数理解析研究所講究録
第772巻 1991年 84-94

RCS-iterationの一つの定義

神戸大・自然科学研究科 古田泰之
(Yasuyaki Koda)

定義其壱. $\varepsilon\in On$ とする. $\langle P_\alpha \mid \alpha\le\varepsilon\rangle$, $\langle \dot{Q}_\alpha \mid \alpha<\varepsilon\rangle$ が, RCS-iterationであるとは, 次の条件(i)-(iii)をみたすことである.

(i) $\forall_{\alpha<\varepsilon}(\dot{Q}_\alpha$ は P_α-name for a p.c. $\wedge$ $\dot{Q}_\alpha$ は full$)$

(ii) $\alpha\le\varepsilon$ に対し,

$P_\alpha = \{p\subseteq Cond^\alpha \mid \phi\in p \wedge p$ は可算

$\wedge\, \forall_{\beta<\alpha}[p\restriction\beta\in P_\beta \wedge p\restriction\beta \Vdash_\beta$ "$\exists_{q\in\dot{Q}_\beta}(q$ は $p\restriction\{\beta\}$ の下界$)$"$]\}$

ただし, $p\restriction\beta \doteq \{\tau\restriction\beta \mid \tau\in p\}$, $p\restriction\{\beta\} \doteq \{\langle \tau\restriction\{\beta\}, \{\phi\}\rangle \mid \tau\in p\}$ と定める. また, $Cond^\alpha$, $\tau\restriction\beta$, $\tau\restriction\{\beta\}$ は後で定義する.

(iii) $\alpha\le\varepsilon$, $p_1, p_2\in P_\alpha$ に対し,

$p_1\le p_2$ in P_α iff $\forall_{\beta<\alpha}(p_1\restriction\beta \le p_2\restriction\beta$ in $P_\beta)$

$\wedge\, \forall_{\beta<\alpha}[p_1\restriction\beta \Vdash_\beta$ "$\forall_{q\in\dot{Q}_\beta}(q$ は $p_1\restriction\{\beta\}$ の下界

$\rightarrow q$ は $p_2\restriction\{\beta\}$ の下界$)$"$]$

$\alpha\le\varepsilon$ についての帰納法により, $\le$ が擬順序であることがすぐわかる.

定義其弐. $\alpha\le\varepsilon$ に対し, $P_{<\alpha} = \bigcup_{\beta<\alpha} P_\beta$ とし, $\kappa_\alpha = |P_{<\alpha}|$ とする. $\gamma<\kappa_\alpha^+$ についての帰納法で, $Cond^\alpha(\gamma)$, $Cond^\alpha_\eta(\gamma)$ $(0<\eta<\alpha)$ を定める.

(a) $\gamma=0$ のとき.

$$Cond^{\alpha}(0)=\{\phi\}\cup\{\langle 0,\langle \zeta,\dot{\xi}\rangle\rangle \mid \zeta<\alpha \wedge \dot{\xi}\in dom(\dot{Q}_{\zeta})\}$$

$$Cond^{\alpha}_{\eta}(0)=\{\langle 0,\langle \zeta,\dot{\xi}\rangle\rangle \mid \eta\leq\zeta<\alpha \wedge \dot{\xi}\in dom(\dot{Q}_{\zeta})\} \qquad (0<\eta<\alpha)$$

とする. $Cond^{\alpha}_{\eta}(0)=\{\langle 0,\langle \zeta,\dot{\xi}\rangle\rangle\in Cond^{\alpha}(0)\mid \eta\leq\zeta\}$ である.

