

## 微小な縦渦が誘起する 二次元平行流の変形

航技研 伊藤信毅 (Nobutake Itoh)

二次元平行流の不安定から乱流遷移までの諸過程において、縦渦型攪乱の発生とその役割の重要性はしばしば指摘されてきた。そこで簡単な流れの中に微弱な縦渦を置いたときに、基本流の速度分布が三次元的にゆがめられ、変曲点を持つように変形される様子を理論的に記述する。

### 1. はじめに

境界層の層流から乱流への遷移機構を解明する研究は流体力学の基本課題の一つである。いろいろな流れ場の遷移過程において、主流の方向に軸を持つ縦渦列が現われることはよく知られている。二次元境界層や平面ポアズイユ流の場合には、層流の不安定から発生するトルミン・シュリヒティンク波動が横幅方向にも周期的変化を持つ三次元波動へ変形されると、その非線形干渉によって平均の流れ場に縦渦が形成

される。また凹曲面に沿う二次元境界層では、層流の不安定が進行波型攪乱に対するより先に縦渦型攪乱に対して起こり、いわゆるゲルトラー渦が形成される。さらに、後退翼上などに現れる三次元境界層でも、最初の不安定から発生する攪乱はほぼポテンシャル流の方向に軸を持つ静止渦列で、横流れ渦と呼ばれている。

縦渦の発生はその後の遷移過程に決定的な役割をすることが多くの実験によって確かめられている。境界層内の主流に垂直な横幅方向に、交互に回転の向きを変える縦渦列が存在する場合を考えると、壁に垂直な速度成分  $w$  はスパン方向に周期的に変化し、渦列の半波長ごとに向きを逆転する。 $w$  が壁から離れる向きの最大値を取る断面では、渦は壁面近くの低速流塊（主流方向速度成分  $u$  の小さい流体部分）を押し上げ、その結果上方の大きな流速を持つ部分との間に強い剪断層が形成される。強い剪断層を含む断面での速度分布は変曲点を持つ形にゆがめられるので、Rayleigh の非粘性定理に従って新しい不安定が発生するものと予想される。二次元境界層の遷移過程における高周波二次不安定や、ゲルトラー渦や横流れ渦の進行波型攪乱に対する二次不安定はこのような状況に対応していると言われている。

二次不安定現象は遷移の中期における最も重要な攪乱発達

過程であるが、理論的研究は期待されるほど進んでいない。その発生条件を準備する高剪断層の十分な記述がまだなされていないためである。

縦渦が高剪断層を誘起する過程について理論的記述を試みた研究は非常に少ない。基本的で重要な概念を含むものとしては Stuart (1965) の研究以外にないようである。彼は二次元境界層の中にスパン方向に交互に回転の向きを変える縦渦列が置かれた場合を考え、その影響によって主流方向の速度分布がどのように変形されるかを非粘性理論によって調べた。流れが主流方向の座標  $x$  に依存しないものと仮定し、主流に垂直な断面内の速度成分  $v$  と  $w$  がスパン方向に周期的で、連続の式をみたす適当な形に与えられているものとする。粘性を無視するので、主流方向速度成分  $u(y, z, t)$  は一階線形偏微分方程式に支配される。Stuart は特性曲線法に従ってこれを解き、適当に与えた境界層型初期分布が時間的に変形される様子を示した。速度分布は適当な時間帯で実験的に観測されるものに近い形を与えるが、粘性項が省略されているために、その変形は時間とともに無限に進む。

本論文では、平行平板間の流れにおける  $x$  に依存しない攪乱について粘性項まで含めた解析を行ない、縦渦が誘起する流速分布の変形に関する定性的及び定量的情報を提供する。

