

## プラズマにおける磁場とトポロジー

核融合科学研究所 羽鳥尹承

(Tadatsugu Hatori)

三菱原子力 浦田一宏

(Kazuhiro Urata)

### §1. はじめに

プラズマと磁場に関するトポロジーの話題として3つ考えられる。先ず、1) 磁気再結合 (magnetic reconnection) がある。磁気シアーが大きい時の磁力線の継ぎ換えである。2) 磁気カオス (magnetic chaos) に今回は重点を置きたい。トーラス配位の磁場の空間構造がカオスとなる。カオスと言えは時間的な乱雑運動をイメージするが、磁気カオスは空間カオスを意味する。しかし数学的には磁気カオスとハミルトン力学系のカオスは同等となることを3.2で説明する。3) MHD 系において散逸が無視できる場合には、いくつかの積分不変量が存在するが、特に磁気ヘリシティと呼ばれるものはトポロジカル不変量とも呼ばれている。磁気的緩和現象を理解する上で重要な役割を演ずる。詳しくは3.3で説明する。以上 1)~3) の話題が全て含まれる良い例として、テア

リング不安定性の時間発展を §4 で詳しく述べる。

## §2. 磁力線とハミルトン力学の同等性

磁力線とは、その接線方向がいつでも磁場ベクトル  $\vec{B}(\vec{x})$  の方向を向いている曲線である。磁力線に沿う距離に 1 対 1 に対応するパラメータ  $\lambda$  を使うと磁力線の方程式は、

$$\frac{d\vec{x}}{d\lambda} = \vec{B}(\vec{x}). \quad (2.1)$$

磁場  $\vec{B}(\vec{x})$  のベクトルポテンシャルを  $\vec{A}(\vec{x})$  とすると、

$$\vec{B}(\vec{x}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{x}). \quad (2.2)$$

磁力線の方程式 (2.1) を導く変分原理が存在する<sup>1)</sup>

$$\delta \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \vec{A}(\vec{x}) \cdot \frac{d\vec{x}}{d\lambda} = \delta \int \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = 0, \quad (2.3)$$

ただし両端 ( $\lambda = \lambda_1$  and  $\lambda_2$ ) で

$$\vec{A}(\vec{x}) \cdot \delta\vec{x} = 0. \quad (2.4)$$

(2.3) の変分は  $\delta\vec{A}(\vec{x})$  とそれに伴う  $\delta\vec{x}$ , すなわち

$$\delta\vec{A}(\vec{x}) = \delta\vec{x} \cdot \nabla \vec{A}(\vec{x}), \quad (2.5)$$

に対して行う。変分原理 (2.3) のオイラー方程式,

$$\vec{B}(\vec{x}) \times \frac{d\vec{x}}{d\lambda} = 0 \quad (2.6)$$

を導くことは容易である。一方、ハミルトン力学の変分原理

$$\delta \int dt \left[ \vec{p} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} - H(\vec{p}, \vec{x}, t) \right] = 0 \quad (2.7)$$

は周知のものであるが、両変分原理の類似性は明かであろう。

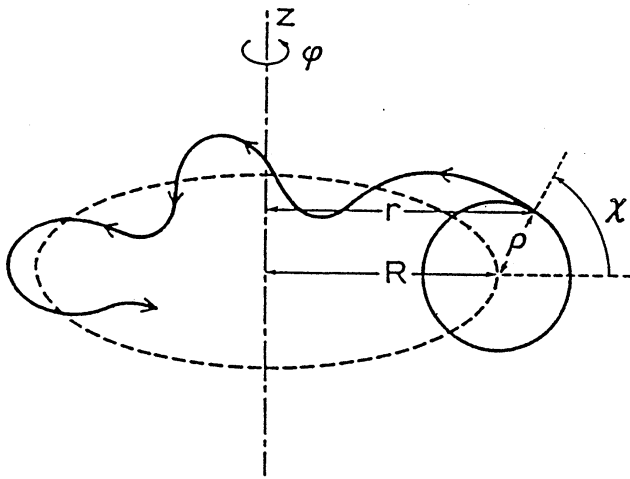


図1. 座標系.