(b) $\gamma>0$ のとき.

$$Cond^{\alpha}(\gamma)=\{\langle \zeta,f\rangle \mid 0<\zeta<\alpha \wedge f \text{ は関数} \wedge dom(f)\subseteq P_{\zeta}$$
$$\wedge\ dom(f) \text{ は } P_{\zeta} \text{ の antichain } (=\phi \text{ でも良い})$$
$$\wedge\ \forall p\in dom(f)\,\exists\gamma'<\gamma\,(f(p)\in Cond^{\alpha}_{\zeta}(\gamma'))\}$$

$$Cond^{\alpha}_{\eta}(\gamma)=\{\langle\zeta,f\rangle\in Cond^{\alpha}(\gamma)\mid \eta\leq\zeta\} \qquad (0<\eta<\alpha)$$

とする.

このようにして. $Cond^{\alpha}(\gamma)$, $Cond^{\alpha}_{\eta}(\gamma)$ $(0<\eta<\alpha)$, $\gamma<\kappa^{+}_{\alpha}$ が定まった. そこで,

$$Cond^{\alpha}=\bigcup_{\gamma<\kappa^{+}_{\alpha}} Cond^{\alpha}(\gamma)$$

$$Cond^{\alpha}_{\eta}=\bigcup_{\gamma<\kappa^{+}_{\alpha}} Cond^{\alpha}_{\eta}(\gamma) \qquad (0<\eta<\alpha)$$

とする. さらに, $\tau\in Cond^{\alpha}$ に対して.

$$depth(\tau)=\text{the least } \gamma<\kappa^{+}_{\alpha} \text{ s.t. } \tau\in Cond^{\alpha}(\gamma)$$

と定める.

補題. $\beta<\alpha\leq\varepsilon$ とする. 明らかに $\kappa_{\beta}\leq\kappa_{\alpha}$ であるが, $\gamma<\kappa^{+}_{\beta}$ に対し.

$$Cond^{\beta}(\gamma)\subseteq Cond^{\alpha}(\gamma)\wedge\forall\eta<\beta(\eta\neq 0\rightarrow Cond^{\beta}_{\eta}(\gamma)\subseteq Cond^{\alpha}_{\eta}(\gamma))$$

従って. $Cond^{\beta}\subseteq Cond^{\alpha}\wedge\forall\eta<\beta(\eta\neq 0\rightarrow Cond^{\beta}_{\eta}\subseteq Cond^{\alpha}_{\eta})$ である.

定義其参. $\alpha \le \varepsilon$, $\tau \in Cond^{\alpha}$, $\gamma = depth(\tau)$ とする.

(1) $\eta \le \varepsilon$ に対して, $\tau\restriction\eta$ を定める. まず, $\gamma = 0$ のときは,

$$\phi\restriction\eta = \phi$$

$$\langle 0, \langle \zeta, \mathring{g}\rangle\rangle\restriction\eta = \begin{cases} \phi & \text{if } \eta \le \zeta \\ \langle 0, \langle \zeta, \mathring{g}\rangle\rangle & \text{if } \zeta < \eta \le \varepsilon \end{cases}$$

とし, $\gamma > 0$ のときは,

$$\langle \zeta, f\rangle\restriction\eta = \begin{cases} \phi & \text{if } \eta \le \zeta \\ \langle \zeta, g\rangle & \text{if } \zeta < \eta \le \varepsilon \end{cases}$$

とする. ここで g は, $dom(g) = \{p \in dom(f) \mid f(p)\restriction\eta \ne \phi\}$ なる関数で, $p \in dom(g)$ に対しては, $g(p) = f(p)\restriction\eta$ である.

(2) $\eta < \varepsilon$ に対して, $\tau\restriction\{\eta\}$ を定める. まず, $\gamma = 0$ のときは,

$$\phi\restriction\{\eta\} = \mathring{1}_\eta$$

$$\langle 0, \langle \zeta, \mathring{g}\rangle\rangle\restriction\{\eta\} = \begin{cases} \mathring{g} & \text{if } \eta = \zeta \\ \mathring{1}_\eta & \text{if } \eta \ne \zeta \end{cases}$$

