

自動証明における自然な三段論法の導入について
($(LJ + \text{排中律})$ 証明への変換アルゴリズムによる)

名工大 大芝 猛 (Takeshi Oshiba)

1 階述語論理の手えられた論理式 A_0 に対し、妥当性検証手続を適用し、もし肯定的に終了するときには、そのとき得られる *guide* 情報を利用して " $\rightarrow A_0$ " に到る *cut-free* な LK 証明図を試行錯誤なく書き上げるアルゴリズムを提示した ([1], [2]) が、更に、人間の理解しやすい証明形式 (NK 等) へ変換するアルゴリズムを連結し、自然な証明を一貫した自動証明手続きで得ることへのアプローチを問題とする。このとき問題となるのは、LK 証明図の要素が " $A_1, \dots, A_m \rightarrow B_1, \dots, B_n$ " のように、一般に右辺も複数個である *sequent* ($A_1 \& \dots \vee A_m \Rightarrow B_1 \vee \dots \vee B_n$ の意味をもつ) で、各段階の LK 推論が必ずしも自然で理解しやすいとはいえないことである。そこで LK 証明図をまず "右辺が高々 1 つの LJ 型 *sequent*" と "排中律 (型公理)" および LJ 型 *cut* (三段論法) を用いる証明図 ($(LJ + (\text{排中律}))$ 型) に変換するアルゴリズムの 1 つを提示する。そしてこれによ

つて得られた証明図が人による自然な証明の1つの型を近接していることを示す。

§ 1. 排中律及び三段論法を用いる証明の1つの型

人による証明の1例として次のものを取り上げる。

$\exists x \forall y (P(x) \supset P(y)) (\because B)$ の証明.

まず $\forall z P(z) (\because E)$ なる formula に着目する。

(case 1) $\forall z P(z) (\because E)$ が成立する場合: 任意の b に対し

$P(b)$ が成立する。従つて、任意の a に対し $P(a) \supset P(b)$ 成立。

従つて、 $\forall y (P(a) \supset P(y))$ 成立。故に $\exists x \forall y (P(x) \supset P(y))$ 成立。

(case 2) $\neg \forall z P(z) (\because \neg E)$ が成立する場合: このとき同様の

$\exists z \neg P(z) (\because E')$ が成立。かかる z の1つを b とおく。従つて、

$\neg P(b)$ 成立。このとき更に $P(b)$ を仮定すれば矛盾。

従つて、任意の c に対し $P(b) \supset P(c)$ 。故に $\forall y (P(b) \supset P(y))$ 。

従つて $\exists x \forall y (P(x) \supset P(y))$ が成立。

即ち、(二者択一のいずれの場合にも) $\exists x \forall y (P(x) \supset P(y)) (\because B)$ 成立。

以上の証明を整理すると、次のようになる。

まず、 $E = \forall z P(z)$ なる formula に着目。

1) $E \Rightarrow B$ 2) $\neg E \Rightarrow B$ を示す。

従つて、 $(E \vee \neg E) \Rightarrow B$ が成立。

一方、 $E \vee \neg E$ (排中律) が成立。 \downarrow

従つて、三段論法により B が成立。

自動証明においても、自然な証明への近接には上記 E (key formula) をつかはさるかのアルゴリズムが問題となる。

本稿の変換アルゴリズムはこれに対する一つの解答を与えるものである。([2] によるLK証明図作成の前提の下で。)

