数理解析研究所講究録
第77[illegible]巻 1991年 36-43

H-systemの解の爆発点について

都立大学 笹原 康浩

1. 序

Bを$\mathbb{R}^2$の単位円板とし、次のDirichlet境界値問題を考える。

$$(1)\quad \begin{cases} \Delta u = 2H\, u_x \wedge u_y & \text{on } B \\ u = \gamma & \text{on } \partial B \end{cases}$$

ただし$u : B \to \mathbb{R}^3$, $H>0$ 定数、"$\wedge$"は$\mathbb{R}^3$における外積である。(1)の解が等角条件

$$|u_x|^2 = |u_y|^2, \quad u_x \cdot u_y = 0 \qquad \text{on } B$$

を満たすとき、定数平均曲率Hを持つ曲面を与える。

$\mathbb{R}^3$内のJordan曲線Γに張られた定数平均曲率曲面をみつけるという問題を動機として、H-systemは長年にわたって研究

されてきた。

Hildebrandtは、(1)をEuler方程式とする汎函数

$$(2) \quad E_H(v) := \int |\nabla v|^2 + \frac{4H}{3}\int v\cdot v_x \wedge v_y$$

が、$H \times \sup|\gamma| < 1$のとき、極小点をもつことを示した。この解は"small solution"と呼ばれている。E_Hの極小点は高々1個であり、常に非退化である。すなわち、$\underline{u}$を"small sol."とすると、

$$(3) \quad d^2E_H(\underline{u})(v,v) := \int |\nabla v|^2 + 4H\int \underline{u}\cdot v_x \wedge v_y \geq \alpha \int |\nabla v|^2$$

$$\text{for all } v \in H_0^1$$

が成立する。これから、min-max法によってもう一つ解が得ることができる。ただし、これはPalais-Smale条件が一般には成立しないため、次の評価を必要とする。

<u>補題1.</u>

$P_0 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2$ 立体射影

$\omega := TP_0\left(\frac{\cdot - a}{\varepsilon}\right) \qquad \varepsilon > 0,\ a \in B,\ T \in SO(3)$

$v := \omega + \varphi \in H_0^1(B;\mathbb{R}^3)$

$\delta = \|\nabla\varphi\|_{L^2(B)}$ とすると、次の評価が十分小さいε, δ

に対して成立する。

$$(\mathrm{i})\quad \frac{\int |\nabla v|^2}{\left|\int v\cdot v_x\wedge v_y\right|^{\frac{2}{3}}} \leq S + C_1(\varepsilon+\delta)^2$$

$$(\mathrm{ii})\quad \left| \frac{4H\int \underline{u}\cdot v_x\wedge v_y}{\left|\int v\cdot v_x\wedge v_y\right|^{\frac{2}{3}}} + SH(u_x(a)\cdot Te_1 + u_y(a)\cdot Te_2)\varepsilon \right|$$

$$\leq C_2\,\varepsilon^{\frac{1}{4}}(\varepsilon+\delta)H$$

ここで $S := \inf_{v\in H_0^1} \frac{\int |\nabla v|^2}{\left|\int v\cdot v_x\wedge v_y\right|^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{32\pi}$

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x P_0(0)/|\partial_x P_0(0)| \\ \partial_y P_0(0)/|\partial_y P_0(0)| \end{pmatrix}$$

である。

また C_1 は $|a|\leq d<1$ なる d によって一様に定まり、

C_2 は d と $\|\gamma\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial B)}$ のみに依存する。

$$J_H := \inf_{\substack{v\in H_0^1 \\ \int v\cdot v_x\wedge v_y=1}} \left\{ \int |\nabla v|^2 + 4H\int \underline{u}\cdot v_x\wedge v_y \right\}$$

とすると、$J_H < S$ の時、minimizing sequence の収束がいえる。補題1より $\gamma\neq$ constant ならば、T, a を適当にとってやることによって $J_H<S$ がいえる。minimizer v^0 をとって

$\bar{u} = \underline{u} - \frac{J_H}{2H}v^0$ とすると、$\bar{u}$ は(I)のもう1つの解である。

この解は"large solution"と呼ばれている。"large solution"の存在証明は、Brezis-Coron と Struweによってほぼ同時になされた。

さらに、Brezis-Coron は$H \downarrow 0$のときの解の挙動について研究した。次の定理は、彼らの研究を"large solution"に適用したものである。

