数理解析研究所講究録
第 771 巻 1991 年 118-156

2階算術の諸体系
― モデル論的手法による分析 ―

東北大学 教養部 数学科
田中 一之 (Kazuyuki Tanaka)

我々の目的は，2階算術の諸体系の論理的関係を「モデル理論」を手段として分析することである。本文は，以下のように構成されている。

§0. 準備
§1. AC, DC, SP, TI
§2. WKL_0に関するHarringtonの結果
§3. WKL_0に関するFriedmanの結果

§1は，すでによく知られた結果をまとめたものである。§2, 3の結果は未発表のもので，私自身はペンシルバニア州立大でのSimpson教授の講義から学んだ。ここに感謝の意を表する。また，研究代表者の角田法也氏には大変お世話になった。彼の忍耐と努力なしには，この論文集が世に出ることはなかっただろう。最後に，読者諸賢のご意見ご指導を望む。

§0. 準備

2階算術の言語は次の記号からなる：

(i) numerical variables： $a, b, c, \cdots, m, n, \cdots$,

(ii) set variables： $X, Y, Z, \cdots$,

(iii) constant symbols： $0, 1$,

(iv) function symbols： $+, \cdot$,

(v) relation symbols： $=, <, \in$.

numerical variables と constant symbols を + と・及びカッコを使って適当に組合せたものを term と呼ぶ。t_1 と t_2 を terms とするとき，

$$t_1 = t_2, \quad t_1 < t_2, \quad t_1 \in X$$

のような記号列を atomic formulas と呼ぶ。一般の formula は，atomic formulas から $\sim, \vee$ などの命題論理記号と number quantifiers $\forall x, \exists x$ 及び set quantifiers $\forall X, \exists X$ を使って作られる.

formula はその形によって次のように分類される。

(i) atomic formulas から命題論理記号と bounded number quantifiers $\forall x < t, \exists x < t$ だけを使って作られる formula を Π^0_0 formula と呼ぶ。ここで，$\forall x < t$ は $\forall x (x < t \rightarrow \ldots)$，$\exists x < t$ は $\exists x (x < t \wedge \cdots)$ の省略形で，t は x を含まない term，

(ii) set quant. を含まない formula を Π^1_0 又は arithmetical と呼ぶ；

(iii) φがΠ^i_jならば，$\sim\varphi$はΣ^i_j $(i=0,1,\ j\in\omega)$,

(iv) φがΣ^0_jならば，$\forall x_1\cdots\forall x_k\varphi$は$\Pi^0_{j+1}$,

(v) φがΣ^1_jならば，$\forall X_1\cdots\forall X_k\varphi$は$\Pi^1_{j+1}$.

注：上の(i)〜(v)のどれにも属さないformulaが多数ある．

定義0.1. $\mathcal{C}$をformulaの集合として，$\mathcal{C}$-内包公理は次の図式で定義される．

$$(\mathcal{C}\text{-CA}):\ \exists X\,\forall x\,(x\in X\leftrightarrow\varphi(x)),$$

但し，$\varphi\in\mathcal{C}$はXをfree variableとして含まない．

また，Δ^i_j-内包公理は次の図式として定義される．

$$(\Delta^i_j\text{-CA}):\ \forall x\,(\varphi(x)\leftrightarrow\sim\psi(x))\rightarrow\exists X\,\forall x\,(x\in X\leftrightarrow\varphi(x)),$$

但し，$\varphi,\psi\in\Pi^i_j$はXをfreeに含まない．

定義0.2. $\mathcal{C}$-帰納法は次の図式で定義される．

$$\mathcal{C}\text{-ind}:\ \varphi(0)\wedge\forall n\,(\varphi(n)\rightarrow\varphi(n+1))\rightarrow\forall n\,\varphi(n),$$

但し，$\varphi\in\mathcal{C}$.

定義0.3. 再帰的内包公理の体系RCA_0は以下の公理から成る．

(i) 基本算術公理：

$$n+1 \neq 0, \qquad n+1 = m+1 \rightarrow n = m,$$
$$n+0 = n, \qquad n+(m+1) = (n+m)+1,$$
$$n \cdot 0 = 0, \qquad n\cdot(m+1) = n\cdot m + n,$$
$$n < m \leftrightarrow \exists k \neq 0\,(n+k = m).$$

(ii) $(\Delta^0_1\text{-CA})$

(iii) Σ^0_1-ind

注：Δ^0_1の概念が再帰的集合のそれと一致することはShoenfieldなどの教科書を参照．

<u>補題 0.1.</u> $RCA_0 \vdash \Pi^0_1$-ind.

(証明) $\varphi \in \Pi^0_1$として，$\varphi(0)$かつ$\forall x(\varphi(x) \to \varphi(x+1))$と仮定する．いま，$\sim\varphi(a)$とすれば，$\sim\varphi(a-i)$に対して$\Sigma^0_1$-ind on $i \leq a$を用いて，$\sim\varphi(0)$が得られるので矛盾．すなわち，$\forall x\varphi(x)$となる． ☒

<u>補題 0.2.</u> $RCA_0 \vdash$ "Σ^0_1 is closed under bounded quantification".

(証明) $\forall j<t\,\exists_j\,\theta(i,j)$ with $\theta \in \Pi^0_0$を仮定する．$\exists n\,\forall i<m\,\theta(i,(n)_i)$に対して$\Sigma^0_1$-ind on $m \leq t$を用いて，$\exists n\,\forall i<t\,\theta(i,(n)_i)$を得る．☒

<u>補題0.3.</u> $RCA_0 \vdash (\text{finite } \Sigma^0_1\text{-CA}) : \forall n \exists X \forall i \le n\, (i \in X \leftrightarrow \varphi(i)),\ \varphi \in \Sigma^0_1.$

(証明) ある $\varphi\in\Sigma^0_1$ について，$\sim\exists X\forall i\le n(i\in X\leftrightarrow\varphi(i))$ となる n が存在したと仮定する．いま，

$$\psi(k)\equiv \exists S\subseteq\{0,\dots,n\}\{|S|=k\wedge\forall i\in S\,\varphi(i)\}$$

とおくと，補題0.2から ψ は Σ^0_1. $\psi(k)\wedge\sim\psi(k+1)$ ならば，$\exists S\{|S|=k \wedge \forall i\le n\{i\in S\leftrightarrow\varphi(i)\}$ となって仮定に反するから，$\forall k(\psi(k)\to\psi(k+1))$ を得る．$\psi(0)$ は明らかだから，Σ^0_1-ind により $\forall k\,\psi(k)$ となるが，$\psi(n+1)$ となるはずはないから矛盾が出た。従って，$RCA_0 \vdash (\text{finite } \Sigma^0_1\text{-CA})$ が証明された． ☒

注: $RCA_0 - \Sigma^0_1\text{-ind} + \Sigma^0_0\text{-ind} \vdash (\text{finite } \Sigma^0_1\text{-CA}) \to \Sigma^0_1\text{-ind}$. 何故なら，任意の n について，$\forall i\le n(i\in X\leftrightarrow\varphi(i))$ となる X があるから，$i\in X$ に対して Σ^0_0-ind on $i\le n$ を使えばよい。

<u>定義0.4.</u> $\mathcal{C}\text{-CA}_0 \equiv RCA_0 + (\mathcal{C}\text{-CA})$ ($\mathcal{C}=\Sigma^i_j, \Pi^i_j, \Delta^i_j$ など)
特に，$\Pi^1_0\text{-CA}_0$ を算術的内包公理の体系と呼び，ACA_0 と書く。

注: 次のことは直ちにいえる． $\Sigma^i_j\text{-CA}_0 \equiv \Pi^i_j\text{-CA}_0$，$\Sigma^i_j\text{-CA}_0 \vdash \Sigma^i_j\text{-ind}$，$\Sigma^0_1\text{-CA}_0 \equiv \Sigma^0_2\text{-CA}_0 \equiv \cdots \equiv \Sigma^1_0\text{-CA}_0$ (しかし，$\Sigma^1_1\text{-CA}_0 \not\equiv \Sigma^1_2\text{-CA}_0$).

定義 0.5. '無限個の頂点をもつ2分木 $T \subseteq \{0,1\}^*$ は無限の長さの path をもつ' という弱い König の補題を RCA_0 において表現し，それを (WKL) と呼ぶ。そして，$WKL_0 \equiv RCA_0 + (WKL)$ とおく.

注： recursive な infinite path をもたない recursive な infinite tree $T \subseteq \{0,1\}^*$ の発見は Kleene による.

補題 0.4. $RCA_0 \vdash (WKL) \longleftrightarrow \Sigma^0_1$ 分離原理 (Σ^0_1-SP)

(証明) Simpson の Cauchy/Peano の論文 (JSL 49 (1984), 783-802) の Lemma 2.6.

定義 0.6. 算術的超限再帰の公理 (ATR) は次の図式として定義される：任意の Π^0_∞ formula $\varphi(n, X)$，任意の $A \subseteq N$，任意の整列順序 $\prec \subseteq N \times N$ に対し，次の条件を満たす集合 $H \subseteq N$ が存在する，

(i) b が $\prec$ に関して最小のとき，　$(H)_b = A$，

(ii) b が a の $\prec$-successor のとき，　$\forall n\, (n \in (H)_b \longleftrightarrow \varphi(n, (H)_a))$，

(iii) b が $\prec$ における極限のとき，　$\forall a \forall n\, (n \in ((H)_b)_a \longleftrightarrow a \prec b \wedge n \in (H)_a)$.