## 2. 支配方程式

平行平板間の非圧縮流れを考える。主流方向に  $x$ 、横幅方向に  $y$ 、流路中心線から壁に垂直な方向に  $z$  の座標軸を取り、速度ベクトルを  $\mathbf{v}=(u, v, w)$ 、圧力を  $p$ 、時間を  $t$  とする。全ての量が基準速度  $U_0$ 、流路の半幅  $h$ 、流体の密度  $\rho$ 、動粘性係数  $\nu$  で無次元化されているとき、レイノルズ数は  $R = U_0 h / \nu$ 、運動方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\text{grad } p + \frac{1}{R} \nabla^2 \mathbf{v}, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (2.1)$$

流れを基本流  $(V, P)$  と攪乱  $(\hat{v}, \hat{p})$  に分離し、基本流は運動方程式の定常な層流解で、 $U=U(z)$ ,  $V=W=0$  の形に、攪乱成分は Stuart の理論モデルに従って速度および圧力が  $x$  方向に変化しない形に書けるものと仮定する。

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}(z) + \hat{\mathbf{v}}(y, z, t), \quad p = P(x) + \hat{p}(y, z, t) \quad (2.2)$$

を運動方程式に代入し、圧力項を消去すると、攪乱速度  $\hat{\mathbf{v}}$  を支配する方程式がつぎのように得られる。

$$\left( \frac{1}{R} \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) \hat{u} = U' \hat{w} + (\hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \hat{u}, \quad (2.3)$$

$$\left( \frac{1}{R} \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 \hat{w} = - \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \hat{v} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \hat{w} \quad (2.4)$$

攪乱速度が  $x$  に依存しないという仮定のもとでは、(2.4)式

は  $\hat{u}$  を含まず、(2.3)式と独立に解くことができる。すなわち、縦渦を構成する速度成分は主流方向の速度成分に無関係に定まる。これに対して  $\hat{u}$  を支配する方程式には  $\hat{w}$  が含まれ、縦渦の性質や強さによって解が強く影響を受ける。本論文の目的はその影響を定性的及び定量的に調べることにある。

まず縦渦に対する方程式(2.4)を解かねばならないが、この方程式を厳密に解くことが本論文の主目的ではないから、縦渦が十分に弱く、方程式の線形化が許される場合を考える。線形化された方程式は解析的に簡単な解を持つので、縦渦の主流方向速度に対する影響を定性的に論じるのにはむしろ都合がよい。連続の式をみたすように流れ関数  $\phi$  を導入して

$$\hat{v} = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad \hat{w} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (2.5)$$

と書き、スパン方向周期性を仮定すると、解は

$$\phi = B \phi_1(z) e^{\rho t} \sin \beta y \quad (2.6)$$

の形に表される。ここで、 $\rho$  と  $\phi_1$  は

$$(D^2 - \beta^2 - \rho R)(D^2 - \beta^2) \phi_1 = 0, \quad \phi_1(\pm 1) = \phi_1'(\pm 1) = 0 \quad (2.7)$$

で構成される固有値問題の固有値と固有函数である。この固有函数は偶函数と奇函数の場合に別けられ、 $p \equiv \sqrt{-\beta^2 - \rho R}$  と置くと、偶函数に対する固有値は

$$p \tan p = -\beta \tanh \beta, \quad p > 0 \quad (2.8)$$

の関係をみたす  $p$  の値から、また奇函数に対する固有値は

$$p^{-1} \tan p = \beta^{-1} \tanh \beta, \quad p > 0 \quad (2.9)$$

をみたす  $p$  の値から計算される。(2.8)又は(2.9)の解の列

を  $\{p_n\}$ ,  $p_0 < p_1 < \dots < p_n < \dots$  で表わすとき、固有値は  $\rho_n =$

$-(p_n^2 + \beta^2)/R$ , 偶函数と奇関数の固有函数はそれぞれ

$$\phi_{1n} = C \left( \frac{\cosh \beta z}{\cosh \beta} - \frac{\cos p_n z}{\cos p_n} \right), \quad (2.10)$$

$$\phi_{1n} = C \left( \frac{\sinh \beta z}{\sinh \beta} - \frac{\sin p_n z}{\sin p_n} \right), \quad (2.11)$$