とする. $\gamma > 0$ のときは, まず, $\tau = \langle \zeta, f\rangle$ とし, $\eta < \zeta$ に対しては,

$$\langle \zeta, f\rangle\restriction\{\eta\} = \mathring{1}_\eta$$

とする. $\zeta \le \eta < \varepsilon$ のときは,

$$\begin{aligned}\langle \zeta, f\rangle\restriction\{\eta\} = \bigcup_{p \in X} \{\langle \sigma, r\rangle \in dom(f(p)\restriction\{\eta\}) \times P_\eta \mid r \le p \wedge r \Vdash_\eta \text{“}\sigma \in f(p)\restriction\{\eta\}\text{”}\} \\ \cup \{\langle \sigma, r\rangle \in dom(\mathring{1}_\eta) \times P_\eta \mid \forall p \in X (r \perp p) \wedge r \Vdash_\eta \text{“}\sigma \in \mathring{1}_\eta\text{”}\}\end{aligned}$$

と定める. ここで, $X = dom(f) \cap P_\eta$ である.

$\tau\restriction\eta$ や $\tau\restriction\langle\eta\rangle$ の性質を列挙する. 証明はしない。

補題. $\alpha \le \eta \le \xi \wedge \tau \in \mathrm{Cond}^{\alpha} \to \tau\restriction\eta = \tau$

補題. $\eta \le \beta < \alpha \le \xi \wedge \beta \neq 0 \wedge \tau \in \mathrm{Cond}^{\alpha}_{\beta} \to \tau\restriction\eta = \phi$

補題. $0 < \beta < \alpha \le \xi$ とするとき. $\gamma < \kappa_{\alpha}^{+}$ に対し.

$$\forall_{\eta<\alpha} \forall_{\tau} [\eta \neq 0 \wedge \tau \in \mathrm{Cond}^{\alpha}_{\eta}(\gamma) \to \tau\restriction\beta = \phi \vee \exists_{\delta<\kappa_{\beta}^{+}} (\delta \le \gamma \wedge \tau\restriction\beta \in \mathrm{Cond}^{\beta}_{\eta}(\delta))]$$

補題 $\beta < \alpha \le \xi$ のとき、$\tau \in \mathrm{Cond}^{\alpha}$ に対し

$$\tau\restriction\beta \in \mathrm{Cond}^{\beta} \wedge \mathrm{depth}(\tau\restriction\beta) \le \mathrm{depth}(\tau)$$

補題. $\alpha \le \xi \wedge \tau \in \mathrm{Cond}^{\alpha} \wedge \eta \le \zeta \le \xi \to \tau\restriction\eta = (\tau\restriction\zeta)\restriction\eta$

補題. $\alpha \le \xi \wedge \eta < \xi \wedge \tau \in \mathrm{Cond}^{\alpha} \to \tau\restriction\langle\eta\rangle$ は P_{η}-name

補題 $\eta < \beta \le \alpha \le \xi \wedge \tau \in \mathrm{Cond}^{\alpha} \wedge \tau\restriction\beta = \phi \to \tau\restriction\langle\eta\rangle = \mathring{1}_{\eta}$

補題. $\alpha \le \eta < \xi \wedge \tau \in \mathrm{Cond}^{\alpha} \to \forall s \in P_{\eta} (s \Vdash_{\eta} \text{“} \tau\restriction\langle\eta\rangle = \mathring{1}_{\eta} \text{”})$

P_α $(\alpha \le \varepsilon)$ の性質を列挙する。証明はしない。

補題 $\alpha \le \varepsilon$ とすると、$\{\emptyset\}$ は P_α の最大元である。また、$P_0 = \{\{\emptyset\}\}$.