そして，$ATR_0 \equiv RCA_0 + (ATR)$.

補題 0.5. $RCA_0 \vdash (ATR) \longleftrightarrow \Sigma^1_1$ 分離原理 (Σ^1_1-SP)

(証明) 省略. (non-standard hierarchy method による).

§1. AC, DC, SP, TI

本節では，AC(選択公理)，DC(従属選択)，SP(分離原理)，TI(超限帰納法)及びそれらの公理に基づく様々な体系の強さについて調べる．

<u>定義1.1.</u> $\mathcal{C}$を formula の集合として，

$(\mathcal{C}\text{-AC})$: $\forall x \exists Y \varphi(x,Y) \rightarrow \exists Z \forall x \varphi(x,(Z)_x)$,

但し，$\varphi(x,Y) \in \mathcal{C}$ は Z を free に含まない，

$(\mathcal{C}\text{-DC})$: $\forall x \forall X \exists Y \varphi(x,X,Y) \rightarrow \exists Z \forall x \varphi(x,(Z)_x,(Z)_{x+1})$

但し，$\varphi(x,X,Y) \in \mathcal{C}$ は Z を free に含まない，

$(\mathcal{C}\text{-SP})$: $\forall x(\varphi(x) \rightarrow \sim\psi(x)) \rightarrow \exists X \forall x[(\varphi(x) \rightarrow x \in X) \wedge (x \in X \rightarrow \sim\psi(x))]$

但し，$\varphi(x), \psi(x) \in \mathcal{C}$ は X を free に含まない．

ここで，$(Z)_x = \{z : (z,x) \in Z\}$，そして $(z,x) = (z+x)\cdot(z+x+1)/2 + z$ である．

<u>定義1.2.</u> RCA_0に上の axiom schema の1つ(X)を加えて出来る体系をX_0と書く．

例えば，$\Sigma^1_2\text{-}AC_0 \equiv RCA_0 + (\Sigma^1_2\text{-AC})$。ここで，$\Sigma^1_2$は$\Sigma^1_2$ formula の集合$\mathcal{C}$を意味する．

補題 1.1. (i) Π^1_k-$ACA_0 \equiv \Sigma^1_{k+1}$-$AC_0$, (ii) Π^1_k-$DC_0 \equiv \Sigma^1_{k+1}$-$DC_0$ $(k \geq 0)$.

(証明) (i) $\varphi(x,Y) \equiv \exists W \psi(x,Y,W)$ with $\psi \in \Pi^1_k$ とし，$\forall x \exists Y \varphi(x,Y)$ と仮定する．RCA$_0$ において，$\exists Y \exists W \psi(x,Y,W) \leftrightarrow \exists Y \psi(x,(Y)_0,(Y)_1)$ がいえるので，$\forall x \exists Y \psi(x,(Y)_0,(Y)_1)$ を得る．これに (Π^1_k-AC) を適用すると $\exists Z \forall x \psi(x,((Z)_x)_0,((Z)_x)_1)$，従って $\exists Z \forall x \exists W \psi(x,((Z)_x)_0,W)$ $\equiv \exists Z \forall x \varphi(x,((Z)_x)_0)$ を得る．RCA$_0$ において，Z から $((Z)_x)_0 = (Z')_x$ となる Z' が容易に定義できるので，$\exists Z' \forall x \varphi(x,(Z')_x)$ となって，(Σ^1_{k+1}-AC) が Π^1_k-AC$_0$ で証明された．(ii) も同様．⊠

補題 1.2. Δ^1_k-$CA_0 \overset{(i)}{\subseteq} \Pi^1_k$-$SP_0 \overset{(ii)}{\subseteq} \Sigma^1_k$-$AC_0 \overset{(iii)}{\subseteq} \Sigma^1_k$-$DC_0$ $(k \geq 0)$.

(証明) (i) (Π^1_k-SP) の図式の前提部分 $\forall x(\varphi(x) \rightarrow \sim\psi(x))$ を $\forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \sim\psi(x))$ に置き換えたものが (Δ^1_k-CA) であるから明らか．

(ii) $\varphi(x), \psi(x) \in \Pi^1_k$ で，$\forall x(\neg\varphi(x) \vee \neg\psi(x))$ と仮定する．いま，

$$\theta(x,Y) \equiv \neg\varphi(x) \wedge 0 \in Y \vee \neg\psi(x) \wedge 0 \notin Y$$

とおくと，$\forall x \exists Y \theta(x,Y)$。($\Sigma^1_k$-AC) より $\forall x \theta(x,(W)_x)$ となる W が存在し，$X = \{x : 0 \in (W)_x\}$ とおけばこれが φ と ψ を分離する．

(iii) (Σ^1_k-DC) の図式において，$\varphi(x,X,Y)$ が X に依存しないものだけを考えれば (Σ^1_k-AC) になる．⊠

補題 1.3. Σ_k^1-$DC_0 \vdash \Sigma_k^1$-ind.

(証明) $\varphi(x) \equiv \exists X\, \theta(x, X)$ with $\theta \in \Pi_{k-1}^1$ とし，$\varphi(0)$ かつ $\forall x\, (\varphi(x) \to \varphi(x+1))$ と仮定する．いま，

$$\psi(x, X, Y) \equiv \{x=0 \wedge \theta(x, Y)\} \vee \{x>0 \wedge (\theta(x-1, X) \to \theta(x, Y))\}$$

とおくと，仮定から $\forall x\, \forall X\, \exists Y\, \psi(x, X, Y)$ である．ψ は Σ_k^1 だから，(Σ_k^1-DC) によって $\forall x\, \psi((Z)_x, (Z)_{x+1})$ となる Z が存在する．そこで，Σ_k^1-$DC_0 \vdash (\Delta_k^1$-CA) により，$W = \{n : \theta(n, (Z)_{n+1})\}$ が存在する．あとは，Σ_0^0-ind により $\forall x\ x \in W$ がいえるので，$\forall x\, \varphi(x)$ が成立する．☒

命題 1.4. (近藤-Addison) $\forall \varphi(Y) \in \Pi_1^1$ (or Σ_2^1) $\exists \varphi^*(Y) \in \Pi_1^1$ (or Σ_2^1) 次のことが Π_1^1-CA_0 で証明できる：

(i) $\forall Y\, (\varphi^*(Y) \to \varphi(Y))$,

(ii) $\exists Y \varphi(Y) \to \exists Y \varphi^*(Y)$,

(iii) $\forall Y, Z\, (\varphi^*(Y) \wedge \varphi^*(Z) \to Y = Z)$.

証明は，Shoenfield や Rogers などの標準的な教科書を参照されたい．Addison の証明は Π_1^1-CA_0 でそのまま行える．

定理 1.5. Δ^1_2-$CA_0 \equiv \Pi^1_2$-$SP_0 \equiv \Sigma^1_2$-AC_0

(証明) 補題1.2により，Δ^1_2-$CA_0 \vdash (\Sigma^1_2$-$AC)$を示せば十分．そこで，$\forall x \exists Y \varphi(x, Y)$，$\varphi \in \Sigma^1_2$と仮定する．命題1.4により，$\varphi$をuniformizeする$\Sigma^1_2$ formula φ^*が存在する．いま，

$$\psi_1(i, x) \equiv \exists Y(\varphi^*(x, Y) \wedge i \in Y),$$
$$\psi_2(i, x) \equiv \forall Y(\varphi^*(x, Y) \rightarrow i \in Y)$$

とおくと，$\psi_1 \leftrightarrow \psi_2$だから，$(\Delta^1_2$-$CA)$より $Z = \{(i, x) : \psi_1(i, x)\}$が存在する．そして，$\forall x \varphi^*(x, (Z)_x)$，すなわち $\forall x \varphi(x, (Z)_x)$を得る．☒

定理 1.6. Δ^1_2-$CA_0 + \Sigma^1_2$-ind $\equiv \Sigma^1_2$-DC_0

(証明) 補題1.2及び1.3から，Δ^1_2-$CA_0 + \Sigma^1_2$-ind $\subseteq \Sigma^1_2$-DC_0である．逆を示すために，$\forall x \forall X \exists Y \varphi(x, X, Y)$，$\varphi \in \Sigma^1_2$，と仮定する．命題1.4により，$\varphi^*$ uniformizes φとする．そして，

$$\psi(x, W) \equiv (W)_0 = \phi \wedge \forall y < x\ \varphi^*(y, (W)_y, (W)_{y+1})$$

とおく。$(\Sigma^1_2$-$AC)$によりψはΣ^1_2 formulaに書き直せるから，Σ^1_2-indから$\forall n \exists W \psi(n, W)$を得る．そこで，

$$\psi_1(i,x) \equiv \exists W(\varphi(x,W) \wedge i \in W),$$
$$\psi_2(i,x) \equiv \forall W(\varphi(x,W) \to i \in W)$$

とおくと，$\psi_1 \leftrightarrow \psi_2$ だから，$(\Delta^1_2\text{-CA})$ より $Z = \{(i,x) : \psi_1(i,x)\}$ が存在する．そして，$\forall x\, \varphi(x, (Z)_x, (Z)_{x+1})$ を得る． ⊠

