数理解析研究所講究録
第 769 巻 1991 年 14-27

プラズマのヴォルジャー平衡に関する数理的問題

東京大学工学部　吉田善章

1. はじめに

プラズマ（磁気流体）の平衡とは，圧力 ∇p と電磁力 $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}$（$\boldsymbol{j}$: 電流密度，$\boldsymbol{B}$: 磁束密度）とが釣り合った状態を言う．変位電流を無視して $\boldsymbol{j}=\nabla\times\boldsymbol{B}/\mu_0$（$\mu_0$: 真空透磁率）の関係を用いると，

$$(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}=\mu_0\nabla p \tag{1}$$

が力の釣り合いを表す式である．磁束密度は発散を持たないベクトル場であるので，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0. \tag{2}$$

ベクトルの公式を用いて (1) を変形すると

$$(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}=-\nabla\Pi, \tag{1'}$$

但し $-\Pi=\mu_0 p+B^2$．従ってこの問題は非圧縮定常流のオイラー方程式とアナロジーを持つ．方程式系 (1)-(2) の特性方程式は

$$(\boldsymbol{B}\cdot\nabla\varphi)^2(\nabla\varphi)^2=0$$

と計算されるから，これが双曲・楕円型の非線形方程式系であることが分かる．2つの特性方向は，従属変数 $\boldsymbol{B}$ の方向に縮退している．

定常オイラー方程式の場合と同様に，プラズマ平衡の非線形問題の一般論は殆どと言って良いほど分かっていないが，対称性を持つ場合については，奇麗な理論がある．対称性の仮定は大域的な磁気面（$\boldsymbol{B}$ を接ベクトルとする曲面，即ち磁力線が乗った曲面）

の存在を保証する．第2節では対称性を持つ平衡に関するグラッド・シャフラノフの理論[1,2]を紹介する．

対称性がない一般的の場合には，磁力線は一つの曲面上に束縛されることなく，ある空間をエルゴディックに埋め尽くしていると考えられる（磁力線のカオス）．磁力線が丁度特性曲線であることを考えると，この様な状況下で双曲・楕円型の一般論を構築することの難しさは容易に想像できよう．しかし自然界に形成される構造というものは屡々感動的な単純さを持つものでる．実際，あるクラスのプラズマ平衡は捩れの作用素 $\nabla\times$ に関する線形固有値問題に帰着する．この種の「プラズマの固有状態」は，初め宇宙空間のプラズマに関連した概念として，チャンドラセカールやヴォルジャー達によって勢力的に研究され[3-6]，ヴォルジャー（Woltjer）平衡と呼ばれる．実験室のプラズマ（核融合研究）でも，一定の条件下でヴォルジャー平衡が発現することが示され，近年その形成のメカニズムが明らかになってきた[7]．$\nabla\times$ の固有関数として与えられるヴォルジャー平衡は，$\boldsymbol{B}$ を流速と思い直せばベルトラミ（Beltrami）流に相当する．第3節ではヴォルジャー平衡の概念を紹介すると共に，その数理的な要点について述べる．

2. 対称性を持つプラズマの平衡

2.1. 磁束関数と磁気面

プラズマの平衡を考えるとき，対称性の問題が一つの重要な論点となる．ここで対称とは，3次元空間の中に，少なくとも1つ無視できる座標があることを言う．

先ず x, y, z 座標で $\partial_z = 0$ となる場合を考えよう．以下これを z 対称と呼ぶ．$\boldsymbol{B}$ を z 対称なベクトル場とする．$\boldsymbol{B}$ の x-y 成分 $\boldsymbol{u}$ については，それを2次元のベクトル場と思えば，ポアンカレの定理が使える．即ち $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ より $\boldsymbol{u}$ は1次の閉微分形式と同一視でき，従って0次の微分形式（スカラー関数）ψ の外微分によって $\boldsymbol{u}=d\psi=\nabla\psi\times\nabla z$ と表すことができる．これに z 成分を付加して，