で与えられる。 $C$  は任意定数で、固有函数の正規化条件を定めれば確定する。ここでは  $\phi_{1n}(0)=1$  又は  $\phi'_{1n}(0)=1$  の正規化を採用し、その条件にしたがって定数を定める。

$\hat{v}$  と  $\hat{w}$  が得られたので、つぎに  $\hat{u}$  に対する方程式(2.3)の解法を考える。(2.3)の右辺を無視すると、方程式は(2.4)の主部と同じ形になるから、正弦波状の固有解を持つことが判る。そこで、右辺を含めた方程式(2.3)の解を  $z$  に関するフーリエ級数に展開する方法が有効になる。 $\hat{v}$  と  $\hat{w}$  が

$$\hat{v} = B(t) \phi'_i(z) \sin \beta y, \quad \hat{w} = -B\beta \phi_1 \cos \beta y \quad (2.12)$$

の形に与えられ、 $B(t)$ を縦渦の振幅とするとき、(2.3)と境界条件  $\hat{u}(z=\pm 1)=0$  をみたす解は

$$\hat{u} = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \cos k \beta y,$$

$$u_k = \sum_{n=0}^{\infty} \{A_{kn}(t) \cos(2n+1) \pi z/2 + A_{kn}^*(t) \sin(n+1) \pi z\} \quad (2.13)$$

のように書ける。これを方程式に代入し、フーリエ級数項の直交性を利用すると、展開係数  $A_{kn}$  と  $A_{kn}^*$  に関する無限次元一階常微分方程式が得られる。一般にはフーリエ級数を十分大きな有限項で打ち切り、有限連立方程式の時間発展解を数値的に計算することになる。しかしここでは、適当な仮定のもとに方程式が比較的簡単な形に帰着する場合を考えて、解の概要をできるだけ解析的に調べてゆく。

縦渦の分布関数  $\phi_1$  が  $z$  の偶関数と奇関数成分に別けられることはすでに述べた。 $\phi_1$  が偶関数の場合には  $A_{kn}$  と  $A_{kn}^*$  は相互に干渉するけれども、 $\phi_1$  が奇関数の場合には両者はそれぞれ独立となり、さらに  $U$  が偶関数であれば  $A_{kn}$  だけを、 $U$  が奇関数であれば  $A_{kn}^*$  だけを考えればよい。本論文では、基本流がポアズイユ分布 ( $U=1-z^2$ )、 $\phi_1$  が  $z$  の奇関数で与えられる最も簡単な場合を選ぶ。このとき振幅係数  $A_{kn}$  を支配する方程式はつぎのように単純化される。

$$\frac{dA_{km}}{dt} = \sigma_{km} A_{km} - B \beta \sum_{n=0}^{\infty} \{k \lambda_{mn} + (k+1) \lambda_{nm}\} A_{(k+1)n}$$

$$-C_k \{k \lambda_{mn} + (k-1) \lambda_{nm}\} A_{(k-1)n} + 2B\beta \Lambda_m \delta_{k1} \quad (2.14)$$

ただし、 $\lambda_{mn} = \int_0^1 \phi_m \phi_1 \phi_n dz$ ,  $\Lambda_m = \int_0^1 \phi_m U' \phi_1 dz$ ,  $\phi_n = \cos\{(2n+1)\pi z/2\}$ ,  $C_k = 1 + \delta_{k1} - \delta_{k0}$ ,  $\delta_{km}$  はクロネッカーのデルタである。 $\phi_1$  が固有函数(2.11)の一つで与えられるときには定数  $\lambda_{mn}$  と  $\Lambda_m$  を解析的に計算することができる。

### 3. 連立方程式の解法

フーリエ級数を有限項で打ち切り、つぎのように置く。

$$\hat{u} = \sum_{k=0}^K \sum_{n=0}^N A_{kn}(t) \cos(2n+1)\pi z/2 \cos k\beta y \quad (3.1)$$