注： $\Delta^1_2\text{-CA}_0 \vdash \Sigma^1_2\text{-ind}$ である（後述）．

<u>定義1.3.</u> "X が自然数上の整列順序である" という述語を $WO(X)$ で表わし，$(i,j) \in X$ を $i <_X j$ と書く．このとき，

$$(\mathcal{C}\text{-TI}) : \forall X\,(WO(X) \to (\forall j\,(\forall i <_X j\, \varphi(i) \to \varphi(j)) \to \forall j\, \varphi(j)))$$

但し，$\varphi(i) \in \mathcal{C}$。

そして，$\mathcal{C}\text{-TI}_0 \equiv ACA_0 + (\mathcal{C}\text{-TI})$ とおく．

<u>定義1.4.</u> 2階算術の構造 $(M, S, +, \cdot, \cdots)$ が <u>ω-model</u> iff $M = \omega$.
ω-model $(\omega, S, +, \cdot, \cdots)$ が <u>β-model</u> iff

$$\forall \sigma \in \Sigma^1_1\ (S\text{の要素をパラメタとして含む})\ \sigma \Rightarrow \mathfrak{M} \models \sigma$$

[または
$$\forall \sigma \in \Pi^1_1\ (\qquad \text{〃} \qquad)\ \mathfrak{M} \models \sigma \Rightarrow \sigma\ ]$$

補題1.7. (i) 任意の ω-model $\models \Sigma^1_\infty$-ind.

(ii) 任意の β-model $\models (\Sigma^1_\infty\text{-TI})$.

(証明) (i) $\mathcal{M}$を任意のω-model, $\varphi(x)$を任意のformulaとし, $\mathcal{M} \models \varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \to \varphi(x+1))$と仮定する. すると, $M^{\mathcal{M}}(0)$かつ $\forall n \in \omega (\varphi^{\mathcal{M}}(n) \Rightarrow \varphi^{\mathcal{M}}(n+1))$だから, $\forall n \in \omega\, \varphi^{\mathcal{M}}(n)$ よって $\mathcal{M} \models \forall x\, \varphi(x)$.

(ii) $\mathcal{M}$がβ-modelなら, $\mathcal{M} \models WO(B) \Rightarrow WO(B)$となることに注意し, (i)と同様に $\forall n \in \omega\, \varphi^{\mathcal{M}}(n)$を示す. ☒

補題1.8. 任意のβ-model $\models ATR_0$

(証明) $\mathcal{M}$をβ-model, $\sigma \equiv \exists X \psi(X)$ with $\psi(X) \in \Pi^1_1$とする.

$$\mathcal{M} \models \sigma \Rightarrow \exists B\ \mathcal{M} \models \psi(B) \Rightarrow \exists B \psi(B) \Rightarrow \sigma$$

だから, 逆に真なるΠ^1_2 formulaはすべて$\mathcal{M}$で成り立つ。ATR_0はΠ^1_2 formulaで書けるから, $\mathcal{M}$で成り立つ. ☒

補題1.9. $\Pi^1_1\text{-}CA_0 \vdash$ 可算β-modelが存在する.

(証明) $\varphi(e, X, Y)$をuniversal Σ^1_1 predicateとする. $S = \{X_n\}$を帰納的に定義する. $X^{<n} = \{(i,j) : i < n, j \in X_i\}$とおき, $\exists Y \varphi(e, X^{<n}, Y)$とする.

Gandy の basis theorem から，$\varphi(e, X^{<n}, Y)$ かつ $\mathcal{O}^Y \equiv_h \mathcal{O}^{X^{<n}}$ となる Y が存在し，それを $X_{(e,n)}$ とおく。すると，すべての n について $\mathcal{O}^{X_n} \equiv_h \mathcal{O}$ が示せるから $S = \{X_n\}$ は Π^1_1-CA_0 で存在し，また明らかに (ω, S) は β-model.

<u>系 1.10.</u> $ATR_0 + (\Sigma^1_\infty$-$TI) \not\vdash \Pi^1_1$-CA_0

(証明)　補題 1.7－9 より，Π^1_1-$CA_0 \vdash Con(ATR_0 + \Sigma^1_\infty$-$TI)$. 従って，$ATR_0 + \Sigma^1_\infty$-$TI \vdash \Pi^1_1$-$CA_0$ は Gödel の不完全性定理に反す．　☒

注：　Σ^1_n-ind と Π^1_n-ind は同値だが，$(\Sigma^1_n$-$TI)$ と $(\Pi^1_n$-$TI)$ は異なる。
(cf. 定理 1.11－12，補題 1.13)

<u>定理 1.11</u> (Simpson).　Σ^1_1-$TI_0 \equiv ATR_0 + \Sigma^1_1$-ind.

(証明のアイデア)　$\subseteq$：$(\Sigma^1_1$-$TI)$ を否定し，矛盾を導く。$WO(X)$ とし，ある Π^1_1 formula φ について，$\exists m \varphi(m)$ かつ $\forall m (\varphi(m) \to \exists n <_X m\, \varphi(n))$ と仮定する．ATR_0 では，Π^1_1-uniformization for numbers が証明できる（Π^1_1 set は well-ordering のコードの集合と考えられ，ATR_0 では well-ordering の比較ができる）から，ある Π^1_1 formula $\psi(m, n)$ が存在して，

$$\varphi(m) \longrightarrow \exists n!\, \psi(m, n),$$

$$\psi(m, n) \longrightarrow n <_X m \wedge \varphi(n).$$

$\varphi(m)$ となる m を固定し，Π^1_1-ind ($\leftrightarrow \Sigma^1_1$-ind) を用いて，

$$\forall k\, \exists! \sigma \left[\sigma(0)=m \wedge \forall i<k\, \psi(\sigma(i), \sigma(i+1)) \right]$$

がいえる．$(\Delta^1_1\text{-}CA)$ により

$$f(0)=m \wedge \forall i\, \psi(f(i), f(i+1))$$

となる f が存在する．すなわち，$\forall i\ f(i+1) <_X f(i)$ であるから，$WO(X)$ と矛盾する．

$\supseteq$：$\varphi(j)$ を "hyperarith. hierarchy が $<_X$ に沿って j まで存在する" という命題にする．$\varphi(j)$ は Σ^1_1 で，$<_X$ に沿っての各 step は ACA_0 で証明できるから，Σ^1_1-TI_0 において $\forall j\, \varphi(j)$，すなわち (ATR) が成り立つ．$\boxtimes$

注：　$ATR_0 \nvdash \Sigma^1_1$-ind　（後述）．

<u>定理 1.12</u> (Howard-Kreisel)　$\Pi^1_1\text{-}TI_0 \equiv \Sigma^1_1\text{-}DC_0$

（証明の概略）$\subseteq$：$\varphi(n) \equiv \exists X\, \theta(n,X)$ with $\theta \in \Pi^0_0$ として，

$$\forall n\, (\varphi(n) \rightarrow \exists m <_X n\ \varphi(m))\text{，すなわち}$$
$$\forall n\, \forall X\, \exists m\, \exists Y\, (m <_X n \wedge (\theta(n,X) \rightarrow \theta(m,Y)))$$

と仮定すると，$(\Sigma^1_1\text{-}DC)$ から $\sim\theta(X)$．よって $(\Pi^1_1\text{-}TI)$ の対偶が示された．

⊇: $\forall f \exists g \forall n\, \theta(f\lceil n, g\lceil n) \to \exists h \forall k \forall n\, \theta(h_k\lceil n, h_{k+1}\lceil n)$ with $\theta \in \Pi^0_0$

を示せばよい。いま，tree $T\ (\subseteq \omega^{<\omega})$ を下のように定義する：

$$T = \{t : \forall k < lh(t)\ \forall n \le \min(lh(t_k), lh(t_{k+1}))\ \theta(t_k\lceil n, t_{k+1}\lceil n)\}.$$

h が T の infinite path なら，$\forall k \forall n\, \theta(h_k\lceil n, h_{k+1}\lceil n)$ となるから，その結論を否定し，T が well-founded と仮定する。ここで，

$$t \in T \text{ が good} \iff \exists h \forall k < lh(t) \forall n\, \theta(h_k\lceil n, h_{k+1}\lceil n) \,\&\, h\lceil lh(t) = t$$

と定義する。明らかに，空列は good である．また，$\forall f \exists g \forall n\, \theta$ の仮定から，good sequence は good extension（T の Kleene-Brouwer ordering においてはより小さな sequence）をもつ。goodness は Σ^1_1 述語だから，(Π^1_1-TI) より T は（K. B. ordering に関して）well-ordered でない。すなわち，矛盾が得られた。 ⊠

<u>補題 1.13.</u> Σ^1_1-$DC_0 + \Sigma^1_\infty$-ind $\nvdash ATR_0$，　$ATR_0 + \Sigma^1_\infty$-ind $\nvdash \Sigma^1_1$-DC_0．