$$\boldsymbol{B} = \nabla\psi\times\nabla z + B_z\nabla z \tag{3}$$

と書く[2)]．ψを磁束関数（flux function）と呼ぶ．ψは$\boldsymbol{B}$に沿って一定，即ち

$$\boldsymbol{B}\cdot\nabla\psi=0 \tag{4}$$

が成り立つ．つまり磁力線はψ＝一定の面（z方向に一様な筒状の面）に乗っている．この様な面を磁気面と呼ぶ．

応用上最も重要なのは軸対称（θ対称）の場合である．即ち円筒座標r, θ, zで$\partial_\theta = 0$となる場合を考える．θ対称なベクトル場$\boldsymbol{B}$は

$$\boldsymbol{B} = \nabla\psi\times\nabla\theta + B_\theta\, r\, \nabla\theta \tag{5}$$

と書くことができる．ψは(4)を満足し，この場合の磁気面はθ対称なトーラスとなる．

ヘリカルな対称性を持つ磁場を表すには，ヘリカル磁束関数を用いる．円筒座標で，z方向の波数がk，θ方向の周期がmのヘリカル対称性を持つ磁場は

$$\boldsymbol{B} = \nabla\psi\times\nabla z + B_z\left(km^{-1}r^2\,\nabla\theta + \nabla z\right) \tag{6}$$

と表すことができる．ヘリカル磁束関数が(4)を満たすことも容易に分かる．ヘリカル磁束関数の例は3.2項に示す．

以上の例の様に，対称性を持つ磁場は磁気面を持っており，磁力線をずっと辿って行っても，その磁力線が動ける範囲はある一つの面内に束縛されている．従って，磁場（一般に発散のないベクトル場）がカオスを生じるためには対称性が壊されねばならないことが分かる．

2.2. グラッド・シャフラノフの方程式

対称性を持つプラズマの平衡は，磁束関数を用いると簡単に定式化することができる．z対称の場合について計算しよう．表式(3)を平衡の式(1)に代入すると，

$$(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B} = (-\Delta\psi)\nabla\psi - B_z\nabla B_z + (\nabla B_z\times\nabla\psi\cdot\nabla z)\nabla z = \mu_0\,\nabla p \tag{7}$$

を得る．z 対称性の仮定より $\nabla\psi, \nabla B_z$ は x-y 成分しか持たない．(7) の z 成分から，$\nabla B_z \times \nabla\psi = 0$，即ち ∇B_z と $\nabla\psi$ が平行であることが分かる．従って $B_z = B_z(\psi)$ と書くことができる．$\nabla B_z = B_z' \nabla\psi$ と置き，(7) を書き直すと，

$$(-\Delta\psi)\nabla\psi - B_z B_z' \nabla\psi = \mu_0 \nabla p \tag{8}$$

を得る．従って ∇p と $\nabla\psi$ は平行であり，$p = p(\psi)$ と書くことができる．$\nabla p = p' \nabla\psi$, $W(\psi) = B_z(\psi)^2/2$ と置き，(8) を書き直すと，

$$(-\Delta\psi)\nabla\psi = (W' + \mu_0 p')\nabla\psi$$

ほとんどいたるところ $\nabla\psi$ が 0 でない平衡を考えるので，

$$-\Delta\psi = W'(\psi) + \mu_0 p'(\psi) \tag{9}$$

を得る[1]．この方程式をグラッド・シャフラノフ（Grad-Shafranov）の方程式と呼ぶ．2 つの独立な関数 $W'(\psi), p'(\psi)$ を与えると，(9) は（非線形）楕円型偏微分方程式となる．この境界値問題を解いてプラズマの平衡磁場が求められる．

平衡を特徴付ける 2 つの独立な関数 $W'(\psi), p'(\psi)$ は，元の方程式系 (1)-(2) の 2 つの双曲性に対応している．対称性がある場合には，特性曲線は $\psi =$ 一定の磁気面に乗っているので，$z = 0$ で「コーシーのデータ」$W'(\psi), p'(\psi)$ を与えると z 方向に容易に積分され，双曲性が消去されて楕円型の境界値問題に帰着するのである．

3. ヴォルジャー平衡

3.1. ヴォルジャー平衡の物理的背景

前節では，対称性を持つプラズマの平衡について述べた．対称性がない場合には大域的な磁気面の存在が保証されないので一般論は非常に難しい．$\nabla p = 0$ の極限，即ち「力を及ぼさない磁場」の構造についてはある程度理論がある[7,8]．本節ではヴォルジャー平