$R$  : major radius

$r$  : minor radius

$x$  : poloidal angle

$\varphi$  : toroidal angle

矢印の付いた実線は  
磁気線を表わす。

図1に示されたトーラス配位の座標  $(r, x, \varphi)$  を使用して  
変分原理 (2.3) を具体的に表わせば、

$$\delta \int \vec{A} \cdot d\vec{x} = \delta \int r d\varphi \left[ \frac{A_\varphi}{r} \frac{d\varphi}{d\lambda} + \frac{r}{r} A_x dx + A_\varphi \right] = 0, \quad (2.8)$$

となる。次に、Gauge 変換をほどこす。

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla S \quad (2.9)$$

ただし、 $S$ として

$$A_\varphi + \frac{\partial S}{\partial \varphi} = 0 \quad (2.10)$$

を満たすものを選ぶと、変分原理(2.8)は

$$\delta \int \left[ \left( A_x + \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial x} \right) \frac{p}{r} \frac{dx}{d\varphi} + \left( A_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right) \right] r d\varphi = 0, \quad (2.11)$$

となる。従って運動量  $P_x$  とハミルトン  $H = P \cdot \dot{X} - H$ として、

$$r A_x + \frac{\partial S}{\partial x} = P_x, \quad (2.12)$$

$$r A_\varphi + \frac{\partial S}{\partial \varphi} = -H(P_x, x, \varphi), \quad (2.13)$$

と対応させれば、磁力線の方程式は時間  $\varphi$  を陽に含んだ自由度1のハミルトン系の運動方程式と同型になる。

なお、磁場に関する線積分  $I$ ,

$$I = \oint_C \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} \quad (2.14)$$

が物理では登場する。ここに積分路の曲線  $C$  は閉じた曲線である。  $I$  は閉曲線  $C$  の中を通る磁束 (magnetic flux) を表わしている。磁力線のラグランジアン(2.8)と積分の形は同じでも積分路が異なることに注意しなければならない。(2.8)では積分路は  $\vec{B}$  に平行の近傍を考えているのに対し、

(2.14)では積分路は $\vec{B}$ と有限の角度で交わっていても構わない。

### §3. 磁気ヘリシティの保存.

磁気ヘリシティ  $K$  の定義は.

$$K = \int_D \vec{A}(\vec{x}) \cdot \vec{B}(\vec{x}) d^3x, \quad (3.1)$$

ここに積分領域  $D$  は, その領域の表面で磁場の垂直成分を持たないような領域に限る. すなわち.

$$\vec{B}(\vec{x}) \cdot d\vec{S} = 0 \quad (3.2)$$

この積分の時間変化を MHD に基づいて計算すると.

$$\frac{d}{dt} K = -2 \int \eta \vec{J} \cdot \vec{B} d^3x + \int \vec{A} \times \eta \vec{J} \cdot d\vec{S} - 2 \int \nabla \phi \cdot \vec{B} d^3x, \quad (3.3)$$

となる. 導く際に, 一般化オームの法則,

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{J}, \quad (3.4)$$

を使っている.  $\eta$  はプラズマの resistivity,  $\vec{v}$  はプラズマの流れ,  $\phi$  は電場  $\vec{E}$  のスカラーポテンシャル,  $\vec{J}$  は電流密度をそれぞれ表わす.

$K$  の積分領域  $D$  として磁束管を考えよう. すなわち 1 本

の磁力線を中心とした微小断面積を持った磁束管を考える。  
もし磁力線が閉じていれば、(3.3)の右辺第3項は寄与しない。  
例え磁力線が閉じていなくても、磁力線が磁気面上にエルゴ  
ティックに分布していれば(3.3)右辺第3項は省略できる。  
さらにカオティックな磁力線に対しても、その領域が有界であれば  
任意の点の近傍に再帰するまで長い磁束管を考えれば同様に  
(3.3)右辺第3項は無視できる。従って(3.3)右辺で残りはい  
ずれも resistivity  $\eta$  に比例している。ゆえに、理想 MHD  
( $\eta=0$ ) に対しては、磁気ヘリシティ  $K$  は積分不変量にな  
る。

$K$  の表式 (3.1) を Biot-Savart の法則で書き直せば、

$$K = \frac{1}{4\pi} \iint d^3x d^3x' \frac{\vec{B}(\vec{x}) \cdot (\vec{x}' - \vec{x}) \times d\vec{B}(\vec{x}')}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3}, \quad (3.5)$$

