数理解析研究所講究録
第 768 巻 1991 年 62-68

Distance Regular graphs of valency $k=5$

大阪教育大学　平木 彰 (Akira Hiroki)

Let Γ be a connected undirected simple finite graph.

$\partial(x,y)$; distance of (x,y) (the length of shortest paths)

$d = \max\{\partial(x,y) \mid x,y \in \Gamma\}$; diameter of Γ

$$\Gamma_i(x) = \{ v \in \Gamma \mid \partial(x,v) = i \} \qquad (x \in \Gamma)$$

$$D^i_j(x,y) = \Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y) \qquad (x,y \in \Gamma)$$

Γ : Distance-regular $\underset{\text{DEF}}{\Longleftrightarrow}$ $|D^i_j(x,y)| = p^{\ell}_{ij}$

depends only on $\ell = \partial(x,y)$.

$c_i = p^i_{1\,i-1}$, $a_i = p^i_{1\,i}$, $b_i = p^i_{1\,i+1}$; intersection numbers.

$k = b_0 = |\Gamma_1(x)|$; valency of Γ

$$\left\{\begin{matrix} * & c_1 & c_2 & & c_i & & c_{d-1} & c_d \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_i & \cdots & a_{d-1} & a_d \\ b_0 & b_1 & b_2 & & b_i & & b_{d-1} & * \end{matrix}\right\}$$

; intersection array of Γ.

問題　Γ : distance regular graph of valency $k=5$ に対して どのような intersection array が 可能か

上の問題について わかったことを 述べる 。

Intersection number に関する基本的性質

1) $1 = c_1 \leqq c_2 \leqq \quad \leqq c_{d-1} \leqq c_d \leqq k$.

2) $k = b_0 \geqq b_1 \geqq \quad \geqq b_{d-2} \geqq b_{d-1} \geqq 1$.

3) $c_i + a_i + b_i = k$.

4) $c_i \leqq b_j$, for $i+j \leqq d$.

5) p_{ij}^{ℓ} : non-negative integers .

上の性質より $k=5$ の distance regular graph の intersection array の第 j 列に現われる parameter は 次のものに限る .

$$\begin{bmatrix} * \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ * \end{bmatrix} .$$

ココで 実在 ある D.R.G of k=5 の intersection array をあげておく

① $\begin{Bmatrix} * & 1 \\ 0 & 4 \\ 5 & * \end{Bmatrix}$ ② $\begin{Bmatrix} * & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & * \end{Bmatrix}$ ③ $\begin{Bmatrix} * & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & * \end{Bmatrix}$ ④ $\begin{Bmatrix} * & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & * \end{Bmatrix}$

⑤ $\begin{Bmatrix} * & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & * \end{Bmatrix}$ ⑥ $\begin{Bmatrix} * & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & * \end{Bmatrix}$ ⑦ $\begin{Bmatrix} * & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & * \end{Bmatrix}$

⑧ $\begin{Bmatrix} * & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 4 & * \end{Bmatrix}$ ⑨ $\begin{Bmatrix} * & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 4 & 4 & * \end{Bmatrix}$ ⑩ $\begin{Bmatrix} * & 1 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 1 & * \end{Bmatrix}$

⑪ $\begin{Bmatrix} * & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 4 & 3 & * \end{Bmatrix}$ ⑫ $\begin{Bmatrix} * & 1 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 4 & 1 & * \end{Bmatrix}$ ⑬ $\begin{Bmatrix} * & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & * \end{Bmatrix}$

⑭ $\begin{Bmatrix} * & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & * \end{Bmatrix}$ ⑮ $\begin{Bmatrix} * & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & * \end{Bmatrix}$

以下、左下に かかれた 番号で 同じ array を 表わすものとする。

LEMMA 1

If $\quad \square_1 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ ① or ⑤

LEMMA 2

If $\quad \square_1 = 0$

$\qquad \sqsubset_2 > 1 \quad \Rightarrow \quad$ ② or ③ or ④ or ⑦ or ⑬

LEMMA 3

If $\quad \square_1 = 0$

$\qquad \sqsubset_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad$ ⑩ or ⑥

$\qquad \square_2 > 0$

or

$$Ⓐ\begin{bmatrix} * & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & * \end{bmatrix}$$

上にあげられた Ⓐ の array は 存在は 確認されていないが 非存在も証明されていないもののひとつ である 。

LEMMA . 4

If $\quad \square_1 = \square_2 = 0$

$\qquad \sqsubset_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad$ ⑧ or ⑪ or ⑫ or ⑮