補題 $\beta \le \alpha \le \varepsilon \to P_\beta \subseteq P_\alpha$

補題 $\beta \le \alpha \le \varepsilon$, $p_1, p_2 \in P_\beta$ とする。

(1) $p_1 \le p_2$ in P_β iff $p_1 \le p_2$ in P_α

(2) $p_1 \perp p_2$ in P_β iff $p_1 \perp p_2$ in P_α

補題 $\alpha \le \varepsilon$ $p_1, p_2 \in P_\alpha$, $p_1 \le p_2$ とすると、

$p_1 \cup p_2 \in P_\alpha \wedge p_1 \cup p_2 \le p_1 \le p_1 \cup p_2$

補題 $\beta \le \alpha \le \varepsilon$, $p_1 \in P_\beta$, $p_2 \in P_\alpha$, $p_1 \le p_2{\restriction}\beta$ in P_β とする。このとき、

$p_1 \cup p_2 \in P_\alpha \wedge p_1 \cup p_2 \le p_1, p_2$ in P_α

補題 $\beta \le \alpha \le \varepsilon$ とする。$p_1 \in P_\beta$, $p_2 \in P_\alpha$ に対し、

$p_1 \perp p_2{\restriction}\beta$ in P_β iff $p_1 \perp p_2$ in P_α

補題 $\beta \le \alpha \le \varepsilon \to P_\beta \lessdot P_\alpha$, i.e., $id : P_\beta \to P_\alpha$ が complete embedding

以上のことから、$\tau\restriction\{\eta\}$ について、次のことがわかる。

補題　$\alpha\leq\varepsilon$, $\tau\in Cond^{\alpha}$, $\mathrm{depth}(\tau)>0$, $\tau=\langle\zeta,f\rangle$, $0<\zeta\leq\eta<\varepsilon$, $\zeta<\alpha$ とすると、

(1)　$\tau\restriction\{\eta\}=\bigcup_{p\in dom(f)}\{\langle\sigma,r\rangle\in dom(f(p)\restriction\{\eta\})\times P_\eta \mid r\leq p\wedge r\Vdash_\eta \text{“}\sigma\in f(p)\restriction\{\eta\}\text{”}\}$

$\cup\{\langle\sigma,r\rangle\in dom(\mathring{1}_\eta)\times P_\eta \mid \forall p\in dom(f)(r\perp p)\wedge r\Vdash_\eta \text{“}\sigma\in\mathring{1}_\eta\text{”}\}$

(2)　$p\in dom(f)\rightarrow p\Vdash_\eta \text{“}\tau\restriction\{\eta\}=f(p)\restriction\{\eta\}\text{”}$

(3)　$r\in P_\eta\wedge\forall p\in dom(f)(r\perp p)\rightarrow r\Vdash_\eta \text{“}\tau\restriction\{\eta\}=\mathring{1}_\eta\text{”}$

補題　$\alpha\leq\varepsilon\wedge\tau\in Cond^{\alpha}\rightarrow\forall\eta<\varepsilon(1\Vdash_\eta \text{“}\tau\restriction\{\eta\}\in\mathring{Q}_\eta\text{”})$. ここで、$1=\{\phi\}$.

補題　$\eta<\beta\leq\alpha\leq\varepsilon\wedge\tau\in Cond^{\alpha}\rightarrow 1\Vdash_\eta \text{“}\tau\restriction\{\eta\}=(\tau\restriction\beta)\restriction\{\eta\}\text{”}$

P_α $(\alpha\leq\varepsilon)$ に対しては、さらに、次のこともいえる。

補題　$\alpha\leq\varepsilon\wedge\tau\in Cond^{\alpha}\rightarrow\{\phi,\tau\}\in P_\alpha$

補題　$0<\beta\leq\eta\leq\alpha\leq\varepsilon\wedge\tau\in Cond^{\alpha}_{\beta}\wedge p\in P_\beta\rightarrow p\cup\{\tau\restriction\eta\}\in P_\eta$

