb{R}$ なること。

このことを、もう少し精密に述べたものが、次の定理1である。

定理1

K を Ω の部分集合、$\hat{K}$ を K の決定領域とする。$a(t,x)$ は、仮定Aをみたすとする。u は(1)をみたし、$s + s_1 - \frac{n+1}{2} > 0$ なる $s > 0$ に対し、$u \in H^s_{loc}(\Omega)$ であり、さらに

$$u \in H^r \quad on \quad (K \times \mathbb{R}^{n+1}_{\tau,\xi} \backslash \{0\}) \cap \mathrm{char}\,\Box$$

であるとする。そのとき、

$$u \in H^{s,r-s}_{v,loc} \quad (\hat{K} \cap \Omega)$$

が成り立つ。

注意1.

aの例としては、$v\in\mathbb{R}^n$ with $|v|<1$, $s_1>\frac{n+1}{2}-1$, $f(x)\in H^{s_1}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ とするとき、$a(t,x)=f(x-vt)$ がある。もっと具体的には、

$a(t,x)=\dfrac{1}{|x-vt|^\delta}$ $\left(\delta<\frac{1}{2}\right)$ がある。

注意2.

この定理からすぐに、冒頭に説明したこと、即ち、$t<0$, $t>1$ で $a(t,x)\in C^\infty$ ならば、$u\in C^\infty$ on K から、$u\in C^\infty$ in D が従うことがわかる。(K, Dは、図1中の集合) 実際、$u\in H^\infty$ on K から、定理1より、$u\in H^{s,\infty}_{v,loc}$ in D がわかり、$|v|<1$ より、$u\in H^\infty$ on $(D\times\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\})\cap\mathrm{char}\,\square$ を得る。一方、$(D\times\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\})\cap(\mathrm{char}\,\square)^c$ においては、この上で、$\square$が微局所的に楕円型であることから、$\square u=au\in H^{s'}$ ($\because a\in C^\infty$ in D) より、$u\in H^{s+2}$ が従い、この議論を繰り返すと、$u\in H^\infty$ on $(D\times\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\})\cap(\mathrm{Char}\,\square)^c$ を得る。上の2つのことから、$u\in C^\infty$ in D である。

2. 定理1の証明

次の2つの補題を用意する。

補題1. $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ とする。

$s+t-\frac{n}{2}>0$, $0<s,t\le\frac{n}{2}$ をみたす実数 s,t に対し、

$$u\in H^s_{loc}(\Omega),\ v\in H^t_{loc}(\Omega)$$

とする。そのとき、

$$uv \in H_{loc}^{s+t-\frac{n}{2}-\varepsilon}(\Omega) \quad \text{for } \forall\varepsilon>0$$

が成り立つ。

補題2. $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ とする。$s_1+s_2-\frac{n+1}{2}>0$, $0<s_1, s_2 \leq \frac{n+1}{2}$, $r \geq 0$ をみたす実数 s_1, s_2, r に対し、

$$u \in H_{v,loc}^{s_1, r}(\Omega), \quad v \in H_{v,loc}^{s_2, r}(\Omega)$$

とする。そのとき、

$$uv \in H_{v,loc}^{s_1+s_2-\frac{n+1}{2}-\varepsilon,\, r}(\Omega) \quad \text{for } \forall\varepsilon>0$$

が成り立つ。

補題の証明はあとまわしにして、まず、定理1の証明をする。

（定理1の証明）

証明は、Hörmanderの特異性の伝播の定理を軸にして行う。証明を簡潔に述べるために、$\hat{K} \subset \Omega$ とする。$(t_0, x_0) \in \hat{K}$ を任意にとる。$(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0) \in T^*\hat{K}\backslash 0 \cap \mathrm{char}\,\square$ のとき、$\hat{K}$ は K の決定領域だから、${}^{\exists}(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0) \in K$ があって、$(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0, \tau_0, \xi_0)$ を出発する null bicharacteristic curve が $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$ を通るようにできる。定理の仮定と補題1から、

$$(2) \qquad \square u = -au \in H_{loc}^{s_1+s-\frac{n+1}{2}-\varepsilon}(\Omega),$$