となるが、この表式は閉じた2本の閉曲線のまわり数 (linking number) の表式と似ている。この理由から積分  $K$  はトポロジカルな積分不変式と考えられている。しかし、 $K$  はまわり数のように整数値をとるわけではなく、無限にある磁力線同志のまわり数の和であるから、残念ながら  
えう簡単に  $K$  をトポロジカルに解釈することはできない。

おもしろいことに、磁束管に対する磁気ヘリシティ  $K$  は  
 $\xi=1$  の磁力線のラグランジアンに比例することが示せる。

$$K = \int \vec{A} \cdot \vec{B} d^3x = \int \vec{A} \cdot \vec{B} d\sigma dl \quad (3.6)$$

ここに  $d\sigma$  は管の微小断面積,  $dl$  は管に沿う微小長さ。しかるに

$$\vec{B} d\sigma dl = \vec{b} d\Phi dl, \quad (3.7)$$

である。ここに  $\vec{b} = \vec{B}/B$ ,  $d\Phi$  は微小磁束を表わす。従って

$$K = d\Phi \int \vec{A} \cdot \vec{b} dl = d\Phi \int \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (3.8)$$

右辺は明かに (2.3) の極値  $\int \vec{A} \cdot d\vec{l}$  に比例している。

#### §4. テアリング不安定性の非線形時間発展<sup>2)</sup>

電流のあるトーラスプラズマを考える。配位は図2 a) に示されている。真のトーラスプラズマを精密に扱う研究は存在するが、ここでは厳密性は求めず図2 b) のような周期的円柱プラズマ近似で計算している。以下で磁場と電流密度の空間構造を示すが、それはすべてポロイダル断面 ( $\psi=0$ ) 上の構造のことである。円柱近似では  $z=0$  面内の構造である。

簡約 MHD に基づいたテアリング不安定性の非線形発展の様子を示す。初期の定常解の電流密度は半径  $r$  の減少関数と仮定する。実際のプラズマにおいてもその通りである。この電流密度の非一様性がテアリング不安定性の自由エネルギー

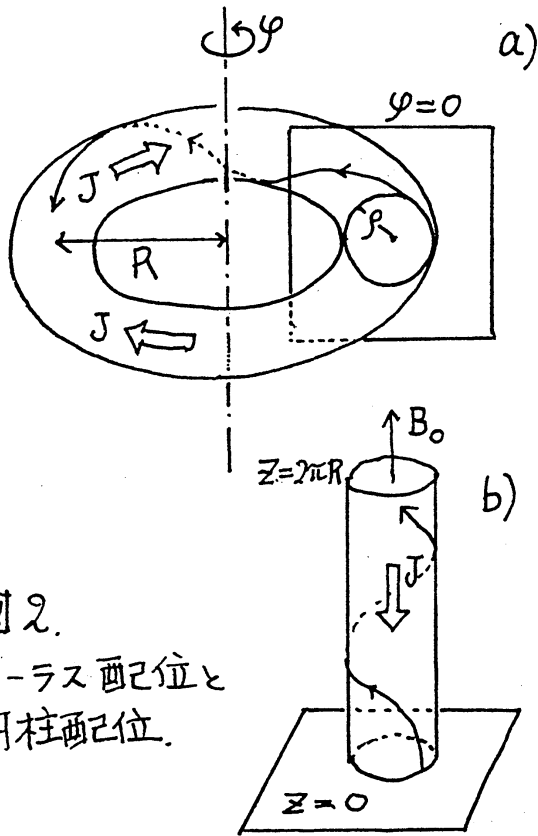


図2.  
トラス座記位と  
円柱座記位.

