数理解析研究所講究録
第 772 巻 1991 年 45-48

局所有限な安定群について

九州歯科大学　田中 克己(Katsumi Tanaka)

1。はじめに

安定群の構造を決定することは、model theorist にとって、重大な関心事である。なぜ今群なのか--という質問への答えには別の機会に答えるとして。ここでは、純粋に群論的観点から安定群について眺めることにする。

群の構造を知ろうとすれば、群の拡大のことが分かったとすれば、単純群のことが分かりさえすればよい。その意味で有限単純群の分類により、原理的には、我々は有限群のことはすべて分かることになる。話しを無限群に移すと、無限単純群の分類などとても不可能に思えるし、群の拡大についても似たようなものに見える。そこで model theory の意味でよい性質を多く持つ群、ω安定群、超安定群、安定群等について考えるのは、安定性理論の一般論への貢献は言うに及ばず、群論的にも、あまりにも大きな対象である無限群へのアプローチとして意味のあることだと思う。

ここで最初に問題となるのが正規部分群の定義可能性である。例えば、Ｇを安定群、ＮをＧの正規部分群としたとき、ＮがＧの中で定義可能でなければ、G/N は安定とは限らない。これは安定群の構造を調べるにあたり大きな障害となる。少なくともＧの Morley rank が有限のとき、Ｇが定義可能な非自明正規部分群を持たなければ、Ｇは単純群となることが知られている。

そこで再び話しを有限群にもどすが、有限群では、各素数ｐにたいし、pシロー群、つまり極大p部分群はみな共役になることが知られている(シローの定理)。残念ながらこの定理は、無限群では一般になりたたないが、1978年にFelgnerによりω-categoricalな安定群については成り立つことが示された。最近Nesinにより、Morley rank 有限な連結な可解群について成り立つことが報告されている。Nesinはこの証明のなかでpシロー群が定義可能であることを示し上の結果を導いている。本稿では、Felgnerの結果を少し拡張し、局所有限な安定群についてpシロー群がみな共役になることを示す。ただし、ここでpシロー群の定義可能性は一切問題としない。

2。証明

局所有限群については、Asarの定理により、可算部分群がpシロー群を高々可算個しか持たないことさえ示せばよい。したがって、ここでは、

可算部分群のpシロー群がみな共役になることを示すことにする。以後Gをある局所有限な安定群の可算部分群とする。少なくともGは局所有限で、中心化群のDCCをみたす。

局所有限性から、Gはどの有限p部分群にたいしても、そのある共役をふくむようなpシロー群Aを持つ。Gのどんなpシロー群Bについても、AとBは共役になることを示すのが我々のゴールである。

pシロー群Bは局所ベキ零群であり、中心化群のDCCをみたすので、有限指数のベキ零部分群B^*をもつ。

$B^*/Z(B^*)$ の exponent は有限だから、$B/Z(B^*)$ の exponent も有限となり、これをnとする。このとき、$B^* \leq C_B(B^n)$。ここで自然数nをうまく取り直してやれば、AとBにたいし、$A^* \leq C_A(A^n)$ と $B^* \leq C_B(B^n)$ を同時にみたす。中心化群のDCCより、Bのある有限部分集合Fにたいし、$C_G(F^n) = C_G(B^n)$ となる。ここでBを適当な共役で置き換てやると、FはAにふくまれると仮定してよい。よってF^nはA^nにふくまれ $A^* \leq C_G(F^n) = C_G(A^n)$ となる。またB^*は$C_G(B^*)$ふくまれるから、B'をB^*をふくむ$C_G(B^n)$のpシロー群とする。またB''をB'をふくむGのpシロー群とする。

Claim. B'はベキ零。

B'' は $N_G(B^*)$ のある元によりBと共役でかつ、B^* はB'' のなかで指数有限となる。よってある自然数mがあって、$(B')^m \leqq (B^*)^n \leqq B^n$ となるので、$(B')^m \leqq Z(B')$ となる。ここで B' は局所べキ零でしかも中心化群のDCCをみたすので、B' はべキ零となる。

このとき、$C_G(B^n)$ のpシロー群はすべて共役となる。よって、$C_G(B^n)$ のある元gにたいし $(B^*)^g$ と A^* から生成される群Pはp群となる。DをPをふくむGのpシロー群とすると、$(B^g)^* = (B^*)^g \leqq D$ が成り立つから、B^g とDは共役になる。また A^* もDにふくまれるから、A^* とDも共役となる。ゆえにAとBは共役となり証明が終わる。

参考文献

Ulrich Felgner, $\aleph_0$-*categorical stable groups,* Mathematische Zeitschrift 160 (1978) 27-49.

Ali Nesin, *Nilpotent and Solvable groups of finite Morley rank,* preprint.