振幅係数  $A_{km}$  と  $2B\beta \Lambda_m \delta_{k1}$  を一列に並べてベクトル  $A$  および  $F$  で表わし、方程式(2.14)の係数行列を  $[Q]$  と書くとき、方程式はつぎのベクトル形式に置き換えられる。

$$[Q]A - \frac{dA}{dt} = F \quad (3.2)$$

縦渦の強さを表わす係数  $B$  は一般には時間の函数であるから、上式の  $F$  および  $[Q]$  も時間に依存する。しかし縦渦がほとんど平衡状態にあり、 $B$  の時間変化が無視できる場合を考えれば、 $F$  と  $[Q]$  を定数とみなせる。その場合には、始めに強制項  $F$  を  $0$  で置き換えた同次方程式の固有ベクトルを求めておき、非同次方程式の解を固有ベクトルに展開する方法が



利用できる。すなわち、同次方程式の解を

$$A = a e^{\mu t}, \quad (3.3)$$

と置き、行列式  $|Q - \mu E| = 0$  ( $E$  は単位行列) の解を実部の大きい方から並べて、 $\mu = \mu_0, \mu_1, \dots$  とし、対応する固有ベクトルを  $a = a_0, a_1, \dots$  で表わすことにする。 $a_n$  の随伴固有ベクトル  $b_m$  は、 $[Q]$  の転置行列  $[Q^T]$  を用いた方程式の解として得られる。 $a_n$  と  $b_m$  の間に存在する直交関係を利用し、初期条件として  $t=0$  において  $A=0$  を課すことにすれば、非同次方程式 (3.2) の解はつぎのように書ける。

$$A = \sum_{m=0}^{\infty} \kappa_m a_m \frac{1 - \exp(\mu_m t)}{\mu_m} \quad (3.4)$$

ただし、 $\kappa_m = (b_m \cdot F) / (b_m \cdot a_m)$  である。さらに、上の計算から得られる固有値  $\mu_n$  は全て負の実部を持つものと予想されるから、(3.2) 式の定常解は

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\kappa_m}{\mu_m} a_m = A_F \quad (3.5)$$

で与えられる。これは当然 (3.2) の時間微分項を無視した式

$$[Q] A_F = F, \quad (3.6)$$

の解と一致するはずである。なお縦渦の強さ  $B$  の時間依存性が無視できない場合には、(3.2) 式を直接数値解法で解くことになる。

## 4. 縦渦強度と粘性効果に関する考察

方程式(2.3)に(2.12)を代入して得られる式

$$\left\{ \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - R \frac{\partial}{\partial t} \right\} \hat{u} = -RB \left[ U' \beta \phi_1 \cos \beta y - \left( \phi_1 \sin \beta y \frac{\partial}{\partial y} - \beta \phi_1 \cos \beta y \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{u} \right] \quad (4.1)$$

を見ると、縦渦の強さ  $B$  は  $R$  との積の形でのみ表われる。時間微分項にも  $R$  が掛っているが、これは時間の尺度を変更することで消去される。そこで  $RB$  の大きさによって、方程式内の各項の影響がどうなるかを大まかに見積もることができる。 $RB = \varepsilon \ll 1$  とし、 $\partial / \partial y, \partial / \partial z, R \partial / \partial t \sim O(1)$  の場合を考えると、 $\hat{u}$  は  $O(\varepsilon)$  の微小量となり、右辺の  $\hat{u}$  項は  $U$  項に比べて小さい。この場合には解を攪乱振幅  $\varepsilon$  に関して展開する方法、すなわち弱い非線形理論が適用できることになる。一方、 $RB \gg 1$  で、 $\partial / \partial y, \partial / \partial z \sim O(1)$  の場合には、 $\hat{u} \sim O(1)$ 、 $R \partial / \partial t \sim O(RB)$  となり、方程式左辺の粘性項が省略できる。Stuart(1965) の非粘性理論はこの場合に相当する。最後に  $RB \sim O(1)$  の場合を考えると、攪乱  $\hat{u}$  が基本流  $U$  と同じ大きさの程度になるため、方程式の全ての項を残す必要が生じる。前節で行った解析は基本的にはこの場合に対応し、かつ他の二つの場合を極限として含む。