一となっている。言い換  
えれば回転変換角(図2  
で、磁力線のピッチ)が  
半径 $R$ の減少関数となる  
ことを意味する。この回  
転変換の非一様性のこと  
を磁気シアーとも言い慣  
わしている。テアリ  
ング不安定の自由エネル  
ギーは磁気シアーである  
と言い換えてもよい。こ

この不安定性は磁場の擾動を伴うため、磁気構造の時間的変動  
をもたらす。ここで磁気構造とは磁力線のホアンカレープロ  
ットの集合を意味する。すなわち、一本の磁力線とホロイダル  
断面( $z=0$ )との交点の集合である。但し、以下の図では  
複数の磁力線のプロットが重ねて描かれている。初期定常状  
態では、磁気構造は軸対称で入れ子構造の円の集合である。  
テアリング不安定性が発生すると、自由エネルギーを減少さ  
せる方向にプラズマ自ら変動する。すなわち電流密度の空間  
的均一化の方向に動く。従って電流密度の空間的輸送を引き  
起す。この輸送は、電流の resistivity  $\eta$  に基づく拡散に比



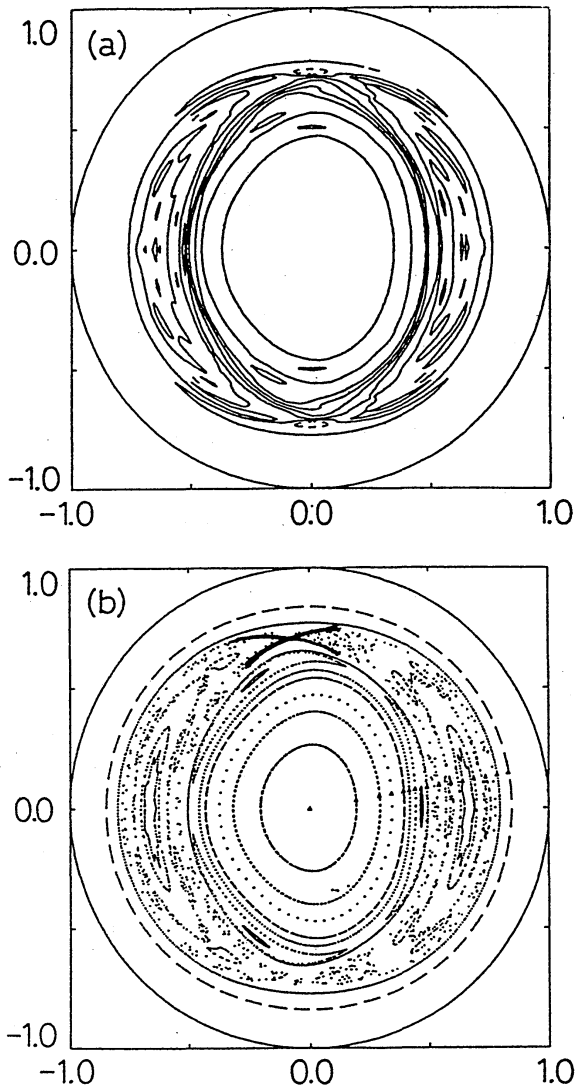


図3.  $t = 660 \tau_A$

べ極めて大きい輸送を引き起すのである。

テアリング不安定の最初の段階は比較的ゆるやかに進行し、先づ磁気島が形成される。 $t = 660 \tau_A$  での磁気構造が、図3 b)に示されているように、磁気島が明確に形成されている。そこには2組の島の組がある。左右にある三日月状の島は実は一周してつながっていて、内側の小さい3個の島も一組のものである。三日月の周辺部は、ぼやけていて、カオスの層ができて始

めている。十分内部では整然とした磁気面が維持されている。ここでは特に電流密度の空間構造と磁気構造との関係に着目するため、図3 a)には同時刻の電流密度の等高線が描かれている。明かに、この段階では、電流密度と磁場の空間構造とはよく似ている。

図3 b) の中に X 印を付けた所に注目してほしい。この近傍で磁気再結合が起きていて、X 点と呼ばれている。そこ

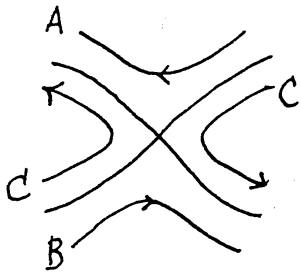


図4. X 点の概念図

を拡大した概念図が図4である。

X の中心を通る磁力線は再びその点にもどるので不動点と呼ばれる。

磁力線 A は左向き、磁力線 B

は右向きに動くため、磁気シア

ができています。テアリング不安定

により、A, B 二本の磁力線が再結合して、左右の磁力線 C のようになる。部分的に見ては分らないが左右の磁力線は実は一本の磁力線である。磁力線 C は島を造るために使われる。なお、磁気島は、ハミルトン力学における捕捉粒子の描く位相空間の島に対応する。従ってテアリング不安定性は磁力線を捕捉する不安定性のようなものである。