補題　$\beta<\varepsilon$ に対し、

$P_{\beta+1}=\{p\subseteq Cond^{\beta+1}\mid\phi\in p\wedge p$ は可算 $\wedge\ p\restriction\beta\in P_\beta\wedge p\restriction\beta\Vdash_\beta \text{“}\exists g\in\mathring{Q}_\beta(g$ は $p\restriction\{\beta\}$ の下界$)\text{”}\}$

であり、さらに、$p_1,p_2\in P_{\beta+1}$ に対して、

$p_1 \le p_2$ in $P_{\beta+1}$ iff $p_1\restriction\beta \le p_2\restriction\beta$ in P_β

$\wedge\; p_1\restriction\beta \Vdash_\beta$ "$\forall \xi\in\dot{Q}_\beta$ (ξ は $p_1\restriction\{\beta\}$ の下界 $\rightarrow$ ξ は $p_2\restriction\{\beta\}$ の下界)"

補題　$\beta<\varepsilon$ のとき、$\{p\cup\{\langle 0,\langle\beta,\dot{\xi}\rangle\rangle\} \mid p\in P_\beta \wedge \dot{\xi}\in \mathrm{dom}(\dot{Q}) \wedge p\Vdash_\beta \text{“}\dot{\xi}\in\dot{Q}\text{”}\}$ は $P_{\beta+1}$ の dense subset である。従って、$i: P_\beta * \dot{Q}_\beta \to P_{\beta+1}$ を

$$i(p,\dot{\xi}) = p\cup\{\langle 0,\langle\beta,\dot{\xi}\rangle\rangle\}$$

で定めれば、これは dense embedding である。

定義　$\alpha\le\varepsilon$、$p_1, p_2\in P_\alpha$、$\tau_1,\tau_2\in Cond^\alpha$ とする。

(1)　$p_1\sim p_2$ in P_α iff $p_1\le p_2\le p_1$ in P_α

(2)　$\tau_1\sim\tau_2$ in $Cond^\alpha$ iff $\forall\eta<\alpha\,(1\Vdash_\eta \text{“}\tau_1\restriction\{\eta\} = \tau_2\restriction\{\eta\}\text{”})$

これらは同値関係である。

定義　$\alpha\le\varepsilon$、$x, y\subseteq P_\alpha$ とする。

$x\sim y$ in $\mathcal{P}(P_\alpha)$

iff $\forall p\in x\,\exists p'\in y\,(p\sim p') \wedge \forall p'\in y\,\exists p\in x\,(p'\sim p)$

これも同値関係である。

次のことが容易にわかる。

補題 $\beta \le \alpha \le \varepsilon$, $\tau_1, \tau_2 \in Cond^\alpha$ とする。

$$\tau_1 \sim \tau_2 \text{ in } Cond^\alpha \to \tau_1 \upharpoonright \beta \sim \tau_2 \upharpoonright \beta \text{ in } Cond^\beta$$

補題 $\alpha \le \varepsilon$. $p_1, p_2 \in P_\alpha$ とする。$\forall \tau_1 \in p_1 \exists \tau_2 \in p_2 (\tau_1 \sim \tau_2)$ ならば、$p_2 \le p_1$ である。故に、$\forall \tau_1 \in p_1 \exists \tau_2 \in p_2 (\tau_1 \sim \tau_2) \wedge \forall \tau_2 \in p_2 \exists \tau_1 \in p_1 (\tau_2 \sim \tau_1)$ ならば、$p_1 \sim p_2$ である。

補題. $0 < \zeta < \alpha \le \varepsilon$, $\tau, \sigma \in Cond^\alpha$, $\tau = \langle \zeta, f \rangle$, $\sigma = \langle \zeta, g \rangle$ とすると、

$$dom(f) \sim dom(g) \wedge \forall p \in dom(f) \forall p' \in dom(g) (p \sim p' \to f(p) \sim g(p')) \to \tau \sim \sigma$$