定理の仮定から、

$$(3) \qquad u \in H^r \ \text{at} \ (\tilde{t}_0, \tilde{x}_0, \tau_0, \xi_0)$$

だから、Hörmanderの定理を使うと、

(4) $\quad u \in H^{\min(s+\delta,\, r)}$ at $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$,

ここで $\delta = s_1 - \frac{n+1}{2} + 1 - \varepsilon > 0$.（$\varepsilon$を十分小さくとり、$\delta>0$にする。）

一方、$(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0) \in T^*R \setminus 0 \cap (\mathrm{Char}\,\Box)^c$ のとき、$\Box$は

$(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$ で微局所的に楕円型だから、(2)式より、

(5) $\quad u \in H^{\min(s+\delta+1,\, r)}$ at $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$

を得る。(4)、(5)を組み合わせると

$$u \in H^{\min(s+\delta,\, r)} \quad \text{at} \quad (t_0, x_0)$$

を得、$(t_0, x_0) \in \hat{K}$ は任意だから、

(6) $\quad u \in H_{loc}^{\min(s+\delta,\, r)}(\hat{K})$

を得る。この議論は $s+(m-1)\delta \le \frac{n+1}{2} < s+m\delta$ となるまで、

m回繰り返すことができる。$r \le s+m\delta$ なら証明終。以下、

$r > s+m\delta$ の場合を考える。定義から明らかに、

$$H_{loc}^{s+r}(\Omega) \subset H_{v,loc}^{s,r}(\Omega) \quad \text{for} \quad r>0,$$

だから、仮定Aと補題2から、

(7) $\quad \Box u = -au \in H_{v,\,loc}^{s+(m-1)\delta+s_1-\frac{n+1}{2}-\varepsilon,\ \delta}(\hat{K})$

$(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0) \in T^*R \setminus 0 \cap \mathrm{Char}\,\Box$ のとき、前と同様に、

$\exists(\hat{t}_0, \hat{x}_0) \in K$ が存在して、$(\hat{t}_0, \hat{x}_0, \tau_0, \xi_0)$ を出発する null bi-

characteristic curve は、$(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$ を通る。その null bi-

characteristic curve を Γ とすると、$|v|<1$ であるから、(7)

より、

(8) $$a u \in H^{s+m\delta+s_1-\frac{n+1}{2}-\varepsilon} \quad \text{on } \Gamma\cap T^*R\setminus 0$$

仮定から $u\in H^r$ at $(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0, \tau_0, \xi_0)$ だから、Hörmanderの定理より、

(9) $$u \in H^{\min(s+(m+1)\delta,\, r)} \quad \text{at } (t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$$

を得る。$\Sigma_{\varepsilon_1}=\left\{(\tau,\xi)\in\mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, \tau^2\ge(1+\varepsilon_1)|\xi|^2 \text{ or } \tau^2\le(1-\varepsilon_1)|\xi|^2\right\}$

とおくと、ε_1を十分小にすれば、(9)より、

(10) $$u\in H^{s+(m+1)\delta} \quad \text{on } \hat{R}\times(\Sigma_{\varepsilon_1})^c$$

を得る。一方、$\hat{R}\times\Sigma_{\varepsilon_1}$においては、$\chi\in C_0^\infty(\hat{R})$ に対し、

(11) $$\Box(\chi u)=\chi_t u_t+\chi_{tt}u-2\nabla\chi\cdot\nabla u-(\Delta\chi)u-\chi a u =: F(t,x)$$