（証明）前半は，$(\omega, HYP) \models \Sigma^1_1$-$DC_0 + \Sigma^1_\infty$-ind $+ \neg ATR_0$ より明らか．$\sigma \equiv \forall X \exists Y\, \theta(X, Y)$ with $\theta \in \Pi^1_0$ として σ の成立を仮定する．(Σ^1_1-DC) により $\forall n\, \theta((Z)_n, (Z)_{n+1})$ となる $Z = \{(Z)_n\}$ が存在して，$(\omega, Z) \models \sigma$．また $\varphi \in \Sigma^1_\infty$ に対して，φ^Z は Σ^1_0 in Z だから，$(\omega, Z) \models \Sigma^1_\infty$-ind が Σ^1_1-DC_0 で証明できる．従って，Σ^1_1-$DC_0 + \sigma \vdash Con(\sigma + \Sigma^1_\infty$-ind$)$．いま，$\sigma = (ATR)$ とすれば，$ATR_0 + \Sigma^1_\infty$-ind $\vdash \Sigma^1_1$-DC_0 は Gödel の不完全性定理に反す． ⊠

次の目標は，Σ^1_1-AC_0がACA_0のΠ^1_2-保存的拡大になるというBarwise-Schlipfの結果を紹介することであるが，その為に多少の準備が必要である．

<u>定義1.5.</u> Lを可算個の記号からなる1階の言語とする．Lにおける可算構造$\mathfrak{M}$が recursively saturated $\Leftrightarrow$ 任意のformulasのrec.集合$\{\varphi_i(x, v_1, \cdots, v_k)\}$に対して，

$$\forall b_1 \cdots b_k \in M \, [\, \forall j \, \exists a \in M \, \forall i \leq j \; \mathfrak{M} \models \varphi_i(a, b_1, \cdots, b_k) \rightarrow \exists a \in M \, \forall i \; \mathfrak{M} \models \varphi_i(a, b_1, \cdots, b_k) \,].$$

<u>命題1.14.</u> 可算言語Lにおける無矛盾な文の集合は，rec. sat.な可算モデルをもつ．

(証明) 可算言語における無矛盾な集合は，可算モデル$\mathfrak{M}_0$をもつ．いま，

$$S_1 = \text{elementary digram of } \mathfrak{M}_0 \;\; (\mathfrak{M}_0\text{で成立するformula全体})$$
$$\cup \{ \exists x \bigwedge_{i<j} \varphi_i(x, b_1, \cdots, b_k) \rightarrow \bigwedge_{i<j} \varphi_i(c_{(\Phi, b_1, \cdots, b_k)}, b_1, \cdots, b_k) :$$
$$\Phi = \{\varphi_i(x, v_1, \cdots, v_k)\} \text{ は rec.}, \quad b_1, \cdots, b_k \in M$$
$$c_{(\Phi, b_1, \cdots, b_k)} \text{ は新しい定数記号} \}$$

とおくと，コンパクト性定理から S_1 は可算 model $\mathfrak{M}_1 \succ \mathfrak{M}_0$ をもつ。そして，$\mathfrak{M}_0$ で *finitely satisfiable* な 1-type $\{\varphi_i(x, b_1, \cdots, b_k)\}$ は $\mathfrak{M}_1$ で *satisfiable* になる。同様に，$\mathfrak{M}_1$ から $\mathfrak{M}_2$，$\mathfrak{M}_2$ から $\mathfrak{M}_3$，… を作って，$\mathfrak{M} = \bigcup_n \mathfrak{M}_n$ が求めるものとなる． ☒

Lを1階算術の言語とし，これに可算個の1変数述語記号（又は集合定数記号）$A_1, A_2, \cdots$ を加えた言語を $L(\bar{A})$ で表わす。$L(\bar{A})$ の構造 $(M, \bar{A}^M) = (M, A_1^M, A_2^M, \cdots)$ が与えられたとき，

$$(A_n^M)_b = \{a \in M : (M, \bar{A}^M) \models (a, b) \in A_n\}$$

と定め，そして

$$S_M = \{(A_n^M)_b : n \in \mathbb{N},\ b \in M\}$$

とおく。

<u>補題 1.15.</u> $\varphi(e, m, X)$ を *universal* Σ_i^0 *formula* とする．そして $(M, \bar{A}^M)$ を 基本算術公理，Σ_i^0-ind，及びすべての $n \in \mathbb{N}$ について

$$(*) \qquad \forall e\, \exists j\, \forall m\, (\varphi(e, m, A_n) \longleftrightarrow m \in (A_{n+1})_j)$$

の rec. sat. モデルとすれば，$(M, S_M) \models \Sigma_1^1\text{-}AC_0$．

注：定理1.16のためには，(*)において $j=e$ の場合を考えれば十分．この形は定理1.17で必要となる．

(証明) 上の補題の条件の下で $(M,S_M)\models ACA_0$ は容易にわかる．あとは，$(M,S_M)\models(\Pi^1_0\text{-}AC)$ をいえば十分(補題1.1)。いま，(M,S_M) において，$\forall x\,\exists Y\,\theta(x,Y)$ with $\theta\in\Pi^1_0$ が成立すると仮定する．このとき，$(M,\bar{A}^M)\models\forall x\,\exists y\,\theta(x,(A_n)_y)$ となる n が存在する。そうでないと，$\{\sim\exists y\,\theta(x,(A_n)_y): n\in N\}$ は finite sat. だから sat. になり，ある $a\in M$ に対して，

$$(M,\bar{A}^M)\models\sim\exists y\,\theta(a,(A_n)_y)\qquad \text{for all } n\in N$$

よって，$(M,S_M)\models\sim\exists Y\,\theta(a,Y)$ となり，最初の仮定に反する．

さてそこで，$(M,S_M)\models\exists W\,\forall x\,\exists y\,\theta(x,(W)_y)$ となる。最後に $(M,S_M)\models ACA_0$ から，$(M,S_M)\models\exists Y\,\forall x\,\theta(x,(Y)_x)$ が容易に得られる．よって，$(M,S_M)\models\Sigma^1_1\text{-}AC_0$ が示された． ⊠

<u>定理1.16</u> (Barwise-Schlipf). $\forall\sigma\in\Pi^1_2\quad \Sigma^1_2\text{-}AC_0\vdash\sigma\Rightarrow ACA_0\vdash\sigma$.

(証明) $\sigma\equiv\forall X\,\exists Y\,\theta(X,Y)$ with $\theta\in\Pi^1_0$ とし，$ACA_0\nvdash\sigma$ と仮定する。Gödelの完全性定理から，$(M,S)\models ACA_0+\sim\sigma$ となるモデル (M,S) がある．いま，$(M,S)\models\sim\exists Y\,\theta(A^M_0,Y)$ となる $A^M_0\in S$ を

選ぶ。$(M,S)\models ACA_0$だから，各$n\in N$に対して帰納的に，

$$(M,S)\models \forall e\,\forall m\,(\varphi(e,m,A_n^M)\longleftrightarrow m\in(A_{n+1}^M)_e)$$

となる$A_{n+1}^M\in S$が選べる．こうして作られる$(M,\bar{A}^M)$は基本算術公理，Σ_1^0-ind，$\forall e\,\forall m\,(\varphi(e,m,A_n)\longleftrightarrow m\in(A_{n+1})_e)$ $(n\in\mathbb{N})$，$\sim\exists y\,\theta(A_0,(A_n)_y)$ $(n\in\mathbb{N})$ のモデルになるから，これらのformulaの集合は無矛盾であり，命題1.14よりそのrec. sat.な可算モデル$(\tilde{M},\bar{A}^{\tilde{M}})$が存在する．補題1.15のように$S_{\tilde{M}}$を定義すれば，

$$(\tilde{M},S_{\tilde{M}})\models \Sigma_1^1\text{-}AC_0+\sim\exists Y\,\theta(A_0^{\tilde{M}},Y).$$

よって，Σ_1^1-$AC_0+\neg\sigma$は無矛盾となり，Σ_1^1-$AC_0\nvdash\sigma$を得る．☒

次の補題は，上の定理の証明と類似の方法で示される．

<u>補題1.17.</u> Σ_1^1-$AC_0+\Sigma_1^1$-ind $\vdash\forall\sigma\in\Pi_3^1$(“$\Sigma_1^1$-$AC_0\vdash\sigma$”$\to$“$\sigma$ is true”).

(証明) $\sigma\equiv\forall X\,\exists Y\,\forall Z\,\theta(X,Y,Z)$ with $\theta\in\Pi_0^1$ とし，σがtrueでないと仮定する．すなわち，$A_0\subseteq\mathbb{N}$が存在して，$\forall Y\,\exists Z\sim\theta(A_0,Y,Z)$．さて，$\varphi(e,m,X)$をuniversal Σ_1^1として，

$$\begin{aligned}\psi(X,Y,Z)\equiv\ &\forall e\,\exists j\,\forall m\,(\varphi(e,m,Y)\leftrightarrow m\in(Z)_j)\\ &\wedge\forall i\,\exists j\sim\theta(X,(Y)_i,(Z)_j)\end{aligned}$$

とおく。そして，基本算術公理，Σ^0_1-ind 及び $\psi(A_0, A_n, A_{n+1})$ $(n \in \mathbb{N})$ が矛盾になることを Σ^1_1-$AC_0 + \Sigma^1_1$-ind の下で示す．それらが無矛盾なら，命題1.14より rec. sat. な可算モデル$(\tilde{M}, \bar{A}^{\tilde{M}})$が存在し，補題1.15より $(\tilde{M}, S_{\tilde{M}}) \models \Sigma^1_1$-$AC_0$ また $(\tilde{M}, S_{\tilde{M}}) \models \sim\sigma$ は明らかで Σ^1_1-$AC \nvdash \sigma$ を得る．このとき，命題1.14と補題1.15が ACA_0で証明できることに注意する．

さて，$\forall Y \exists Z \sim\theta(A_0, Y, Z)$ から $\forall Y\, \forall i\, \exists Z \sim\theta(A_0, (Y)_i, Z)$ がまずいえる．そこで，(Σ^1_1-AC) により $\forall Y \exists Z \forall i \sim\theta(A_0, (Y)_i, (Z)_i)$. そして，($\Pi^0_0$-CA) を使えば $\forall Y \exists Z\, \psi(A_0, Y, Z)$ が得られる。最後に，Σ^1_1-ind により，

$$\forall n\, \exists W\, ((W)_0 = A_0 \wedge (\forall i < n)\, \psi(A_0, (W)_i, (W)_{i+1}))$$

を得る．すると，基本算術公理，Σ^0_1-ind 及び $\psi(A_0, A_i, A_{i+1})$ $(i < n)$ は無矛盾であり，n は任意だから全体が無矛盾になる．以上で，証明が完了した．　☒

<u>定理1.18.</u>　$ATR_0 \nvdash \Sigma^1_1$-ind.