衡と呼ばれるプラズマの固有状態について述べる．

平衡方程式 (1) において圧力 ∇p が 0 とすると，$\nabla\times\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{B}$ が平行でなくてはならないことが分かる．即ち，

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\Lambda\boldsymbol{B}, \tag{10}$$

Λ は任意のスカラー関数，但し $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ でなくてはならないので，

$$\boldsymbol{B}\cdot\nabla\Lambda=0 \tag{11}$$

を要する．特に $\Lambda=\lambda$（定数）の場合，(11) は自明，(10) は $\nabla\times$ の固有値問題となる．大雑把な言い方かも知れないが，力学系の「固有の状態」と言うものは，数学的にはある種の固有値問題によって記述されると考えることができよう．このシンプルな固有値問題によって記述されるプラズマの固有状態をヴォルジャー状態と呼ぶ．その物理的意味は次に述べる変分原理によって旨く表現される．

プラズマは 3 次元の領域 Ω 内にあるとする．Ω は有界，その境界 $\partial\Omega$ は滑か，境界条件は簡単の為 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}=0$ とする（$\boldsymbol{n}$ は $\partial\Omega$ 上の外法線ベクトル）．ホッジ・小平分解を用いると，

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{w}+\boldsymbol{h} \tag{12}$$

と表すことができる（3.3 項参照）．但し，$\nabla\cdot\boldsymbol{w}=0, \nabla\cdot\boldsymbol{h}=0, \nabla\times\boldsymbol{h}=0$ となる様にする．ポテンシャル $\boldsymbol{w}$ と調和微分形式 $\boldsymbol{h}$ はそれぞれ境界条件

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{w}=0,\quad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{h}=0 \tag{13}$$

を満たす様に取れる．Ω が単連結の場合は $\boldsymbol{h}=0$ となるが，多重連結の場合は一般に $\boldsymbol{h}\neq0$ である．その場合は，磁束を条件として固定すると $\boldsymbol{h}$ は固定される．

さて磁気エネルギー

$$\mathcal{E} = (\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}) / 2\mu_0 \equiv \int_\Omega \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B}^* \, dx / 2\mu_0$$

を $\boldsymbol{B}$ に対する汎関数として，その変分問題を考えよう．$\mathcal{E}$ を極小にする問題のオイラー方程式は，$\nabla\times\boldsymbol{w}$ と $\boldsymbol{h}$ の直交性と境界条件 (13) に留意して計算すると，

$$\nabla\times\boldsymbol{B} = 0$$

となり，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{h}$ が答であることが分かる．即ちプラズマ中に電流がない真空磁場が最もエネルギーが小さい．

プラズマ中に電流が流れて捩られた磁場では，真空磁場よりも $\mathcal{E}$ が大きくなる．捩れの総量を固定して，$\mathcal{E}$ を極小にする磁場を探そう．捩れを表す概念にヘリシティーがある．体積積分

$$\mathcal{K} = \int_\Omega \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{B} \, dx$$

を「ヘリシティー」，その被積分関数をヘリシティー密度と呼ぶ．$\mathcal{K}$ を束縛し，$\mathcal{E}$ を極小にする変分問題を考えよう．λ をラグランジュ未定乗数とした汎関数 $\mathcal{E} - \lambda\mathcal{K}$ のオイラー方程式は

$$\nabla\times\boldsymbol{B} = \lambda\boldsymbol{B}, \tag{10'}$$

即ちヴォルジャー平衡の方程式を得る[6]．

ヴォルジャー平衡の物理的な意味は次の様に説明できる．プラズマに電流を流すと言うことは，換言すればプラズマ中の磁場を捩る，即ちヘリシティーを与えることである．例えばトカマクでは，トランスの原理による誘導や，円偏波した電磁波[9]でヘリシティーを入射[10]することができる．太陽コロナのループでは，太陽表面のスポットの渦運動（コリオリの力による）がループ内の磁力線を捩じってヘリシティーが与えられると考えられている[11]．総量としてプラズマに与えられたヘリシティーの密度はプラズマ中に