## 5. 数値計算とその結果

計算では、二重フーリエ級数解の展開係数を有限項で打ち切り、その連立代数方程式を解くことが主になる。連立方程式の解と固有値の計算には航技研計算センターのサブルーチンライブラリーを利用した。したがって計算精度の検査はフーリエ項の打ち切りに対してのみ行われ、第1表の結果を得た。 $RB=50, \beta=1$  とし、 $\phi_1$  には(2.7)の最初の奇関数固有函数を用い、 $y$ 方向フーリエ級数打ち切り項数  $K+1$  と  $z$ 方向フーリエ級数打ち切り項数  $N+1$  を変えて、 $y=z=0$  における定常解  $\hat{u}$  の値を比較した。本論文の目的には高精度の結果は必要ないので、有効数字を4桁程度として  $K+1=24, N+1=12$  に選んだ。

はじめに、 $u$  の定常解に対する計算結果を示す。まずスパン方向変化の概要を見るため、中心線上  $z=0$  と壁に近い位置  $z=0.9$  およびその中間  $z=0.5$  の高さに対して  $u$  の変化を図1に示す。 $y=0$  のスパン位置は縦渦が壁から中心線の方に最も強い誘導速度を与える peak 位置で、そこでは  $u$  が非常に低速となる。図2には peak ( $y=0$ ) と valley ( $y=\pi/\beta$ ) のスパン位置における  $u$  分布の変化を、縦渦強度  $RB$  のいくつかの値に対して描いた。ただし  $\beta$  は 1 に固定してある。特に peak における分布形は  $RB$  が 40 に近づくころから変曲点を持つようになる。そこで、この変曲点が現われるために

表 1 . フーリエ項の打ち切りと計算精度  
(RB=50,  $\beta = 1$  のときの  $u(0, 0)$  の値)

N+1	K+1				
	18	21	24	27	30
6	-0.63022	-0.62988	-0.62994	-0.62993	-0.62993
9	-0.63006	-0.62972	-0.62978	-0.62977	-0.62977
12	7	2	9	8	8
15	6	2	9	7	8
18	7	2	9	8	8

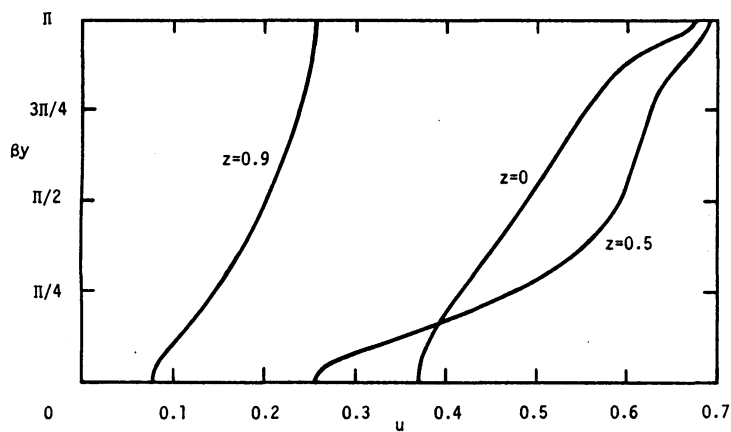


図 1 . 流速の  
y 方向分布  
(RB=50,  $\beta = 1$ )