(証明)　$ATR_0 + \Sigma^1_1$-ind $\vdash \sim Con(ATR_0) \rightarrow$ "Σ^1_1-$AC_0 \vdash \sim(ATR)$" $\rightarrow \sim(ATR)$ (by補題1.17)．よって，$ATR_0 + \Sigma^1_1$-ind $\vdash Con(ATR_0)$．$ATR_0 \vdash \Sigma^1_1$-ind は Gödel の不完全性定理と矛盾する．　☒

証明は省くが，定理 1.16, 18 の自然な拡張として，次のことがいえる： $\forall\sigma\in\Pi^1_3\ \ \Sigma^1_2\text{-AC}_0\vdash\sigma\Rightarrow\Pi^1_1\text{-CA}_0\vdash\sigma$ (Feferman), $\Sigma^1_2\text{-AC}_0\nvdash\Sigma^1_2\text{-ind}.$

まとめ

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\Pi^1_2\text{-CA}_0 \arrow[r, shift left, leftarrow, "1.2"] \arrow[r, shift right, "?"'] \arrow[drrrr, bend right=10] & \Sigma^1_2\text{-SP}_0 & & & \\
\Delta^1_2\text{-CA}_0 \arrow[r, phantom, "\overset{1.5}{\equiv}"] \arrow[d, shift right, "\square"'] \arrow[d, shift left, leftarrow, "\square"] & \Pi^1_2\text{-SP}_0 \arrow[r, phantom, "\overset{1.5}{\equiv}"] & \Sigma^1_2\text{-AC}_0 \arrow[r, shift left, leftarrow, "\square"] \arrow[r, shift right, "/"'] & \Sigma^1_2\text{-AC}_0+\Sigma^1_2\text{-ind} \arrow[r, phantom, "\overset{1.6}{\equiv}"] & \Sigma^1_2\text{-DC}_0 \\
\Pi^1_1\text{-CA}_0 \arrow[ddrrr, bend right=10] \arrow[ddrrrr, bend right=10] & & & & \\
 & & & \Sigma^1_1\text{-TI}_0 \arrow[d, phantom, "\equiv\ 1.11"] & \\
\text{ATR}_0 \arrow[r, phantom, "\overset{0.5}{\equiv}"] \arrow[drr, bend right=10] & \Sigma^1_1\text{-SP}_0 \arrow[rr, shift left, leftarrow, "\square"] \arrow[rr, shift right, "/\ 1.18"'] & & \text{ATR}_0+\Sigma^1_1\text{-ind} \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left, leftarrow, "1.13"] \arrow[dr, shift left, "/\ 1.13"] \arrow[dr, shift right, leftarrow, "1.13"'] & \\
\Delta^1_1\text{-CA}_0 \arrow[r, shift left, leftarrow, "1.2"] \arrow[r, shift right, "?"'] \arrow[rr, bend right=20, "/"'] \arrow[d, shift right, "\square"'] \arrow[d, shift left, leftarrow, "\square"] & \Pi^1_1\text{-SP}_0 \arrow[r, shift left, leftarrow, "1.2"] \arrow[r, shift right, "?"'] & \Sigma^1_1\text{-AC}_0 \arrow[r, shift left, leftarrow, "\square"] \arrow[r, shift right, "/\ 1.18"'] & \Sigma^1_1\text{-AC}_0+\Sigma^1_1\text{-ind} \arrow[r, shift left, leftarrow, "{1.2, 1.13}"] \arrow[r, shift right, "/\ 1.13"'] & \Sigma^1_1\text{-DC}_0 \arrow[d, phantom, "\equiv\ 1.12"] \\
\text{ACA}_0 \arrow[r, phantom, "\overset{\square}{\equiv}"] \arrow[d, shift right, "\square"'] \arrow[d, shift left, leftarrow] & \Pi^1_0\text{-SP}_0 & & & \Pi^1_1\text{-TI}_0 \\
\text{WKL}_0 \arrow[r, phantom, "\overset{0.4}{\equiv}"] \arrow[d, shift right, "\square"'] \arrow[d, shift left, leftarrow] & \Sigma^0_1\text{-SP}_0 & & & \\
\Delta^0_1\text{-CA}_0 \arrow[r, phantom, "\overset{\square}{\equiv}"] & \Pi^0_1\text{-SP}_0 & & &
\end{tikzcd}
$$

注：矢印の上（又は近く）の番号は，それを扱った定理の番号である．□は自明な関係を示す．？は，成立するか否か筆者が知らないもの．

§2. WKL_0に関するHarringtonの結果

本節では，WKL_0がRCA_0のΠ^1_1-保存的拡大になるというHarringtonの結果を紹介する。証明に入る前に，そこで用いられるforcingの技法の基本を復習しておく。

半順序集合$(P,<)$を任意に固定し，$p, q, r, \cdots$でPの元を表わす。

__定義2.1.__ $G \subseteq P$は<u>open</u> iff $q < p \in P \Rightarrow q \in P$.

記法: $[p] = \{q \in P : q \leq p\}$.

注: open set Gは$\bigcup_{p \in G}[p]$と一致するから，$\{[p] : p \in P\}$はopen baseを形成する。

__定義2.2.__ $D \subseteq P$は<u>dense</u> iff $\forall p \ [p] \cap D \neq \emptyset$

(すなわち, iff $\forall p \ \exists d \in D \ d \leq p$).

__定義2.3.__ $F \subseteq P$は<u>(強)filter</u> iff i) $q > p \in F \Rightarrow q \in F$,

ii) $\forall p, q \in F \ [p] \cap [q] \cap F \neq \emptyset$.

__定義2.4.__ filter Gが<u>M-generic</u> iff $\forall D \in M (D \subseteq P \text{ dense} \Rightarrow G \cap D \neq \emptyset)$.

命題2.1.(Generic Existence Thm.) M が P の dense subset を高々可算個しか含まないとき，任意 $p \in P$ に対し，p を要素とする M-generic filter G が存在する。

(証明) M に含まれる P の dense subsets を並べ上げ，$D_0, D_1, \cdots, D_i, \cdots$ $(i \in \omega)$ とする。$p \in P$ が任意に与えられたとし，P の要素の減少列 $p_0 \geq p_1 \geq \cdots$ を次のように作る：まず $p_0 = p$ とおき，各 $n > 0$ に対しては $p_n \in [p_{n-1}] \cap D_{n-1}$ となる元 p_n を選ぶ。そして，$G = \{q : \exists i \ p_i \leq q\}$ とおけば，明らかに $p \in G$ かつ G は M-gereric filter である。 ⊠

Digression： M を ZFC の可算推移的モデル，$(P, <) \in M$ かつ P は最大元 1_P をもつとする。G を M-gereric filter とすれば，一般に $G \notin M$ である。いま，各 $a \in M$ に対して帰納的に $a^G \equiv \{b^G : \exists p \in G \ \langle b, p \rangle \in a\}$ と定め，$M[G] \equiv \{a^G : a \in M\}$ とおく。M の中で $M[G]$ について直接議論することは出来ないが，

$$p \Vdash \varphi(a_1, \cdots, a_n) \ \text{ iff } \ \text{for every generic } G \ni p,\ M[G] \models \varphi(a_1^G, \cdots, a_n^G)$$

によって $\Vdash$ の関係を導入すると，驚くべきことに $\Vdash$ は M で定義可能である (Definability Lem.)．さらに，任意の generic filter G について，

$$M[G] \models \varphi(a_1^G, \cdots, a_n^G) \ \text{ iff } \ \exists p \in G \ \ p \Vdash \varphi(a_1, \cdots, a_n) \quad \text{(Truth Lem.)}$$

が成立するので，$M[G] \models \sigma$ を示すにはある $p \in G$ に対して $p \Vdash \sigma$ をいえばよく，$p \Vdash \sigma$ は M の中で直接扱えることがポイントである。 ⊠

さて，Harringtonの証明に入る．まず，$\mathfrak{M}=(M,S)$ を RCA_0 の可算モデルとする．ここで，Mは non-standardな元を含めた自然数の集合で，$S \subseteq \mathcal{P}(M)$ とする。そして，

$$P=\{T\in S : \mathfrak{M}\models T \text{ is an infinite subtree of } \{0,1\}^{<\omega}\}$$