とおくと、$u\in H^{s+(m-1)\delta,\delta}_{v,loc}(\hat{R})$, $a\in H^{s_1,\infty}_{v,loc}(\hat{R})$ だから、補題2より、$F(t,x)\in H^{s+(m-1)\delta-1,\delta}_{v,loc}(\hat{R})$ を得る。(11) の両辺をFourier変換して、

$$(\tau^2-|\xi|^2)\,\widehat{\chi u}(\tau,\xi)=\hat{F}(\tau,\xi).$$

$\left|\dfrac{\tau^2+|\xi|^2}{\tau^2-|\xi|^2}\right|\le C$ on Σ_{ε_1} だから、

(12) $$(1+\tau^2+|\xi|^2)^{s+(m-1)\delta+1}(1+|\tau+v\cdot\xi|^2)^{\delta}|\widehat{\chi u}|^2\in L^1(\Sigma_{\varepsilon_1})$$

を得る。(9)と(12)を合わせると、

$$u\in H^{\min(s+m\delta,\, r-\delta),\,\delta}_{v,loc}$$

この議論を $\min(s+m\delta, r-\ell\delta)=r-\ell\delta$ となるまで繰り返せば、定理1を得る。(証明終)

さて、残っている補題1、2を証明する。

（補題1の証明）

Cu off function を掛けることにより、$u\in H^s(\mathbb{R}^n)$, $v\in H^t(\mathbb{R}^n)$ のとき、 $uv\in H^{s+t-\frac{n}{2}-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$ を示せば十分。$\sqrt{1+|\xi|^2}$ を $\langle\xi\rangle$ と書くことにする。 $r=s+t-\frac{n}{2}-\varepsilon$ とおくとき、

$$\langle\xi\rangle^r\,|\widehat{uv}(\xi)|\in L^2(\mathbb{R}^n) \tag{13}$$

を示せばよい。

$$\begin{aligned}\langle\xi\rangle^r\,|\widehat{uv}(\xi)| &= C\langle\xi\rangle^r\left|\int\hat{u}(\xi-\eta)\hat{v}(\eta)\,d\eta\right|\\ &\le C\langle\xi\rangle^r\left(\sum_{k=1}^{4}\int_{D_k}|\hat{u}(\xi-\eta)\hat{v}(\eta)|\,d\eta\right)\\ &=\sum_{k=1}^{4}I_k\end{aligned}$$

ここで、$D_1=\{\eta\in\mathbb{R}^n \mid |\xi-\eta|\ge\frac{1}{2}|\xi|\ge|\eta|\}$,

$D_2=\{\eta\in\mathbb{R}^n \mid |\xi-\eta|\le\frac{1}{2}|\xi|\le|\eta|\}$,

$D_3=\{\eta\in\mathbb{R}^n \mid |\xi-\eta|\ge|\eta|\ge\frac{1}{2}|\xi|\}$,

$D_4=\{\eta\in\mathbb{R}^n \mid |\eta|\ge|\xi-\eta|\ge\frac{1}{2}|\xi|\}$.

まず、I_1 を考察する。 $s>0$, $t-\frac{n}{2}-\varepsilon<0$ だから、

$$\begin{aligned}I_1 &\le C\int_{D_1}\langle\xi-\eta\rangle^s|\hat{u}(\xi-\eta)|\langle\eta\rangle^{t-\frac{n}{2}-\varepsilon}|\hat{v}(\eta)|\,d\eta\\ &\le C\int_{\mathbb{R}^n}\langle\xi-\eta\rangle^s|\hat{u}(\xi-\eta)|\langle\eta\rangle^{t-\frac{n}{2}-\varepsilon}|\hat{v}(\eta)|\,d\eta\end{aligned}$$

$\langle\cdot\rangle^s|\hat{u}(\cdot)|\in L^2$, $\langle\cdot\rangle^{t-\frac{n}{2}-\varepsilon}|\hat{v}(\xi)|\in L^1$ だから、Hausdorff-Young の不等式を用いると、$I_1\in L^2(\mathbb{R}^n_\xi)$。全く同様にして、$I_2\in L^2(\mathbb{R}^n_\xi)$ であることがわかる。