どの様に分布するであろうか？ プラズマは不安定性による揺らぎを通じて，エネルギー $\mathbb{E}$ が最も小さい状態を捜し当て，自己安定化した構造を形成するであろう．ヴォルジャー平衡はこの様な極小エネルギー磁場であると解釈されている[12]．

3.2. チャンドラセカール・ケンドール関数

ヴォルジャー平衡方程式 (10') の具体的な解を観察することから始めよう．円柱状領域に対する (10') の解はチャンドラセカール・ケンドール（Chandrasekhar-Kendall）関数で与えられる[4]．半径が a で長さ L 毎に周期的な円柱を考えよう．円筒座標で

$$\boldsymbol{u} = \lambda\nabla\Phi\times\nabla z + \nabla\times(\nabla\Phi\times\nabla z), \tag{14}$$

$$\Phi = J_m(\mu_j r)\exp(im\theta - ikz)$$

と置くと，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{u}$ はヴォルジャー平衡の式 (10') を満足する．但し，J_m は m 次（$m=0, 1, 2, \cdots$）のベッセル関数，固有値は $\lambda = \pm(\mu_j^2 + k^2)^{1/2}$, $k = \pm 2\pi n/L$ ($n = 0, 1, 2, \cdots$)で与えられる．$\mu_j (j = 1, 2, \cdots)$ は，$r = a$ での境界条件 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u} = 0$ より，

$$\lambda m J_m(\mu_j a)/a - \mu_j k J_m'(\mu_j a) = 0 \tag{15}$$

の j 番目の根として定められる．$m = k = 0$ の場合は (15) は無意味になり，代わりに μ_j は磁束（$=flux$）の条件で決定される．$\nabla\times$ の固有関数系を求めようとする場合には，後で述べる様に $flux = 0$ とすべきで，

$$flux = 2\pi\int_0^a \mathbf{u}\cdot\nabla z\, rdr = 2\pi\int_0^a J_0(\mu_j r)\, rdr = 2\pi a\mu_j^{-1} J_1(\mu_j a) = 0 \tag{16}$$

によって μ_j が計算される．関数 (14) をチャンドラセカール・ケンドール関数と呼ぶ．

チャンドラセカール・ケンドール関数はヘリカル対称性を持つので，2.1 項で述べた様に磁気面を持つ．(14) を (6) の形に書き直すには，

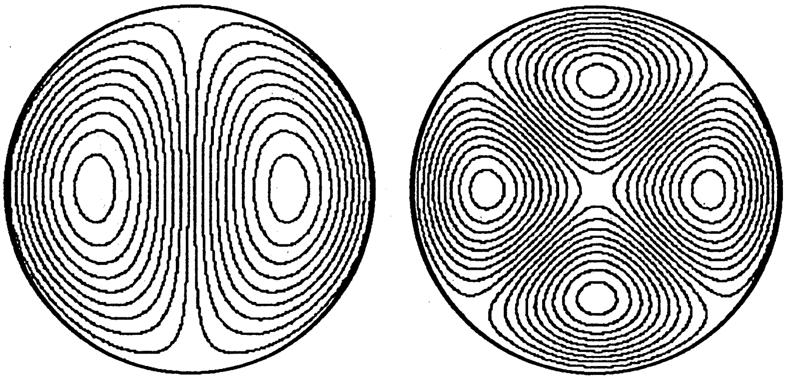

図 1 : $j=1, k=1, m=1,2$ のチャンドラセカール・ケンドール関数に対するヘリカル磁束関数の等高線．渦の場の固有関数の様子を示したものである．

$$\psi=\lambda\Phi-k\,m^{-1}r\partial_r\Phi,\quad B_z=-\left(\Delta+k^2\right)\Phi$$

と取ればよい．図 1 に $j=1, k=1, m=1,2$ のヴォルジャー平衡に関するヘリカル磁束関数の，$z=0$ の断面における等高線を示す[13]．磁気面はこれらの等高線をそれぞれのピッチで引き伸ばしたヘリカルな曲面である．

