数理解析研究所講究録
第 768 巻 1991 年 160-166

Fusion Algebras and Mapping Class Groups

河野俊丈 (九大理)

1. Introduction

Fusion algebra は 1980 年代後半, E. Verlinde によって 2次元共形場理論にあらわれる"場のオペレーター"の coupling を記述するために導入された ある種の可換な associative algebra で, Verlinde algebra ともよばれている. E. Verlinde は, この algebra が共形場理論の modular 変換 S を記述する行列によって"対角化"されることを指摘し, 一連の character formula を提唱した. Fusion algebra の構造は代数的組み合せ論の association scheme とよく似ており, 今後, 両方の分野の共同研究により発展することが期待される. 一方, fusion algebra は Riemann 面の mapping class group (Teichmüller modular group) の表現を与えていて, 3次元多様体の位相不変量にも応用されている. まず, Verlinde 以来, よく研究されている $SU(2)$-WZW (Wess-Zumino-Witten) model から解説する.

2. SU(2) - WZW model の fusion rule

物理的背景については．文献［BPZ］などを参照していただくことにし，ここでは 対象とする algebra のみを具体的にのべる． K を positive integer として，固定する．この数は，しばしば level とよばれることもある． R_K を， $\{v_j\}_{0 \leq j \leq \frac{K}{2}}$ $(j=0, \frac{1}{2}, 1, \cdots)$ ただし $v_0=1$ を生成元とし，次のように構造定数 N_{ijk} で定義される可換な associative algebra とする．

$$v_i \cdot v_j = \sum_k N_{ijk} \, v_k$$

ここで

$$N_{ijk} = \begin{cases} 1 & (*) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(*) の条件は，

$$\begin{cases} |i-j| \leq k \leq i+j \\ i+j+k \in \mathbb{Z} \\ i+j+k \leq K \end{cases}$$

で，はじめの２つの条件が，いわゆる Clebsch-Gordan condition である． R_K は． $sl(2, \mathbb{C})$ の表現環のある種の truncation とみなすことができる． ここで

$$S_{ij} = \sqrt{\frac{2}{K+2}} \, \sin \frac{(2i+1)(2j+1)\pi}{K+2}$$

とおき，

$$w_i = S_{0i} \sum_m S_{im} v_m$$

と，変換すると，$w_i \cdot w_j = \delta_{ij} w_j$ が成立する．これは代数的には，等式

$$\frac{S_{ij} S_{ik}}{S_{0i}} = \sum_m S_{im} N_{mjk}$$

と同値で，この種の一連の等式を Verlinde formula とよぶこともある．最近，T. Takata により，量子群の 1 の巾根における表現論と 3次元多様体の link の不変量についての［R-T］の手法を用いた，見通しのよい証明が与えられた．

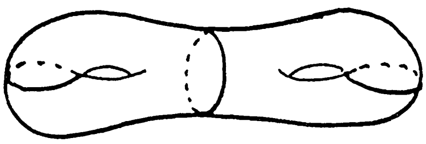
ここで注目すべき点は，行列 S が，Kac-Peterson［K-P］によって得られた $A_1^{(1)}$-type の affine Lie 環の character の modular 変換 $\tau \longrightarrow -\frac{1}{\tau}$ による変換規則と一致していることである．つまり $\{\chi_j\}_{0 \leq j \leq \frac{K}{2}}$ を level K integrable highest weight module の character とするとき，

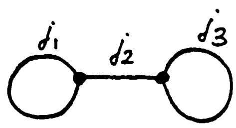
$$\chi_j\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sum S_{ij} \chi_i(\tau)$$

$$\chi_j(\tau+1) = \exp 2\pi\sqrt{-1}\left(\Delta_j - \frac{c}{24}\right) \chi_j(\tau)$$

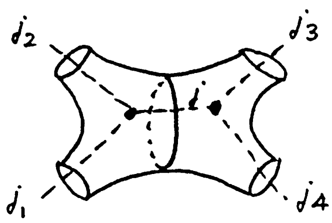
ここで $\Delta_j = \frac{j(j+1)}{K+2}$，$c = \frac{3K}{K+2}$，が成立している．

この行列 S と $T = \mathrm{diag}\left(\exp 2\pi\sqrt{-1}\left(\Delta_j - \frac{c}{24}\right)\right)$ および fusion matrix $\left(F_{ij}\begin{bmatrix} j_2 & j_3 \\ j_1 & j_4 \end{bmatrix}\right)$ (具体的には q-6j-symbol の $q = \exp\frac{\pi\sqrt{-1}}{K+2}$ における値で与えられる) を用いて、Riemann 面の mapping class group の projectively linear representation を構成することができる ([M-S], [K] 参照). 具体的には、compact Riemann 面 Σ について下図のようにその trinion (3つ穴のあいた球面) への分割を考え、その dual graph をとる。(以降これを fix する)