次に、I_3 を考察する。$r=s+t-\frac{n}{2}-\varepsilon>0$, $t-\frac{n}{2}-\varepsilon<0$ だから、

$$
\begin{aligned}
I_3 &\leq C\int_{D_3}\langle\xi-\eta\rangle^r|\hat{u}(\xi-\eta)||\hat{v}(\eta)|\,d\eta \\
&\leq C\int_{D_3}\langle\xi-\eta\rangle^s|\hat{u}(\xi-\eta)|\langle\eta\rangle^{t-\frac{n}{2}-\varepsilon}|\hat{v}(\eta)|\,d\eta \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n}\langle\xi-\eta\rangle^s|\hat{u}(\xi-\eta)|\langle\eta\rangle^{t-\frac{n}{2}-\varepsilon}|\hat{v}(\eta)|\,d\eta
\end{aligned}
$$

$\langle\cdot\rangle^s|\hat{u}(\cdot)|\in L^2$, $\langle\cdot\rangle^{t-\frac{n}{2}-\varepsilon}|\hat{v}(\cdot)|\in L^1$ だから、Hausdorff-Young の不等式から、$I_3\in L^2(\mathbb{R}^n_\xi)$ を得る。全く同様にして、$I_4\in L^2(\mathbb{R}^n_\xi)$ であることもわかる。以上より、(13) が示された。(証明終)

(補題2の証明)

$r=0$ のときは、補題1そのものである。まず、r が自然数のときを、証明する。$M=\partial_t-v\cdot\partial_x$ とおくと、$u\in H^{s,r}_{v,loc}(\Omega)$ であることと $M^k u\in H^s_{loc}(\Omega)$ for $k=0,1,\cdots,r$ は同値である。したがって、$M^k(uv)\in H^{s_1+s_2-\frac{n+1}{2}-\varepsilon}_{loc}(\Omega)$ for $k=0,1,\cdots,r$ を示せばよい 、これは、補題1からすぐにわかる。実際、

$$M^k(uv)=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(M^j u)(M^{k-j}u)$$

であるが、u,v の仮定から、$M^j u\in H^{s_1}_{loc}(\Omega)$, $M^{k-j}v\in H^{s_2}_{loc}(\Omega)$ だからである。r が正の実数の場合は、interpolation による。(証明終)

3. 定理の一般化

一般の strictly hyperbolic な方程式に関し、同様のことを考察しよう。

(13) $$P(x, D)u = f \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R},$$

ここで、$P(x, D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$, $x = (x_0, x') = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$,

$D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$ である。

$P(x, D)$ に次の strictly hyperbolic の仮定をおく。

（仮定B）

$a_\alpha(x) \in C^\infty$ for $|\alpha| = m$

$P_m(x, D) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) D^\alpha$ は $(1, 0, \cdots, 0)$ 方向に strictly hyperbolic で、D_0^m の係数は 1 とする。則ち、x, $\xi' \neq 0$ を固定したとき、

$$P_m(x, \xi) = \xi_0^m - \hat{P}(x, \xi) = 0$$

は、m個の互いに異なる実根をもつ。

$b(x) \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$ に対し、$M = M_{b(x)} = \partial_{x_0} + b(x)\cdot\partial_{x'}$ と書くことにする。

（定義）

$s \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{N}$, $b(x) \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$ に対し、

$$u \in H^{s, r}_{b(x), loc}$$

$$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad u \in \mathcal{D}'(\Omega) \text{ かつ}$$

$$M^k u \in H^s_{loc}(\Omega) \quad \text{for } k = 0, 1, \cdots, r.$$

この空間に対しても、補題2と同様のことが成り立つことは、容易にわかる。さらに、(仮定A)に対応して、次の (仮定C)

をおく。

（仮定C）

$^\exists b(x) \in C^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)$ と $^\exists s_\alpha > \max(m-1+|\alpha|-\frac{n+1}{2}, 0)$ が存在して、次の i) ii) をみたす。

i) $\{(x,\xi) \in T^*\Omega \mid \xi_0 + b(x)\cdot\xi' = 0\} \cap \{(x,\xi) \in T^*\Omega \mid P_m(x,\xi) = 0\} = \{0\}$

ii) $a_\alpha(x) \in H^{s_\alpha, +\infty}_{b(x), loc}(\Omega)$ for $|\alpha| \leq m-1$.