磁気再結合は磁力線のトポロジーを変えていると推測されるので、§3 で導入したトポロジカルな積分量  $K$  を計算してみよう。図4の磁力線 A, B, C について、それぞれの磁束管で積分した磁気ヘリシティ  $K_A, K_B, K_C$  を計算する。それぞれテアリングモードの擾動について1次の計算であるが、明かな差が現れ、

$$K_C < K_A = K_B \quad (4.1)$$

となる。磁力線 A, B, C 共に空間的には微小の距離を隔てているにすぎないが、テアリングモードに「共鳴」している磁力線 C だけが、その磁気ヘリシティの値が小さい。X 点

近傍での磁気再結合によってトポロジーを変え、従って K の値にジャンプを生じている分けである。この事を確かめるために MHD に基づく数値計算の結果から、電流密度が正になる部分だけを図 5 に示した。みごとに X 点近傍にだけ局在している。無擾動電流密

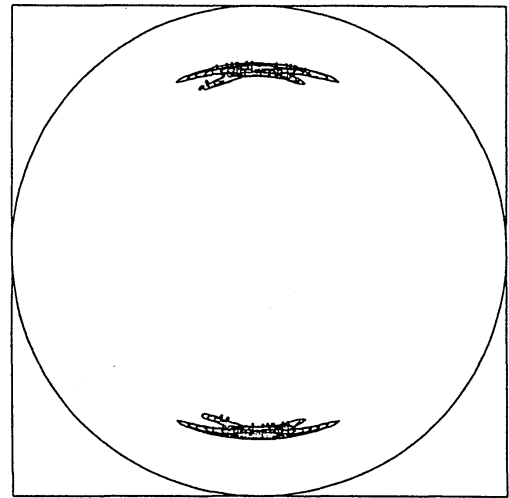


図 5. 正の電流密度

度は全空間で負と選んであったから、大きな正の擾動が X 点近傍に成長したことになる。ここで磁気ヘリシティ  $K$  の時間変動を決める (3.3) 式を思い出して欲しい。右辺の積分、 $-2 \int \eta \vec{j} \cdot \vec{B} d^3x$  は従って X 点近傍で負となる分けで、 $\Delta K = K_C - K_A < 0$  と矛盾のない関係になっている。

性質の異なる磁気島がそれぞれ別の場所で成長し互に作用を及ぼし合うようになると、全体としてのヘリカル対称性を崩し、

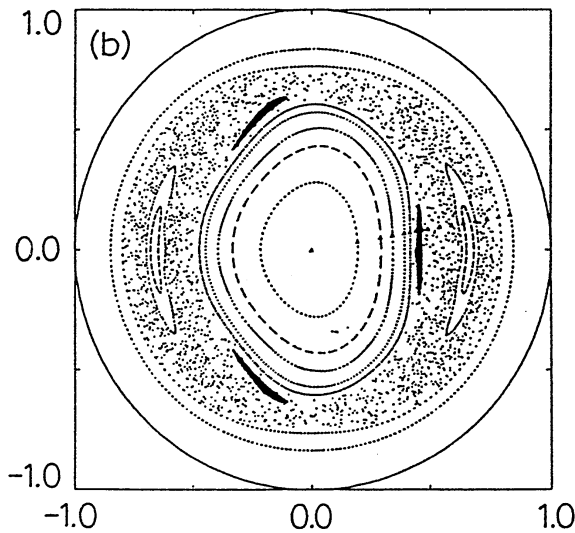
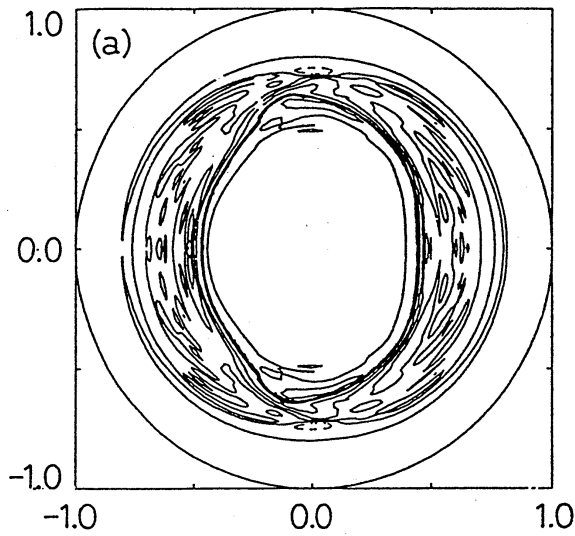