$m=k=0$ のチャンドラセカール・ケンドール関数は，円筒座標で書くと，

$$u_0=c\begin{pmatrix}0\\ \pm J_1(\mu r)\\ J_0(\mu r)\end{pmatrix}$$

となる．cは定数，固有値 $\lambda=\pm\mu$（符号は u_0 の θ成分の符号に同じ）である．磁束 = *flux* と λ の関係は

$$c=flux\cdot\lambda/2\pi a J_1(\lambda a)$$

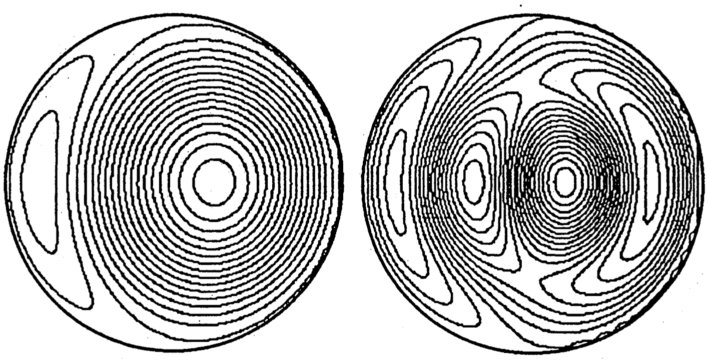

図 2：u_0 にヘリカルな解が重なったヴォルジャー平衡

である．磁束を固定しなければ，$\lambda=\pm\mu$ は任意の複素数に取ってよい．つまり磁束を固定しないとき，作用素 $\nabla\times$ の固有値（点スペクトル）は全複素平面に広がった連続体となる．次項の抽象論で述べる様に，これは任意の多重連結の領域について成り立つ．

λ が丁度 $m\neq 0$ あるいは $k\neq 0$ の固有値に一致したとき，u_0 にヘリカルな解が重なった解が分岐する．その様な状態もヘリカル対称性を持つので，磁気面がある．図 2 に 2 つの例を示す．

以上の様に円柱状の領域については，チャンドラセカール・ケンドール関数によって，$\nabla\times$ の固有関数の様子を具体的に知ることができた[13]．$flux=0$ とすれば，固有値は離散的な実数値を取り，それぞれの固有関数はヒルベルト空間 $L^2(\Omega)$ の内積に関して互いに直交する．それでは，この様な固有関数によって実際いかなる関数空間を張ることができるのであろうか？ 次項で述べる様に，一般的に任意の有界領域に対して，渦の場（solenoidal vector field）を $\nabla\times$ の固有関数の和として完全に直交分解できることが証明できる．この様な分解（関数展開）はプラズマや流体のダイナミックスの数値シミュレーションでも有力な手段となる[14]．

3.3. 捩れの作用素∇×のスペクトル分解

捩れの作用素∇× のスペクトルに関する基礎的な定理を整理しよう．Ωは滑らかな境界を持つ有界な 3 次元領域とする．2 乗可積分なベクトル場のルベーグ空間を $L^2(\Omega)$ と書き，その部分空間を以下の様に定義する．

$$L^2_\Sigma = \{ \boldsymbol{u} \in L^2(\Omega)\ ;\ \nabla\cdot \boldsymbol{u} = 0,\ \boldsymbol{n}\cdot \boldsymbol{u} = 0,\ \mathit{flux} = 0 \},$$

$$L^2_H = \{ \boldsymbol{h} \in L^2(\Omega)\ ;\ \nabla\cdot \boldsymbol{h} = 0, \nabla\times\boldsymbol{h} = 0,\ \boldsymbol{n}\cdot \boldsymbol{h} = 0 \},$$

$$L^2_G = \{ \boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)\ ;\ \boldsymbol{v} = \nabla\varphi,\ \nabla\cdot \boldsymbol{v} = 0 \},$$

$$L^2_F = \{ \boldsymbol{w} \in L^2(\Omega)\ ;\ \boldsymbol{w} = \nabla\varphi,\ \boldsymbol{n}\cdot \boldsymbol{w} = 0 \},$$