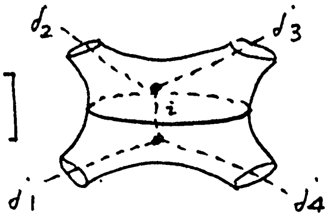




dual graph の edge に half integer $0, \frac{1}{2}, 1, \cdots, \frac{K}{2}$ のいずれかのラベルをつけ各 vertex では fusion alg. の定義に用いた (*) の条件をみたすとする。このようなラベルつきのグラフ全体と一対一に対応する basis をもつ vector space を $Z(\Sigma)$ とする。(*) 上の S, T, F を用いて mapping class group の $Z(\Sigma)$ への作用を構成できる。また グラフを別の選び方で決めたときの vector space との同一視が F によって与えられている。



$$= \sum_i F_{ij} \begin{bmatrix} j_2 & j_3 \\ j_1 & j_4 \end{bmatrix}$$



Moore-Seibergは. initial data S, T, F などが mapping class group の表現を与えるための. 一連の条件を polynomial equation として書き下した. この中には pentagon, hexagon などの relation が含まれている. Tannaka-Krein duality の拡張として, これらの関係式を組織的に研究する試みがなされている. また [K] では, この表現を用いて, 3次元多様体の位相不変量が定義された.

(*) $\dim Z(\Sigma) = \sum_j (S_{0j})^{2-2g}$ で与えられる.

3. 有限アーベル群に付随したモデル

前節では edge に $sl(2, \mathbb{C})$ の表現をのせたモデルをあつかったが, fusion algebra が有限アーベル群の群環となるように構成することも可能である. 簡単のため $G = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ (有限巡回群) とする algebra として $\mathbb{C}[G]$ つまり生成元が $\{j\}$ $j = 0, 1, \cdots, k-1$ で structure constant N_{ij}^{l} は $l \equiv i+j \mod k$ のとき 1 で他は 0 である.

この algebra について §2 と同様の構造が存在する.

$$\Delta_\ell = \frac{m\ell^2}{2k} \qquad \left(\begin{array}{l} \ell = 0, \cdots, k-1 \\ (k, m) = 1 \text{ で } k \text{ が odd} \\ \text{のときは } m \text{ even とする.} \end{array}\right)$$

このとき

$$S_{\ell\ell'} = \frac{1}{\sqrt{k}} \exp 2\pi\sqrt{-1}\,(\Delta_{\ell+\ell'} - \Delta_\ell - \Delta_{\ell'})$$

とおくとこれは $\mathbb{C}[G]$ を対角化し さらに T を $\mathrm{diag}_\ell\,(\exp 2\pi\sqrt{-1}\,\Delta_\ell)$ とおくと S, T は modular group の relation を 1 の 8 乗根の不定性を除いて満足する. ここで ambiguity は Gauß sum

$$G(m, k) = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{\ell=0}^{k-1} \exp \frac{\pi\sqrt{-1}\,m}{k}\,\ell^2$$

によって計算される. この種の $SL(2, \mathbb{Z})$ の表現と関連した 3次元多様体の不変量をあげておく. M を closed orientable 3-manifold で M が framed link $L = L_1 \cup \cdots \cup L_n \subset S^3$ の Dehn surgery によって得られているとする. $G = \mathbb{Z}/k_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/k_n\mathbb{Z}$, $k_i \mid k_{i+1}$ とし $(k_i, m_i) = 1$, m_i even if k_i odd をみたす $m_1, \cdots, m_n$ を fix する. L の linking matrix の signature を σ とする.

このとき

$$I_G^m(M) = \frac{[G(m_1,k_1)\cdots G(m_n,k_n)]^{-\sigma}}{|G|^{n/2}} \sum_\lambda e^{\pi\sqrt{-1}\sum_{i,j}\langle\lambda(i),\lambda(j)\rangle a_{ij}}$$

は. M の homotopy invariant である. ここで (a_{ij}) は L の linking matrix. $\lambda:\{1,\cdots,n\}\longrightarrow G$ で $\vec{l}_i=(l_{i1},\cdots,l_{in})\in G$ について $\langle\vec{l}_i,\vec{l}_j\rangle=\sum_\alpha \frac{m_\alpha l_{i\alpha} l_{j\alpha}}{k_\alpha}$ とする.
$G=\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ k: even のときは Gocho, Ohtsuki Murakami − Okada らによって調べられている.

Gを非可換とするとき Cent $\mathbb{C}[G]$ について同様の構成を試みるのは興味ある問題であろう. S^1 との直積を考え. 3次元的な計算で fusion algebra を構成した [D-W] の仕事がある.

References

[BPZ] Belavin − Polyakov − Zamolodchikov, Nucl. Phys. B241. 33− (1984)

[D-W] Dijkgraaf − Witten Comm. Math. Phys. 129 393− (1990)

[K] Kohno, Topological invariants for 3-manifolds ··· To appear in Topology

[M-S] Moore − Seiberg Comm. Math. Phys. 123, 177− (1989)

[R-T] Reshetikhin − Turaev, Invariants of 3-manifolds ··· to appear in Invent. Math.

[V] Verlinde, Nucl. Phys B300, 360− (1988)

[K-P] Kac − Peterson, Adv. Math. 53, 125− (1984)