<u>定理1.</u>

$H_n > 0 \quad \lim_{n\to\infty} H_n \to 0$

$$\begin{cases} \underline{u}^n : \text{small solution of (1) for } H_n \\ \overline{u}^n : \text{large solution} \quad \text{〃} \end{cases}$$ とする。

このとき$v^n = H_n(\overline{u}^n - \underline{u}^n)$とすると、$T \in SO(3)$, $\{a_n\} \subset B$, $\{\varepsilon_n\} \subset \mathbb{R}^+$を適当にとって

$$(4) \qquad \left\| v^n - TP_0\left(\frac{\cdot - a_n}{\varepsilon_n}\right) \right\|_{H_1} \longrightarrow 0 \quad \text{as } n \to \infty$$

とすることができる。

この定理は、$H \downarrow 0$ のとき"large solution"がある意味で一点爆発することを示している。"large solution"は一意的ではなく、H-system の解の枝の構造と、与えられた境界値γとの関係は明らかにされていない。爆発点による解の枝の分類は、$H = 0$ の近傍での解の構造をとらえるために重要な役割を果たす。次に示す主結果は、"large solution"の爆発点を境界値γによって定まるB上の函数で特徴づけられることを示す。

2. 主結果

h^γを境界値γを持つ調和函数とし、$K: B \to \mathbb{R}^+$を

(5) $$K(z) := (1-z^2)\{|\nabla h^\gamma(z)|^2 + 2|h^\gamma_x(z) \wedge h^\gamma_y(z)|\}^{1/2}$$

と定める。このとき"large solution"の爆発点はKの最大点である。

証明の方針："large solution"の構成法から定理1のv^nは

(6) $$R_n(v) := d^2 E_H(\underline{u})(v, v) = \int |\nabla v|^2 + 4H_n \int \underline{u}^n \cdot v_x \wedge v_y$$

の$\{v \in H^1_0 ; \int v \cdot v_x \wedge v_y = 1\}$におけるminimizerの定数倍である。もし(4)において収束の速さがε_nでおさえられれば、補題1.の評価から爆発点の特徴づけが得られる。

補題2.

$(T_n, a_n, \varepsilon_n) \in SO(3) \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$を$\|\nabla(v^n - T_n P_0(\frac{\cdot - a_n}{\varepsilon_n}))\|_{L^2}$
$= \inf_{(T,a,\varepsilon) \in SO(3) \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+} \|\nabla(v^n - TP_0(\frac{\cdot - a}{\varepsilon}))\|_{L^2}$となるようにとる。このとき、

ある定数$C > 0$が存在して$\|\nabla(v^n - T_n P_0(\frac{\cdot - a_n}{\varepsilon_n}))\|_{L^2} \leq C\varepsilon_n$。

補題2から次のように主結果が得られる。

$\tilde{a} \in B$, $T \in SO(3)$を任意にとって$\hat{v}^n = Tv^n \circ \tau$と定める。ただしてはて$\tau(\hat{a}) = a_\infty = \lim_{n\to\infty} a_n$となるBからBの上への一次分数変換。このとき、$\int |\nabla \tilde{v}^n|^2 = \int |\nabla v^n|^2$, $\int \tilde{v}^n \cdot \tilde{v}_x^n \wedge \tilde{v}_y^n = \int v^n \cdot v_x^n \wedge v_y^n$であることに注意する。また、$(\tilde{T}_n, \tilde{a}_n, \tilde{\varepsilon}_n)$を$(T_n, a_n, \varepsilon_n)$と同様に定めると、明らかに$\lim_{n\to\infty} \tilde{a}_n = \tilde{a}$であり、$w = \tau(z)$に対して

$$\frac{dw}{1-|w|^2} = \frac{dz}{1-|z|^2}$$

が成立することから、$\lim_{n\to\infty} \dfrac{\tilde{\varepsilon}_n}{\varepsilon_n} = \dfrac{1-|\tilde{a}|^2}{1-|a_\infty|^2}$である。このとき

$$J_n := \frac{\int |\nabla v^n|^2 + 4H_n \int \underline{u}^n \cdot v_x^n \wedge v_y^n}{\left| \int v^n \cdot v_x^n \wedge v_y^n \right|^{2/3}}$$

$$\tilde{J}_n := \frac{\int |\nabla \tilde{v}^n|^2 + 4H_n \int \underline{u}^n \cdot \tilde{v}_x^n \wedge \tilde{v}_y^n}{\left| \int \tilde{v}^n \cdot \tilde{v}_x^n \wedge \tilde{v}_y^n \right|^{2/3}}$$