とおき，さらに

$$T_1 \leq T_2 \quad \text{iff} \quad T_1 \subseteq T_2$$

によって，Pに半順序を入れる。このとき，

$$D\subseteq P \text{ は } \underline{\textit{dense}} \quad \text{iff} \quad \forall T\in P\ \exists T'\in D\ T'\subseteq T$$

となる。

<u>定義 2.5.</u> $\mathcal{X}\subseteq P$ が <u>$\mathfrak{M}$-definable</u>，$\mathcal{X}\in Def(\mathfrak{M})$ iff ある formula $\varphi(X)$（$M\cup S$ の要素をパラメタとして含んでよい）が存在して，

$$\mathcal{X}=\{T\in P : \mathfrak{M}\models\varphi(T)\}.$$

<u>補題 2.2.</u> $F\subseteq P$ が $Def(\mathfrak{M})$-generic filterならば，すべての $T\in F$ は共通の infinite path $G=\cap F$ をもつ．（すなわち，TはGで生成される principal filter（$\subseteq\mathcal{P}(M)$）に含まれる．一般に $G\in P$ ではない．）

(証明)　任意の $l \in M$ に対し，$E_l = \{T \in P : \exists s \in \{0,1\}^l\ T \subseteq s^\frown\{0,1\}^{<\omega}\}$ は dense かつ $\mathcal{M}$-definable である．F を $Def(\mathcal{M})$-generic filter とすれば，各 l に対し，

$$T_l \subseteq s_l{}^\frown\{0,1\}^{<\omega} \text{ for some } s_l \in \{0,1\}^l$$

となる $T_l \in F$ がある。$l < l'$ ならば，s_l は $s_{l'}$ の initial segment でかつ $s_{l'} \in T_l$ となる。そうでないと，$[T_l] \cap [T_{l'}] = \phi$ となって，F の filter 条件を崩す。そこで，$G = \bigcup_{l \in M} s_l$ とおけば $G = \bigcap_l T_l$ である。最後に，$G = \bigcap F$ をいう。$G \notin T \in F$ ならば，$s_l \notin T$ となる l が存在し，$[T] \cap [T_l] = \phi$ となって矛盾する．　⊠

<u>定義 2.6.</u>　$G\ (\subseteq M)$ が $\mathcal{M}$-generic path iff $\forall$dense $D \in Def(\mathcal{M})\ \exists T \in D$ G は T の infinite path である.

<u>補題 2.3.</u>　すべての $T \in P$ は，$\mathcal{M}$-generic path G をもつ．

(証明)　$Def(\mathcal{M})$ は可算集合だから，命題 2.1 よりすべての T はある $Def(\mathcal{M})$-generic filter F に含まれる。さらに，補題 2.2 により F の tree には共通の path G が存在する。この G が $\mathcal{M}$-generic path になることは定義から明らか．　⊠

補題2.4. Gを$\mathfrak{M}$-generic pathとすれば，$(M, S\cup\{G\}) \models \Sigma^0_1$-ind.

(証明) $\varphi(i, X)$を任意のΣ^0_1 formulaとし，$\varphi(0, G)$かつ$\forall n(\varphi(n, G) \to \varphi(n+1, G))$を仮定する．$b\in M$を任意に選び，$\varphi(b, G)$を示せばよい。$X = \{a \le_M b : \varphi(a, G)\} \in S$がいえれば，$\mathfrak{M} \models (\Delta^0_1\text{-}CA)$より$Y = \{a : a\in X \vee a >_M b\} \in S$。そして，$0 \in Y$かつ$\forall m(m\in Y \to m+1 \in Y)$は明らかだから，$\mathfrak{M}\models \Sigma^0_1$-indより$Y = M$，よって$b \in X$，つまり$\varphi(b, G)$を得る．従って，あとは$X\in S$を示せば十分。

いま$\varphi(i, X) \equiv \exists j\, \theta(i, X\restriction j)$，$\theta \in \Sigma^0_0$，として，

$$D_b \equiv \{T \in P : \mathfrak{M} \models \forall a \le b \quad ① \ \forall t\in T \sim\theta(a, t) \quad \vee$$
$$② \ \exists k\, \forall t \in T\cap\{0,1\}^k \exists s \subseteq t\, \theta(a, s)\}$$

とおく。もちろんD_bは$\mathfrak{M}$-definableであり，また下に示すようにdenseになる。従って，path Gをもつtree T_0がD_bの中に存在する．各$a \le_M b$に対して，

$$\mathfrak{M} \models ① \text{ with } T = T_0 \quad \Rightarrow \quad (M, S\cup\{G\}) \models \neg\varphi(a, G),$$
$$\mathfrak{M} \models ② \text{ with } T = T_0 \quad \Rightarrow \quad (M, S\cup\{G\}) \models \varphi(a, G)$$

であり，かつ$\mathfrak{M}\models ① \vee ②$ with $T = T_0$だから，

$$\mathfrak{M}\models ② \text{ with } T = T_0 \quad \Leftrightarrow \quad (M, S\cup\{G\}) \models \varphi(a, G).$$

②はΣ^0_1-formula(或は①がΠ^0_1)で$\mathcal{M} \models$ (finite Σ^0_1-CA) [補題0.3] だから，$X=\{a \le_M b : \mathcal{M} \models ② \text{ with } T=T_0\} \in S$ となる。

最後に，D_b が dense になることを示そう。$T \in P$ を任意に選ぶ。各 $\sigma \in \{0,1\}^{<\omega}$ に対し，tree T_σ を次のように定義する：

$$T_{\langle\rangle} = T,$$

$$T_{\sigma^\frown\langle 0\rangle} = \{t \in T_\sigma : \forall s \subseteq t \sim\theta(a,s)\} \quad \text{但し } a = \mathit{length}(\sigma),$$

$$T_{\sigma^\frown\langle 1\rangle} = T_\sigma.$$

そして，$S_b = \{\sigma \in \{0,1\}^{b+1} : T_\sigma \text{ は infinite}\}$ とおく。ここで，

$$T_{\sigma^\frown\langle 0\rangle} \text{ が infinite} \iff T_\sigma \text{ が infinite } \& \ \neg ② \text{ with } \begin{array}{l} a = \mathit{length}(\sigma) \\ T = T_\sigma \end{array}$$

が直ちにいえるので，再び(finite Σ^0_1-CA)によって $S_b \in S$ である。また，$\langle\overbrace{1,1,\cdots,1}^{b+1\text{コ}}\rangle \in S_b$ より $S_b \neq \phi$。いま，σ_b を S_b における辞書式順序の最初の要素とする。$a \le_M b$ を任意に選ぶ。$\sigma_b(a)=0$ の場合，

$$T_{\sigma_b} \subseteq T_{\sigma_b \restriction a^\frown\langle 0\rangle} \subseteq \{t : \sim\theta(a,t)\}$$

だから，① with $T=T_{\sigma_b}$ がいえる。$\sigma_b(a)=1$ のときは，$T_{\sigma_b\restriction a^\frown\langle 0\rangle}$ は finite だから，② with $T=T_{\sigma_b\restriction a}$，従って② with $T=T_{\sigma_b}$ も成り立つ。以上から $T_{\sigma_b} \in D_b$ となり，D_b が dense になることが示された。

$\boxtimes$

$T \in P$ の $\mathfrak{M}$-generic path G を固定し，

$$S^T = \{X \subseteq M : X \text{ は } \Delta_1^0 \text{ definable over } (M, S \cup \{G\})\}$$

とおくと，次の補題が得られる．

補題2.5. $(M, S^T) \models RCA_0 +$ T は infinite path をもつ

(証明) S^T の要素をパラメタとする Σ_1^0 formula φ に対し，$S \cup \{G\}$ の要素だけをパラメタとする Σ_1^0 formula でそれと同値なもの ψ が存在する。これは Σ_1^0 induction で証明されるが概略は次のようである。φ が S^T の要素 X をパラメタにもつとする。X は Δ_1^0 def. over $(M, S \cup \{G\})$ だから，$S \cup \{G\}$ の要素をパラメタとする Σ_1^0 formula χ_1, χ_2 が存在して，$n \in X \leftrightarrow \chi_1(n) \leftrightarrow \neg \chi_2(n)$ である。φ に現れる $t \in X$ を $\chi_1(t)$ または $\neg \chi_2(t)$ で置き換え，さらに他のパラメタについても同様な置換をすれば，いくつかの Σ_1^0 formula を $\wedge$ $\vee$, $\forall n < t$, $\exists n < t$, $\exists n$ でつなげた formula で $S \cup \{G\}$ の要素だけをパラメタとするものが得られる。これを厳密な Σ_1^0 formula に変形する操作は普通と変わらない。キー・ポイントは，$\forall i < t\ \exists j\ \theta(i, j)$ から $\exists n\ \forall i < t\ \theta(i, (n)_i)$ を導くとき，$m \leq t$ に関する Σ_1^0 ind. で $\exists n\ \forall i < m\ \theta(i, (n)_i)$ を証明することである。

上の事実と補題2.4より，$(M, S^T) \models RCA_0$ が直ちにいえる。また，$(M, S^T) \models$ T は path G をもつ。 ☒

補題 2.6. $S \subseteq S_\infty \subseteq \mathcal{P}(M)$ となる S_∞ が存在し，$(M, S_\infty) \models WKL_0$.