$\qquad \sqsubset_3 > 1$

LEMMA 5

If $\square r_1 = \square r_2 = 0$

$\square c_2 = \square c_3 = 1 \qquad \Longrightarrow$ 非存在

$\square r_3 > 0$

よって $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ の parameter が r個 続くと 仮定し，　(r ≧ 3)

以下　r+1 番目の parameter により 考察する。

r+1 番目 に 現われる 可能性 があるのは

$$\left[\begin{array}{cccc:c} * & 1 & \cdots & 1 & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ 5 & \underbrace{4 \quad \cdots \quad 4}_{r} & & & \end{array}\right]_{\text{r+1 番目}}$$

$$\underset{Ⓐ}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}} \quad \underset{Ⓑ}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}} \quad \underset{Ⓒ}{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}} \quad \underset{Ⓓ}{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}} \quad \underset{Ⓔ}{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}} \quad \underset{Ⓕ}{\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \quad \underset{Ⓖ}{\begin{bmatrix} \square c_d \\ \square r_d \\ * \end{bmatrix}}$$

の 7つ に かぎる。

LEMMA 6

Ⓖ $\begin{bmatrix} \square c_d \\ \square r_d \\ * \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \square c_d = 5$ and $r = 3$ or 5

∴) Γ : ⑨ or ⑭

LEMMA 7

$$\begin{bmatrix}4\\0\\1\end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} * & 1\ \cdots\ 1 & 4\ \cdots\ 4 & 5 \\ 0 & 0\ \cdots\ 0 & 0\ \cdots\ 0 & 0 \\ 5 & \underbrace{4\ \cdots\ 4}_{r} & \underbrace{1\ \cdots\ 1}_{s} & * \end{bmatrix}$$

F

$$0 < s < r \leq 81$$

LEMMA 8

$$\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} * & 1\ \cdots\ 1 & 2\ \cdots\ 2 & \square a \\ 0 & 0\ \cdots\ 0 & 2\ \cdots\ 2 & \square a \\ 5 & \underbrace{4\ \cdots\ 4}_{r} & \underbrace{1\ \cdots\ 1}_{s} & * \end{bmatrix}$$

D

$$0 < s \leq r+1 , \qquad \square a = 2 \text{ or } 4$$

LEMMA 9

$$\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} * & 1\ \cdots\ 1 & 1 & 2\ \cdots\ 2 & \square a \\ 0 & 0\ \cdots\ 0 & 2 & 2\ \cdots\ 2 & \square a \\ 5 & \underbrace{4\ \cdots\ 4}_{r} & 2 & \underbrace{1\ \cdots\ 1}_{s} & * \end{bmatrix}$$

B

$$s \leq r+1 \qquad \square a = 2, 4$$

or

$$\begin{bmatrix} * & 1\ \cdots\ 1 & 1 & 2 & 4\ \cdots\ 4 & 5 \\ 0 & 0\ \cdots\ 0 & 2 & 2 & 0\ \cdots\ 0 & 0 \\ 5 & \underbrace{4\ \cdots\ 4}_{r} & 2 & 1 & \underbrace{1\ \cdots\ 1}_{s} & * \end{bmatrix}$$

$$0 < s \leq r/2$$

LEMMA 10

$$\underset{\text{©}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccccccccc} * & 1 & & 1 & 1 & & 1 & 2 & & 2 & \square_d \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 3 & \cdots & 3 & 2 & \cdots & 2 & \square_d \\ 5 & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{4 \qquad 4}_{r}} & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{1 \qquad 1}_{s}} & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{1 \qquad 1}_{t}} & * \end{array}\right]$$

$\square_d = 1,\ 2,\ 4 \qquad (\square_d = 1 \Rightarrow t = 0)$

$$t \leqq r \quad , \quad s \leqq r$$

or

$$\left[\begin{array}{cccccccc} * & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{4 \qquad 4}_{r}} & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{1 \qquad 1}_{s}} & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{1 \qquad 1}_{t}} & * \end{array}\right]$$

and one of the following hold.

① $r = t$

② $s = 1, \quad t < r \leqq 2t+2$

③ $2t+3 \leqq r$

$$\underset{\text{Ⓐ}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}} \qquad \underset{\text{Ⓔ}}{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}}$$

に関してはいまのところ特に強力な条件は導びかれていない。