但し *flux* は Ω が多重連結の場合に，その切断面を通過するフラックス[2]として定義される；(16) 参照．Ω が単連結の場合は $\mathit{flux}=0$ の条件は意味がない．これらの部分空間によって $L^2(\Omega)$ が直和分解されることが知られている[15]．即ち，

$$L^2(\Omega) = L^2_\Sigma \oplus L^2_H \oplus L^2_G \oplus L^2_F \cdot$$

更に

$$\mathrm{Ker(curl)} \equiv \{ \boldsymbol{v} \in L^2(\Omega);\ \nabla\times\boldsymbol{v} = 0 \}$$

と書くと，

$$L^2(\Omega) = L^2_\Sigma \oplus \mathrm{Ker(curl)}$$

なる関係がある．また，発散のないベクトル場については

$$\mathrm{Ker(div)} \equiv \{ \boldsymbol{v} \in L^2(\Omega);\ \nabla\cdot \boldsymbol{v} = 0 \} = L^2_\Sigma \oplus L^2_H \oplus L^2_G$$

となる．$\boldsymbol{u} \in \mathrm{Ker(div)}$ 対し境界条件 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}=0$ を仮定すると

$$u \in L^2_\sigma \equiv L^2_\Sigma \oplus L^2_H$$

となる．L^2_H は調和形式の空間であり，その次元は $\partial\Omega$ の種数に等しい．

外微分 $\nabla\times$ について以下の定理がある[16]．先ず Ker(curl) の直交補空間 L^2_Σ で $\nabla\times$ を考えよう．次の様な作用素を定義する．

$$\mathbb{S}u = \nabla\times u,\quad D(\mathbb{S}) = \{u \in L^2_\Sigma; \nabla\times u \in L^2_\Sigma\}.$$

但し，D($\mathbb{S}$)は作用素 $\mathbb{S}$ の定義域を意味する．

定理1（自己共役な $\nabla\times$）[16]

作用素 $\mathbb{S}$ は空間 L^2_Σ 内の自己共役作用素である．$\mathbb{S}$ のスペクトルは実数の点スペクトルのみからなる．$\mathbb{S}$ の固有関数は L^2_Σ の直交完全基底を与える．

具体的に円柱状の領域については，

定理1'（チャンドラセカール・ケンドール関数の完全性）

チャンドラセカール・ケンドール関数（$m=k=0$ のモードについては $flux=0$ とする）は，作用素 $\mathbb{S}$ の固有関数の全てを網羅し，従って円柱状の領域に関するヒルベルト空間 L^2_Σ の直交完全基底となる．

次に，一般の $u \in$ Ker(div) を考えよう．$n{\cdot}u$ は固定する必要がある．$n{\cdot}u=0$ としても本質は変わらないので，L^2_σ で $\nabla\times$ を考える．

$$\mathbb{T}u = \nabla\times u,\quad D(\mathbb{T}) = \{u \in L^2_\sigma; \nabla\times u \in L^2_\sigma\}$$

と定義すると，

定理2（$\nabla\times$ のスペクトルと Ω のコホモロジーの関係）[16]

(1) 領域 Ω が単連結である場合，$L^2_\sigma = L^2_\Sigma$ であるから，$\mathbb{T}=\mathbb{S}$．従って $\mathbb{T}$ のスペクトル

は実数の点スペクトルのみからなる．

(2) 領域 Ω が多重連結である場合，$L^2_\sigma \supset L^2_\Sigma$ であるから，$\mathbf{T} \supset \mathbf{S}$．$\mathbf{T}$ のスペクトルは点スペクトルのみからなり，それは全複素数 $\mathbf{C}$ に等しい．つまり，方程式 $\nabla\times\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}$ は任意の複素数 λ について自明でない解を持つ．

定理 2-(2) は 3.2 項で $flux\neq 0$ のチャンドラセカール・ケンドール関数について見たことの一般論である．$\mathbf{S}$ のスペクトル以外の λ についても $\nabla\times\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}$ が自明でない解を持つことを言うには，方程式

$$\nabla\times\boldsymbol{v}-\lambda\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{h}$$

が $\boldsymbol{v}$ について解けることを示せばよい．但し，コホモロジー $\boldsymbol{h}\in L^2_H$ が存在するために領域 Ω が多重連結である必要がある．$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{h}$ と置いて解を得る[16]．