（証明） $S_0 \subseteq S_1 \subseteq \cdots$ を次のように作る。

$$S_0 = S,$$

$$S_{(n,m)+1} = S_{(n,m)}^{T}, \quad \text{但し，} T \text{ は } S_n \,(\subseteq S_{(n,m)}) \text{ に含まれる}$$

m 番目の infinite tree，かつ

$$(n, m) = (n+m)(n+m+1)/2 + n.$$

そして，$S_\infty = \bigcup_{i \in \omega} S_i$ とすればよい。 ☒

定理 2.7 (Harrington) $\forall \sigma \in \Pi_1^1 \quad WKL_0 \vdash \sigma \Rightarrow RCA_0 \vdash \sigma$.

（証明） σ を RCA_0 で証明されない Π_1^1 文とする．Gödel の完全性定理から，$(M, S) \models RCA_0 + \neg\sigma$ となる可算モデル (M, S) が存在する．$\neg\sigma \leftrightarrow \exists X \varphi(X)$ with $\varphi \in \Pi_0^1$ とすると，$A \in S$ が存在し，$(M, S) \models RCA_0 + \varphi(A)$ となる。上の補題により S_∞ を構成すれば，$(M, S_\infty) \models WKL_0 + \varphi(A)$ である。ここで，$\varphi(X)$ は算術的だから，$\varphi(A)$ の真偽は M と A のみに依存していることに注意する．そして，$(M, S_\infty) \models WKL_0 + \neg\sigma$，つまり $WKL_0 + \neg\sigma$ は無矛盾だから $WKL_0 \nvdash \sigma$. ☒

§3. WKL_0 に関する Friedman の結果

本節では，WKL_0 が PRA の Π^0_2-保存的拡大になるという H. Friedman の結果を紹介する．PRA は Primitive Recursive Arithmetic の頭文字をとったもので，自然数の順序と和積演算に関する普通の1階算術の公理に加えて，すべての prim. rec. 関数 f に対してその定義式を公理としてもち，そして Σ^0_0-ind. を備えた体系である。言語が拡張されているから，formula やその階層も厳密には定義し直さねばならないが，それは自然な仕方でなされるものとして読者に委ねる．また，よく知られた基本事実として，Σ^0_1 ind は PRA で証明できる (cf. Girard, "Proof Theory and Logical Complexity, vol. 1," Bibliopolis, 1987)．PRA はヒルベルトの有限の立場の形式化と考えられるから，Friedman の結果はヒルベルトのプログラムに対し重要な意味をもつ (cf. 田中一之,'逆数学' と2階算術の証明論, 数学 42 (1990), 244-260)。

一般に，PRA のモデルは $(M, +^M, \cdot^M, 0^M, 1^M, <^M, f_0^M, f_1^M, \cdots)$ の形で与えられるが，$F=\{f_0^M, f_1^M, \cdots\}$ として簡単に (M, F) で表わす。さて，Friedman の結果の証明に入る前に，Kirby と Paris ("Initial segments of models of Peano's axioms," Lec. Notes Math. 619 (　), 211-226) によって導入された semi-regular cut の概念を復習しておく。以下，PRA のモデル (M, F) を1つ固定して議論を進める．

素数を小さい方から並べ上げる prim. rec. 関数を $p \in F$ とする（すなわち，$p(0)=2$, $p(1)=3$, $p(2)=5, \cdots$）。

定義 3.1. 集合 $X\ (\subseteq M)$ がコード $c \in M$ をもつ iff

$$X = \{n \in M : M \models \exists d < c \quad c = p(n)\cdot d\}.$$

コードをもつ集合 X を *M-finite* と呼び，その要素の数を $|X|$ または $|c|$（c は X のコード）で表わす。

注：$|c|$ は M 上の prim. rec. 関数，すなわち $|c| \in F$ である。また，コード c をもつ集合 $X\ (\neq \emptyset)$ の最大元を $max(c)$ と表わすと，$max \in F$ である。

記法：$I \subseteq_e M$ は，I が M の (proper) initial segment でかつ successor に関して閉じていることを表わす。このとき，I を M の cut と呼ぶ。

定義 3.2. $I \subseteq_e M$ が semi-regular cut iff すべての M-finite set X に対し，

$$|X| \in I \quad \Rightarrow \quad X \cap I \text{ は bounded in } I.$$

注：$b \in I$ を $X \cap I$ の上界とすると，$X \cap I = \{a <^M b : a \in I\}$ は M-finite で，最大元をもつ。semi-regular cut は集合論の regular ordinal の analogue である。また，$\mathbb{N} \subseteq M$ は常に semi-regular である。

命題3.1 (Kirby-Paris).　$I \subsetneq_e M$ が semi-regular ならば,

$$(I, F\lceil I) \models \mathrm{PRA}.$$

(証明)　まず, I が prim. rec. 関数に関して閉じていることをいう。各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, 1変数の prim. rec. 関数 g_n を次のように定める:

$$g_0(x) = x+1,$$
$$g_{n+1}(x) = \overbrace{g_n g_n \cdots g_n}^{x+2^{\urcorner}}(x) 。$$

すると, 任意の prim. rec. 関数 f に対し, ある $n \in \mathbb{N}$ が存在し,

$$\mathrm{PRA} \vdash f(x_1, x_2, \cdots, x_k) < g_n(max\{x_1, x_2, \cdots, x_k\})$$

がいえるから, I が各 g_n に関して閉じていることをいえば十分である。I は successor に関して閉じているから, $n=0$ の場合は成立。いま, g_n で成り立ち, g_{n+1} で成り立たないとして矛盾を導く。$g^M_{n+1}(a) \notin I$ となる $a \in I$ を選び,

$$X = \{ g^M_n(a), g^M_n g^M_n(a), \cdots, \overbrace{g^M_n g^M_n \cdots g^M_n}^{a+2^{\urcorner}}(a) \}$$

とおく。$|X| = a+2 \in I$ だから, $X \cap I$ は bounded となり最大元 b が存在する。しかし, I は g_n に関して閉じているから, $g^M_n(b) \in X \cap I$ となり, b の最大性に反する。

上のことから，$(I, F\restriction I)$ は (M, F) の substructure と考えることが出来て，Σ^0_0 formula については 2つの構造における真偽値が一致している。いま，$\varphi(x)$ を Σ^0_0 formula として，$(I, F\restriction I) \models \varphi(0) \land \forall x(\varphi(x) \to \varphi(x+1))$ と仮定する。$c \in I$ を任意に定め，$\psi(x) \equiv \varphi(x) \lor c < x$ とおくと，$\psi(x)$ も Σ^0_0 formula で，$(M, F) \models \psi(0) \land \forall x(\psi(x) \to \psi(x+1))$ がいえる。$(M, F) \models \Sigma^0_0$-ind だから $(M, F) \models \forall x\, \psi(x)$，従って $(I, F\restriction I) \models \forall x \psi(x)$。特に $\psi(c) \leftrightarrow \varphi(c)$ だから $(I, F\restriction I) \models \varphi(c)$. c は任意なので，$(I, F\restriction I) \models \forall x \varphi(x)$ を得る。すなわち，$(I, F\restriction I)$ は Σ^0_0-ind を満たし，PRA のモデルになる。 $\boxtimes$

<u>定義 3.3.</u> $I \subseteq_e M$ が与えられたとき，$B \subseteq I$ が <u>M-coded</u> iff M-finite set X が存在して，

$$B = X \cap I.$$

記法：　$S_I = \{ B \subseteq I : B$ は M-coded$\}$

<u>補題 3.2.</u> $I \subseteq_e M$ が semi-regular ならば，

$$(I, S_I) \models WKL_0 .$$

注：　I 上の和積演算 $+^I, \cdot^I$ などは，M 上の演算 $+^M, \cdot^M$ を I に制限することで与えられる。

(証明) (I, S_I)が順序と和積演算の公理を満たすことは問題ない。あと示すべきことは$(\Delta^0_1\text{-CA})$, weak Kőnig's lemma及びΣ^0_1-indだが, まずinductionから取り掛る. $I \cup S_I$の要素をパラメタとしてもつformula φに対し, すべての集合パラメタ$B \in S_I$を対応するM-finite set X (i.e., $B = X \cap I$)で置き換えてできるformulaをφ^*で表わす。もっと厳密にいえば, Xのコードをcとして, "$t \in B$"を"$\exists d < c \ \ c = p(t) \cdot d$"で置き換える. このとき, φがΣ^0_0 formulaならば, 任意の$a \in I$に対し,

$$(I, S_I) \models \varphi(a) \iff (M, F) \models \varphi^*(a)$$

が成立するので, 命題3.1の証明と同様にして$(I, S_I) \models \Sigma^0_0\text{-ind}$が示される。

次に, $\varphi(x) \equiv \exists y \theta(x, y)$ with $\theta \in \Sigma^0_0$として, $(I, S_I) \models \varphi(0) \wedge \forall x (\varphi(x) \to \varphi(x+1))$と仮定する. 任意の$c$に対して, $(I, S_I) \models \varphi(c)$を示すことが我々の目的である。いま, $c \in I$, $d \in M - I$を任意にとり, $Z = \{(a, b) : a <^M c,\ b <^M d \ \& \ (M, F) \models \theta^*(a, b) \wedge \forall x < b \, \neg\theta^*(a, x)\}$とおく。$Z$がM-finiteで$|Z| \leq^M c$となることは明らかだから, Iのsemi-regularityから$Z \cap (I \times I)$はbounded, つまり$d' \in I$が存在して, すべての$a <^M c$について,

$$\exists b \in I \ (a, b) \in Z \iff \exists b < d' \ (a, b) \in Z .$$

従って，すべての$a<^M c$に対して，

$$\begin{aligned}(I,S_I)\models\varphi(a) &\Leftrightarrow \exists b\in I\ (I,S_I)\models\theta(a,b)\\ &\Leftrightarrow \exists b\in I\ (M,F)\models\theta^*(a,b)\\ &\Leftrightarrow \exists b<^M d'\ (M,F)\models\theta^*(a,b)\\ &\Leftrightarrow (M,F)\models\exists y<d'\ \theta^*(a,y)\end{aligned}$$

となる。$\exists y<d'\theta^*(a,y)$は$\Sigma^0_0$ formulaで$(M,F)\models\Sigma^0_0$-indだから，すべての$a<^M c$について$(I,S_I)\models\varphi(a)$。$c\in I$は任意に選んだので，$(I,S_I)\models\forall x\,\varphi(x)$となる.