補題 $0 < \eta < \alpha$. $\tau \in Cond^\alpha_\eta$ とし、関数 f を、$dom(f) = \{\{\phi\}\}$, $f(\{\phi\}) \sim \tau$, $f(\{\phi\}) \in Cond^\alpha_\eta$ なるものとする。このとき、$\langle \eta, f \rangle \in Cond^\alpha_\eta$ であるが、$\tau \sim \langle \eta, f \rangle$ in $Cond^\alpha$ が成り立つ。

補題 $\alpha \le \varepsilon$. $p = \{\tau_n | n < \omega\} \in P_\alpha$ とし、各 $n < \omega$ に対し、$\sigma_n \in Cond^\alpha$ が $\tau_n \sim \sigma_n$ をみたしているものとすると、$p' = \{\phi\} \cup \{\sigma_n | n < \omega\} \in P_\alpha$, $p \sim p'$ である。

ここで、Schwanz を定義する。

定義. $\delta \le \varepsilon$, $\alpha \le \varepsilon - \delta$ とする。$\langle [\delta, \delta+\beta) | \beta \le \alpha \rangle$, $\langle e^\delta_\beta | \beta \le \alpha \rangle$,

$\langle \dot{R}^{\delta}_{\beta} \mid \beta \le \alpha \rangle$, $\langle \dot{S}^{\delta}_{\beta} \mid \beta < \alpha \rangle$ が次の条件をみたすとき、これらを、RCS-iteration の（α までの）Schwanz という。

(1) $\restriction[\delta, \delta+\beta) : Cond^{\delta+\beta} \to V^{P_\delta}$ であり、$\tau \in Cond^{\delta+\beta}$ に対し、$\restriction[\delta, \delta+\beta)(\tau)$ を $\tau \restriction [\delta, \delta+\beta)$ と書くと、

(a) $\phi \restriction [\delta, \delta+\beta) = \check{\phi}$

(b) $\tau = \langle 0, \langle \zeta, \dot{\xi} \rangle\rangle$, $\zeta < \delta$, $\dot{\xi} \in dom(\dot{Q}_\zeta)$ のとき、

$$\tau \restriction [\delta, \delta+\beta) = \check{\phi}$$

(c) $\tau = \langle 0, \langle \delta+\zeta, \dot{\xi} \rangle\rangle$, $\zeta < \beta$, $\dot{\xi} \in dom(\dot{Q}_{\delta+\zeta})$ のとき、

$$\tau \restriction [\delta, \delta+\beta) = op(\check{0}, op(\check{\zeta}, (e^{\delta}_{\zeta}(\dot{\xi}))_{P_\delta}))$$

(d) $\tau = \langle \zeta, f \rangle$, $0 < \zeta < \delta+\beta$ で、$\zeta \le \delta$ のとき、

$$\tau \restriction [\delta, \delta+\beta) = \bigcup_{p \in dom(f)} \{ \langle \sigma, r \rangle \in dom(f(p) \restriction [\delta, \delta+\beta)) \times P_\delta \mid r \le p \wedge r \Vdash_{P_\delta} \text{``}\sigma \in f(p) \restriction [\delta, \delta+\beta)\text{''} \}$$

(e) $\tau = \langle \delta+\zeta, f \rangle$, $0 < \zeta < \beta$ のとき、

$$\tau \restriction [\delta, \delta+\beta) = op(\check{\zeta}, \dot{t}_f)$$

ここで、

$$\dot{t}_f = \{ \langle op(p \restriction [\delta, \delta+\zeta), f(p) \restriction [\delta, \delta+\beta)), p \restriction \delta \rangle \mid p \in dom(f) \}$$

(2) $\dot{R}^{\delta}_{\beta}$ は P_δ-name for a p.o.