4. 終わりに

プラズマの平衡に関する数理的問題として，対称性と構造の関係，領域の連結状態と解の存在条件の関係等について考察した．特に作用素 $\nabla\times$ の固有関数として与えられるヴォルジャー平衡について述べた．この問題は作用素 $\nabla\times$ のスペクトルの問題に帰着する．定理 2-(2) より，全く対称性を持たない多重連結領域についても，ヴォルジャー平衡の方程式 (10') は，任意の λ について解を持つことが示された．対称性のないヴォルジャー平衡は磁気面を持つかどうか分からない．

力を及ぼさない磁場の対称性破壊とカオスの発現について考えてみよう．仮に Λ が一定ではない (10)-(11) の滑らかな解があったとしよう．するとその解は磁気面を持たねばならない．なぜならば (11) より，Λ は $\boldsymbol{B}$ に沿って一定でなくてはならない．もし磁気面がなくて磁力線がある体積を稠密に埋めるとすると，その領域において Λ が一定にならなくてはならないからである．対称性がある場合については，一定でない Λ に対しても解がある．それはグラッド・シャフラノフの方程式を解いて求められる．例えば z 対

称の場合，$p'(\psi)=0$（力を及ぼさない），$B_z'(\psi)=\Lambda(\psi)$として(9)を解くとΛが一定でないヴォルジャー平衡が求められる．2.1項で注意した様に，対称性と磁気面の存在は密接に関係しており，磁力線の動く範囲をある磁気面上に束縛するためには，対称性があることが一つの十分条件である．逆にエルゴディックな磁場の下では，平衡を特徴付ける関数Λは一定値に縮退してしまう．対称性を持たず，しかも一定でないΛをもつ（即ち磁気面を持つ）(10)-(11)の解が存在し得るのかどうかは未解決問題である．

3.3項で述べた$\nabla\times$のスペクトルに関する事項は儀我美一氏（北大）との共同研究によっている．2.2項で述べたグラッド・シャフラノフ理論の概説はH. Grad教授（クーラン研究所）の講義によるところが大きい．またヴォルジャー平衡の物理的背景についてはW. Grossman氏（クーラン研究所）の講義が参考になった．末筆ながら感謝の意を述べる次第である．

参考文献

1) H. Grad and H. Rubin: in *Second United Nation Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy*, Vol. 31 (United Nation, Geneva, 1958), 190.

2) A.A. Blank, K.O. Friedricks and H. Grad: *Notes on Magneto-Hydrodynamics V; Theory of Maxwell's Equations without Displacement Current*, NYO-6486-V (Courant Institute, New York, 1957).

3) S. Chandrasekhar: Proc. Nat. Acad. Sci. **42** (1956), 1.

4) S. Chandrasekhar and P.C. Kendall: Astrophys. J. **126** (1957), 457.

5) L. Woltjer: Astrophys. J. **128** (1958), 384.

6) L. Woltjer: Proc. Natl. Acad. Sci. U.S. **44** (1958), 489.

7) 吉田善章: 日本物理学会誌 **46** (1991), 450.

8) B.C. Low: Rev. Geophys. Space Phys. **20** (1982), 145.

9) Z. Yoshida: J. Plasma Phys. **45** (1991), 481.

10) M.K. Levir and J.W. Gray: in *Proceedings of Reversed Field Pinch Theory Workshop* (ed.

H.R. Lewis & R.A. Gerwin), LA-8944-C (Los Alamos National Laboratory, New Mexico, 1981), p. 176.

11) E.N. Parker: Astrophys. J. **174** (1972), 499.

12) A. Hasegawa: Adv. Phys. **34** (1985), 1.

13) Z. Yoshida: Prog. Theor. Phys. **86** (1991), 45.

14) D. Montgomery, L. Turner and G. Vahala: Phys. Fluids **21**(1978), 757, D. Montgomery, L. Phillips and M.L. Theobald: Phys. Rev. A **40** (1989), 1515.

15) C. Foias and R. Temam: Ann. Sc. Norm. Supr. Pisa **5** (1978), 29.

16) Z. Yoshida and Y. Giga: Math. Z. **204** (1990), 235.