残るは$(\Delta^0_1$-CA)とweak König's lemmaであるが，我々はこの両者を合わせたものと同値な(Σ^0_1-SP)を示そう。$\varphi_i(x)\equiv\exists y\,\theta_i(x,y)$ with $\theta_i(x,y)\in\Sigma^0_0$ $(i=0,1)$とし，$(I,S_I)\models\sim\exists x(\varphi_0(x)\wedge\varphi_1(x))$と仮定する。前と同様，$\varphi$の集合パラメタをM-finite setで置き換えた式をφ^*で表わす。いま，$d\in M-I$を任意にとり，

$$Y=\{a<^M d:\ \exists b<^M d\ (M,F)\models\theta^*_0(a,b)\wedge\forall x<b\,\neg\theta^*_1(a,x)\}$$

とおくと，YはM-finiteだから$Y\cap I\in S_I$。そして，

$$(I,S_I)\models\forall a\{(\varphi_0(a)\to a\in Y\cap I)\wedge(a\in Y\cap I\to\neg\varphi_1(a))\}$$

も容易にいえるから，$(I,S_I)\models(\Sigma^0_1$-Sep)。以上から，$(I,S_I)\models$ WKL_0が証明された。 ⊠

次の補題は，Friedmanの定理(定理3.4)の証明の中核となるもので，命題3.1の逆を弱めた形と考えられる．

<u>補題3.3</u>　(M, F)をPRAの可算モデルとする。$c, d \in M$として，すべてのprim. rec. 関数fに対して$f^M(c, c, \cdots, c) <^M d$と仮定する。このとき，$c \in I$で$d \notin I$となるsemi-regular cut $I \subseteq_e M$が存在する。

注：$c \in M - \mathbb{N}$として，Jを$c \in J$かつprim. rec. 関数で閉じた最小のcutとする。すなわち，$\{g_n\}$を命題3.1の証明の中で作ったprim. rec. 関数の列とすれば，$J = \{a \in M : \exists n\ a <^M g_n^M(c)\}$である。ところが，$J$がsemi-regularでないことは大よそ次のようにしてわかる。$G_x = g_x(c)$という関数を考える．Gはprim. rec. ではないが，(finite Σ_1^0-CA)より$X = \{G(0), G(1), \cdots, G(c)\}$が存在し，M-finiteになる。すると$|X| \in J$だが$X \cap J$はunbounded in Jになるから，Jはsemi-regularではない。この議論はそもそも$s \in M - \mathbb{N}$に対するg_sを定義してからでないと意味がなく，また補題において求めるIを作るにもg_sに匹敵する概念が必要になる．下の証明の中で定義されるprim. rec. 述語$B(x, y, z)$は"$g_x(y) \le z$"とほぼ同じ内容をPRAで表現したもので，Friedmanの鬼才を示している．

(証明) まず，prim. rec. 述語 $B(x, y, z)$ ("区間 $[y, z) = \{w : y \leq w < z\}$ は x-big である" と読む) を以下のように定義する：

$$B(0, y, z) \longleftrightarrow y < z$$

$B(x+1, y, z) \longleftrightarrow$ $|X| < y$ となる任意の M-finite set $X \subset [y, z)$ に対し，x-big な区間 $[y', z') \subset [y, z)$ で $[y', z'] \cap X = \phi$ となるものが存在する.

$B(x+1, y, z)$ の定義式において，"任意の M-finite set X" というのは，厳密にいえば "任意の M-finite set のコード c" であり，z 番目の素数を $p(z)$ として "任意の M-finite set のコード $c < \{p(z)\}^y$" と考えてもよいから，右辺全体は Σ_0^0 formula であり，B は prim. rec. に定義されている．(ここで，述語 B が prim. rec. というのは，その特性関数が prim. rec. のことである.)

さて，すべての prim. rec. 関数 f に対して $f^M(c, \cdots, c) <^M d$ となる $c, d \in M$ が与えられたとする．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$g_n^M(c) <^M d$ だから，また $B(n, c, d)$ となる．一方，明らかに $\sim B(d-c, c, d)$ であるから，$\sim B(b', c, d)$ となる最小の数 $b' \in M - \mathbb{N}$ が存在する．そして，$b = b' - 1$ とおく．後の議論のためには，$\forall a \leq^M b\ B(a, c, d)$ となる non-standard 数 $b \in M - \mathbb{N}$ を1つ選んで固定しておけばよい。

M を可算集合とすると，M-finite sets も可算個しかない。そこで，$\langle X_n : n \in \omega \rangle$ を M-finite sets の列で，各 M-finite sets が無限

回現れるものとする．これを使って，縮小区間列 $[c_n, d_n)$, $n\in\omega$, を下のように定義する：

$$[c_0, d_0) = [c, d)$$

$$[c_{n+1}, d_{n+1}) = \begin{cases} [c_n, d_n) & |X_n| \geq^M c_n \text{ のとき,} \\ [c_n', d_n') & |X_n| <^M c_n \text{ のとき, } [c_n', d_n') \subset [c_n, d_n) \\ & \text{は } (b-n)\text{-}big \text{ で } [c_n', d_n'] \cap X_n = \phi \\ & \text{となるもの(適当に1つ選ぶ).} \end{cases}$$

任意の $a \in M$ に対し，$\{a\}$ は M-*finite set* だから十分大きな n について $[c_n, d_n) \cap \{a\} = \phi$ つまり $a \notin [c_n, d_n)$ となる。従って，$\bigcap_{n\in\omega} [c_n, d_n) = \phi$ である。

いま，$I = \{a \in M : \exists n \ a <^M c_n\} = \{a \in M : \forall n \ a <^M d_n\}$ とおき，I が *semi-regular* になっていることを証明しよう。X が M-*finite set* で $|X| \in I$ とする．無限個の n について $X = X_n$ となるから，$X = X_n$ かつ $|X| <^M c_n$ となる n がある．すると，$[c_{n+1}, d_{n+1}) \cap X = \phi$.
従って，c_{n+1} は $X \cap I$ の上界であり，$X \cap I$ は *bounded in* I となる。
よって，I は *semi-regular* である。 ☒

注：上の証明において，I は *recursive in* (M, F) であり，証明全体を RCA_0 で行うことが出来る．

<u>定理3.4</u> (Friedman). $\forall\sigma\in\Pi^0_2$ $WKL_0\vdash\sigma \Rightarrow PRA\vdash\sigma$.

(証明) $\sigma\equiv\forall y\exists z\,\theta(y,z)$ with $\theta\in\Sigma^0_0$ をPRAで証明されない(WKL_0の言語における) Π^0_2文とする。まず，コンパクト性定理を使って，$PRA\cup\{\sim\exists z\,\theta(\underline{c},z)\}\cup\{f(\underline{c},\underline{c},\cdots,\underline{c})<\underline{d} : f$はprim. rec.関数記号$\}$が可算モデル$(M,F,c,d)$をもつことがいえる。ここで，$\underline{c}$と$\underline{d}$は新しい定数記号であり，このモデルにおいてはそれぞれcとdに解釈される。すなわち，PRAの可算モデル(M,F)とその2つの元c,dが補題3.3の条件を満たしており，$c\in I$かつ$d\notin I$となるsemi-regular cut $I\subseteq_e M$が存在する。$\sim\exists z\,\theta(\underline{c},z)$は$\Pi^0_1$文で$M\models\sim\exists z\,\theta(c,z)$だから，$I\models\sim\exists z\,\theta(c,z)$すなわち$I\models\sim\sigma$である。次に，補題3.2から$(I,S_I)\models WKL_0$がいえる。よって$(I,S_I)\models WKL_0+\neg\sigma$だから，$WKL_0+\neg\sigma$は無矛盾となり，$\sigma$は$WKL_0$でも証明できない。 $\boxtimes$

注：上の定理はWKL_0で証明可能であり，自らの定理を適用することで，PRAでも証明可能になる。cf. Simpson-Tanaka, On the strong soundness of the theory of real closed fields, Proc. of the 4th Asian Logic Conf. (1990), 7-10.