図6.  $t = 680 \tau_A$   
磁気カオスの成長

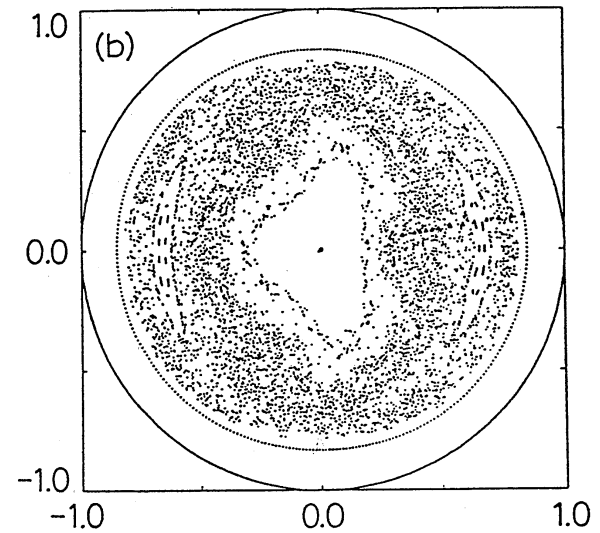
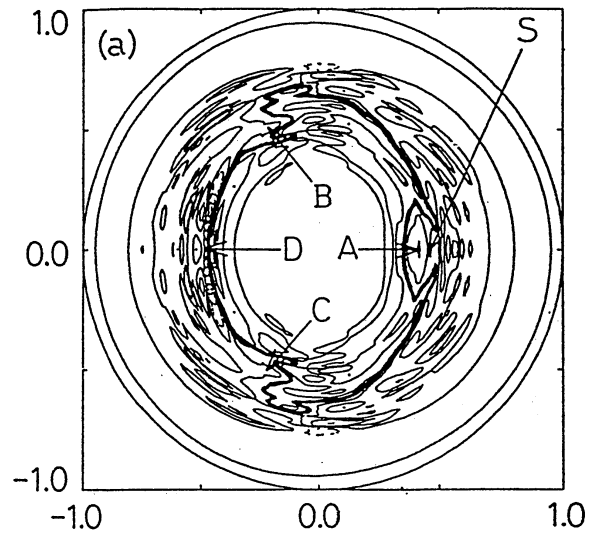


図7.  $t = 720 \tau_A$   
「電流泡」の形成

島と島の間に磁気カオスの領域が形成される(図6)。対称性が破れるとカオスが発生し易い。図6(b)において、カオス領域は広がってはいるが、3個と2個が組となった島はまだ明瞭に識別できる。中央の広い磁気面の領域を大陸と呼び、残りの点の集合(カオス領域)を海と呼ぶことにする。擾動

がさらに成長を続けると、海はどんどん広がり、遂に3個の島を飲み込んでしまう(図7b)。この時、海にはほとんど電流が流れていなかった。島は電流密度が高く、同様に電流密度の高い大陸部に隣接している。海の荒波は島を崩し、余勢を駆って大陸の奥に向け海水が浸入する。海と共に無電流領域が入り、大陸に電流密度の泡(電流泡)が形成される(図7a, 点Aの近傍)。これが電流密度の激しい空間輸送の具体的なメカニズムである。

#### 参考文献:

- 1) J. Cary and R. Littlejohn :  
Annals of Phys. 151, 1-34 (1983)
- 2) K. Urata and T. Hatori :  
Proc. of Research Trends in Chaotic Dynamics and  
Transport in Fluids and Plasmas, (1991)  
"Formation and Decay of Current Bubble in the  
Nonlinear Coupling Process of Resistive Tearing Modes"