定理2.

Kを Ω の部分集合、$\hat{K}$をKの決定領域とする。

$s > \max_{|\alpha| \leq m} \max(\frac{n+1}{2} - s_\alpha, |\alpha|)$ に対して．$u \in H^s_{loc}(\Omega)$.

さらに $r \in \mathbb{N}$ に対し、

$$u \in H^{s+r} \text{ at } (K \times \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}) \cap \mathrm{Char}\, P_m$$

とする。そのとき．

$$u \in H^{s,r}_{b(x),loc}(\hat{K})$$

が成り立つ。

（定理2の証明）

定理1の証明の前半部と同様にして．

$$(14) \qquad u \in H^{\min(s+l\delta,\, s+r)}_{loc}(\hat{K})$$

ここで．$s+(l-1)\delta < \frac{n+1}{2} \leq s + l\delta$， $\delta = \min_{|\alpha| \leq m-1}(s_\alpha - |\alpha| - \frac{n+1}{2} + m - 1 - \epsilon)$

である。δはϵを十分小さくとることにより、正にしておく。

$s+r \leq s+l\delta$ なら、証明が完了するから、$s+r > s+l\delta$ としよう。則ち、

$$u \in H^{s+l\delta}_{loc}(\mathring{R})$$

定義から明らかに、

$$H^{s}_{loc} \subset H^{s-1,1}_{\ell(x),loc}$$

であるから、

$$u \in H^{s+l\delta-1,1}_{\ell(x),loc}(\mathring{R}).$$

ゆえに、補題2を用いて、

$$P_m u = -P'u + f \in H^{s+l\delta+\delta\alpha-|\alpha|-\frac{n+1}{2}-1-\varepsilon,1}_{\ell(x),loc}(\Omega)$$

(仮定C)により、

$$-P'u \in H^{s+l\delta+\delta\alpha-|\alpha|-\frac{n+1}{2}-\varepsilon} \text{ on } \mathrm{Char}\,P$$

であるから、$(\mathring{x},\mathring{\xi}) \in T^*\mathring{R}\backslash 0 \cap \mathrm{Char}\,P$ とすると、Hörmander の定理を用いて、

$$(15) \quad u \in H^{\min(s+(l+1)\delta,\, s+r)} \text{ at } (\mathring{x},\mathring{\xi}).$$

一方、$(\mathring{x},\mathring{\xi}) \in T^*\mathring{R}\backslash 0 \cap (\mathrm{Char}\,P)^c$ とする。

$$P_m(Mu) = [P_m, M]u + MP'u + Mf$$

$$[P_m, M]u \in H^{s-m+l\delta} \text{ at } (\mathring{x},\mathring{\xi})$$

$$MP'u \in H^{s+l\delta-m+\delta} \text{ at } (\mathring{x},\mathring{\xi})$$

$$Mf \in H^{\infty} \text{ at } (\mathring{x},\mathring{\xi})$$

だから、P_m が $(\mathring{x},\mathring{\xi})$ において楕円型であることより、

$$(16) \quad Mu \in H^{s+l\delta} \text{ at } (\mathring{x},\mathring{\xi})$$

(15)、(16) を合わせると、

$$u \in H^{\min(s+(\ell+1)\delta-1,\, s+r-1),\, 1}_{b(x),\, loc}(\Omega)$$

この議論を繰り返すと、定理2の結論を得る。(証明終)

REFERENCES

1. M. Beals and R. Reed, *Propagation of Singularities for Hyperbolic Pseudodifferential Operators with Non-Smooth Coefficients*, Comm. on Pure and Appl. Math. **35** (1982), 169–184.
2. L. Hörmander, "Linear Partial Differential Operators," Springer-Verlag, 1964.
3. M. E. Taylor, "Pseudodifferential Operators," Princeton Univ. Press, 1981.
4. K. Kato, "Regularity of the solution to Wave equation with a non smooth coefficient (Preprint)