(3) $\{ \langle p \restriction [\delta, \delta+\beta), p \restriction \delta \rangle \mid p \in P_{\delta+\beta} \} \subseteq \dot{R}^{\delta}_{\beta}$

ここで、$p \restriction [\delta, \delta+\beta) = \{ \langle \tau \restriction [\delta, \delta+\beta), p \restriction \delta \rangle \mid \tau \in p \}$

(4) $e^{\delta}_{\beta} : P_{\delta+\beta} \to P_\delta * \dot{R}^{\delta}_{\beta}$, $e^{\delta}_{\beta}(p) = \langle p \restriction \delta, p \restriction [\delta, \delta+\beta) \rangle$ であり、かつ、

$$\forall p_1, p_2 \in P_{\delta+\beta} (p_1 \le p_2 \leftrightarrow e^{\delta}_{\beta}(p_1) \le e^{\delta}_{\beta}(p_2))$$

(5) $\forall r \in P_\delta \, \forall \mathring{x} \in V^{P_\delta} [(r \Vdash_\delta \text{“} \mathring{x} \in \mathring{R}^\delta_\beta \text{”})$

$\rightarrow \exists p \in P_{\delta+\beta} (p|\delta = r \wedge r \Vdash_\delta \text{“} p|[\delta, \delta+\beta) \sim \mathring{x} \text{ in } \mathring{R}^\delta_\beta \text{”})]$

(6) $\mathring{S}^\delta_\beta = (e^\delta_\beta(\mathring{Q}_{\delta+\beta}))_{P_\delta}$

(7) $1 \Vdash_\delta$ “$\langle \mathring{R}^\delta_\beta \mid \beta \leq \alpha \rangle, \langle \mathring{S}^\delta_\beta \mid \beta < \alpha \rangle$ は RCS-iteration”

(1)-(5) は全ての $\beta \leq \alpha$ についての主張であり、(6) は全ての $\beta < \alpha$ についての主張である。また、

$$\langle \mathring{R}^\delta_\beta \mid \beta \leq \alpha \rangle = \{ op(\check{\beta}, \mathring{R}^\delta_\beta) \mid \beta \leq \alpha \} \in V^{P_\delta}$$

と考える。$\langle \mathring{S}^\delta_\beta \mid \beta < \alpha \rangle$ についても同様である。

注意. (1). 上の定義の (1)-(c) において、$e^\delta_\zeta(\mathring{q})$ は $P_\delta * \mathring{R}^\delta_\zeta$-name である。また、(d) においては、$P_\zeta \lessdot P_\xi$ なので、dom(f) は P_δ の antichain である。

(2). 定義の (4), (5) により、e^δ_β は dense embedding である。

(3). $e^\delta_\beta, \mathring{R}^\delta_\beta, \mathring{S}^\delta_\beta$ を単に、$e_\beta, \mathring{R}_\beta, \mathring{S}_\beta$ と書くこともある。

定理. $\delta \leq \varepsilon$ とする。$\alpha \leq \varepsilon - \delta$ に対し、α までの Schwanz

$$\langle \Pi[\delta, \delta+\beta) \mid \beta \leq \alpha \rangle, \langle e_\beta \mid \beta \leq \alpha \rangle, \langle \mathring{R}_\beta \mid \beta \leq \alpha \rangle, \langle \mathring{S}_\beta \mid \beta < \alpha \rangle$$

が存在する。特に $\alpha = \varepsilon - \delta$ とすると、

$$e_{\varepsilon-\delta} : P_\varepsilon \xrightarrow[\text{dense}]{} P_\delta * \mathring{R}_{\varepsilon-\delta}$$

$1 \Vdash_\delta$ “$\langle \mathring{R}_\beta \mid \beta \leq \varepsilon - \delta \rangle, \langle \mathring{S}_\beta \mid \beta < \varepsilon - \delta \rangle$ は RCS-iteration”

証明は、$\alpha \leq \varepsilon - \delta$ についての帰納法による。

参考文献

S. Shelah, Iterated forcing and changing cofinalities, Israel J. of Math. 40 (1981) pp. 1-32.

〃 Proper Forcing. Lecture Notes in Mathematics, 940. Springer (1982) pp. 304-353