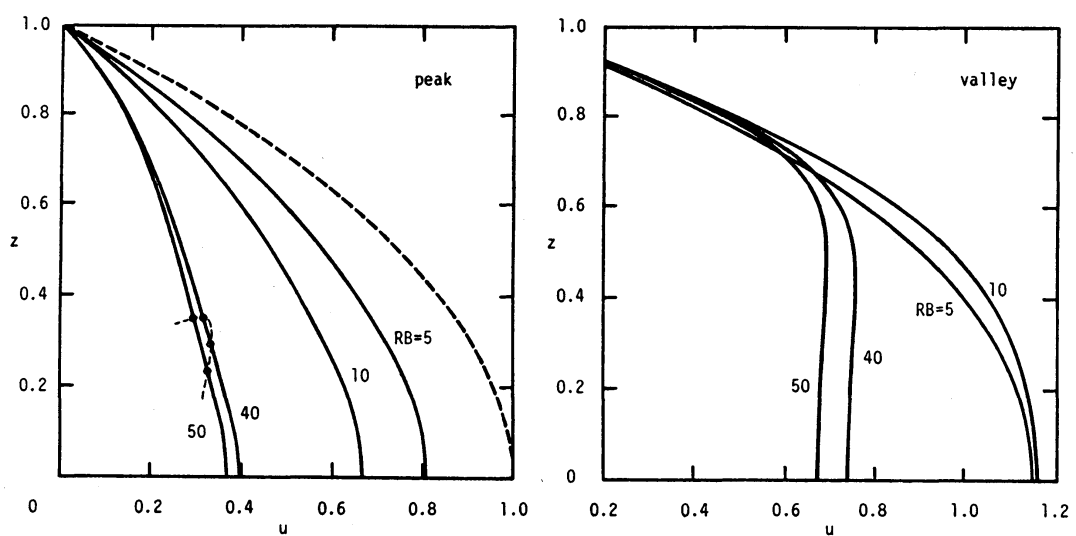


図 2 . 速度分布形の縦渦強度に対する変化 (RB=50,  $\beta = 1$ )

必要な縦渦の限界強度を各  $\beta$  に対して計算し、図 3 に示した。横座標  $\beta RB$  は縦渦によって誘起される  $w$  成分の大きさを代表する量である。曲線は  $\beta \approx 0.6$  の所で最小点を持ち、縦渦強度がこの臨界値を越えると変曲点型速度分布が形成される。

上に与えた定常解は行列  $[Q]$  の固有値が負の実部を持つときに意味のあるものとなる。図 4 は  $RB=500$ ,  $\beta=1$  の場合について実際にいくつかの固有値を示し、固有値実部の大きい方から番号を付けてある。予想どおり全ての固有値は負の実部を持つので、一般解 (3.4) は  $t \rightarrow \infty$  で定常解 (3.5) に収束することが確認される。図 5 はその収束状態を示したもので、右辺の点線が (3.6) から得られた定常解  $u(z)$  の  $z=0, 0.5, 0.9$  における値を示し、○印は (3.5) から得られる非定常解の時