とすると補題1から、

$$\tilde{J}_n - J_n = \frac{4H_n}{\left| \int v^n \cdot v_x^n \wedge v_y^n \right|^{2/3}} \left\{ \int \underline{u}^n \cdot \tilde{v}_x^n \wedge \tilde{v}_y^n - \int \underline{u}^n \cdot v_x^n \wedge v_y^n \right\}$$

$$= S' H_n \{ (\underline{u}_x^n(a_n) \cdot T_n e_1 + \underline{u}_y^n(a_n) \cdot T_n e_2) \varepsilon_n$$

$$- (\underline{u}_x^n(\tilde{a}_n) \cdot \tilde{T}_n e_1 + \underline{u}_y^n(\tilde{a}_n) \cdot \tilde{T}_n e_2) \tilde{\varepsilon}_n \} + o(\varepsilon_n H_n)$$

$\nabla \underline{u}^n(a_n) = \nabla h^\gamma(a_\infty) + o(1)$, $\nabla u(\tilde{a}_n) = \nabla h^\gamma(\hat{a}) + o(1)$ より、

$$\tilde{J}_n - J_n = SH_n\{(h_x^\gamma(a_\infty)\cdot T_\infty e_1 + h_y^\gamma(a_\infty)\cdot T_\infty e_2)\varepsilon_n - (h_x^\gamma(\hat{a})\cdot \tilde{T}e_1 + h_y^\gamma(\hat{a})\cdot \tilde{T}e_2)\frac{1-|\hat{a}|^2}{1-|a_\infty|^2}\varepsilon_n\} + o(\varepsilon_n H_n)$$

ここで $\tilde{J}_n \geq J_n$ と

$$\max_{T\in SO(3)}(h_x^\gamma(z)\cdot Te_1 + h_y^\gamma(z)\cdot Te_2) = \{|\nabla h^\gamma(z)|^2 + 2|h_x^\gamma(z)\wedge h_y^\gamma(z)|\}^{1/2}$$

より

$$(7)\quad (1-|a_\infty|^2)\{|\nabla h^\gamma(a_\infty)|^2 + 2|h_x^\gamma(a_\infty)\wedge h_y^\gamma(a_\infty)|\}^{1/2} \geq (1-|\hat{a}|^2)\{|\nabla h^\gamma(\hat{a})|^2 + 2|h_x^\gamma(\hat{a})\wedge h_y^\gamma(\hat{a})|\}^{1/2}$$

を得る。$\hat{a}\in B$ 任意より、a_∞ は K の最大点である。

注意：上の証明においては、記述を簡単にするために、a_∞ が境界上の点でないことを仮定している。しかし、一次分数変換で引き戻すことにより、a_∞ が境界上にあるとしてもこの結果は成立する。

最後に、このような爆発点の特徴づけが有効であることを理解するために、次の定理を結果だけ紹介しておく。

定理2.

$\mathcal{M} = \{z\in B;\ K$ の極大点 $\}$ とすると、

$\mathcal{M}$の各連結成分にたいし、その上に爆発点をもつ解の枝が存在する。

参考文献

1. H.Brezis, J.M. Coron; Multiple solutions of H-systems and Rellich's conjecture, Comm. Pure Appl. Math. vol. 37 (1984)
2. ———, Convergence of solutions of H-systems or how to blow bubbles, Arch. Rational Mech. Anal. vol. 89 (1985)
3. M. Giaquinta, "Multiple integrals in the calculus of variations and elliptic systems", Princeton Univ. Press (1983)
4. S. Hildebrandt, On the Plateau problem for surfaces of constant mean curvature, Comm. Pure Appl. Math. vol. 23 (1970)
5. M. Struwe, Large H-surfaces via the mountain-pass-lemma, Math. Ann. vol. 270 (1985)
6. ——— Nonuniqueness in the Plateau problem for surfaces of constant mean curvature, Arch. Rational Mech. Anal. vol. 93 (1986)
7. H. Wente, An existence theorem for surfaces of constant mean curvature, J. Math. Anal. Appl. vol. 26 (1969)