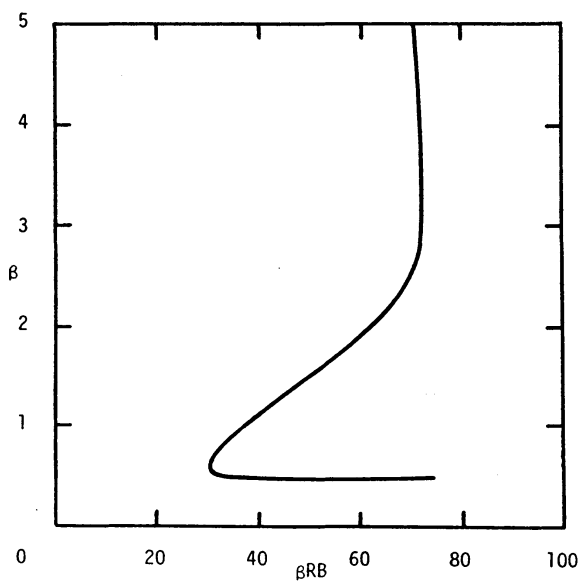


図 3 . 変曲点発生限界の  $\beta RB$  と  $\beta$  への依存性

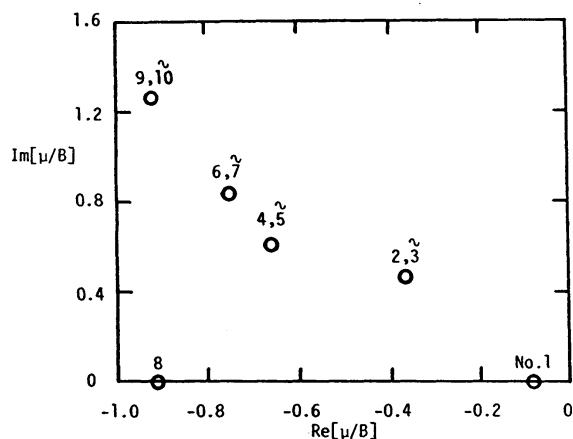


図 4 . 固有値の分布

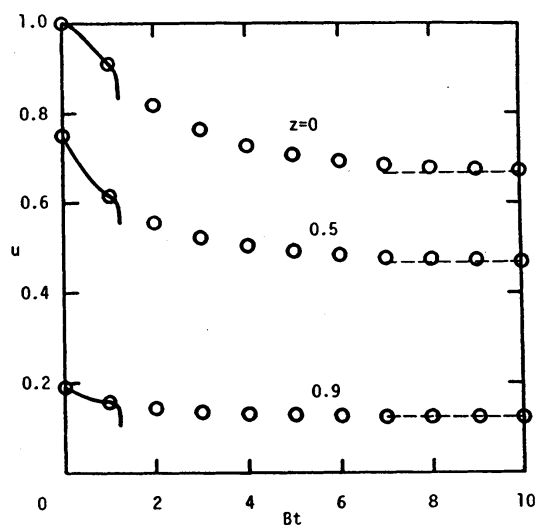


図 5 . 定常解、非定常解、ルンゲ・クッタ解の比較 ( $RB=10, \beta=1$ )

間変化を表わしている。なお、同図における実線は(3.2)をルンゲ・クッタ法で解いた数値解を与えているが、時間きざみ ( $\Delta t=0.02$ ) が大きすぎたため、 $t$  が 1 を越えると解が発散している。いずれにしろ三つの計算法で得た結果は有効桁数の範囲では完全に一致しており、計算に誤りがないことを証明している。

## 6. むすび

今回の計算では、縦渦が  $y$  に関して単一な正弦波で表わされる場合を扱ったが、その場合でも  $u$  の変化は局所的にかなり急峻な部分を持ち、 $y$  と  $z$  に関するフーリエ高調波が強く励起されていることを示す。Stuart(1965) の理論お

よびその拡張である本理論はフーリエ高調波成分が基本的な役割を果すような現象を記述している点で、弱い非線形理論の対極をなすものと言える。

流れ場に定常的な縦渦が存在すると流れの一部に変曲点型速度分布が現われ新しい不安定現象が発生することは古くから主張されている。本論文では流れ場と縦渦について最も単純な形を仮定して、その事実を確認するとともに、変曲点が発生するための縦渦強度下限を算定した。図3の結果によると臨界点は $\beta = 0.6$ で生じ、例えばレイノルズ数を5000とすると、縦渦振幅  $B$  の値で約1%、 $z$  方向速度の最大値  $w_{max}$  の値では0.15%という非常に小さな値で臨界強度に達する。

上に示した臨界値は縦渦の形に依存するところが大きいと思われるので、もっと現実的な縦渦モードに対する計算や縦渦の非線形効果に対する見積もりが必要である。さらに、境界層への適用を考える場合には流れ方向座標  $x$  に関する弱い依存性を取り入れることも重要になる。今後の課題として引き続き研究を進める予定である。

## 文 献

Stuart, J. T. (1965) The production of intense shear layers by vortex stretching and convection. AGARD Report 514