§2 変換アルゴリズムの概要

(1) 論理式 A_0 に対し、“妥当性検証手続証明図作成アルゴリズム”によって得る“ $\rightarrow A_0$ ”に到るLK証明図は *end sequent* は \rightarrow の右辺に唯一つの論理式 A_0 をもつにかかわらず、証明図の中間には右辺に複数個の論理式をもつ非LJ型 *sequent* が一般に現われる。そしてその原因は次の4種の非LJ型推論によって、右辺の論理式が上から下へと減少するからである。

cont. 右	非LJ \supset 右	非LJ \supset 右	非LJ cut
$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, B, B}{\Gamma \rightarrow \Delta, B}$	$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, B}{\supset B, \Gamma \rightarrow \Delta}$	$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, B \quad C, \Gamma \rightarrow \Delta}{B \supset C, \Gamma \rightarrow \Delta}$	$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, B \quad B, \Pi \rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Pi \rightarrow \Delta, \Lambda}$
($ \Delta \geq 0$)	($ \Delta \geq 1$)	($ \Delta \geq 1$)	($ \Delta \geq 1$)

そこで、(LJ+排中律)証明図への変換アルゴリズムとしては、まず“ $\rightarrow A_0$ ”に到るLK証明図から上記4種の右辺減少推論すべてを除去、結果としてLJ型 *sequent* のみをもつ“ $\rightarrow A_0$ ”に到る証明図へ変換しようとする。そしてこの変換消去の過程で“排中律の拡張としての $\rightarrow E \vee E'$ ($E' \equiv \supset E$) なる始式 *sequent*”とその *cut* 推論(三段論法)による消去が自然な形で現われる。

そしてこの過程では $LK^* [= LK + (\rightarrow E \vee E' \text{ 型公理})]$ が用いられ、変換の結果得られる証明図は " $B \rightarrow B$ 型始式公理" と " $\rightarrow E \vee E'$ 型始式公理" から " LJ 推論を用いて $\rightarrow A_0$ に到る $LJ^* [= LJ + (\rightarrow E \vee E')]$ 証明図" となる。そして更に $\rightarrow E \vee E'$ の ($LJ +$ 排中律) 証明図を始式 $\rightarrow E \vee E'$ の上加えるならば、最終結果として " $\rightarrow A_0$ " の ($LJ +$ 排中律) 証明図を得ることが出来る。但し自然な見やすい証明というときは、この最終の結合を行わず " $\rightarrow A_0$ に到る ($LJ + (\rightarrow E \vee E')$) 証明" までとし、別途 " $\rightarrow E \vee E'$ と $\rightarrow E' \equiv \neg E$ が証明可能なことを付記するのがよいと考える。

(2) 右辺減少非 LJ 型推論の消去に用いる lemma

前項で述べた非 LJ 型推論の消去に次の "sequent 分離に対する証明図分離を導ぶ lemma" を用いる。

[lemma] $\frac{}{LK^*} \Gamma \rightarrow \Delta \dots (*1)$ なるとき、 $\Gamma \rightarrow \Delta$ を 2 つの sequent $\Phi \rightarrow \Psi$ と $\Theta \rightarrow \Sigma$ に分離する ($\Phi \subseteq \Gamma, \Psi \subseteq \Delta; \Theta = \Gamma - \Phi, \Sigma = \Delta - \Psi$)。

このとき $E' \equiv \neg E$ なる 2 つの formula E, E' があって、 $\frac{}{LK^*} \Gamma, \Phi \rightarrow \Psi \dots (*2), \frac{}{LK^*} \Gamma, \Theta \rightarrow \Sigma \dots (*3)$ となる。更にこれは " $(*1)$ に到る証明図 P " から " $(*2), (*3)$ に到る証明図 Q, R " への次の (i), (ii) をみたす変換として実現される。

(i) "非 LJ 型の (\neg 左, \neg 右, cut) 推論は存在しない" という性質は保存される。

(ii) "contraction 右の回数は P 内の合計と Q, R 内の合計は等しい。

(3) 上述の lemma を用いる 非LJ型推論の消去 は(才1段階)として、非LJ型(→左, ⊃左, cut)の消去を上から順次行い、その終了後(才2段階)として、contraction右の消去を下から順次行う方法による。消去の考え方を(才2段階)の場合に説明する。(但し、(才1段階)で lemma を用い非LJ型(→左, ⊃左, cut)は消去済みとする。このとき、“→A₀”に到る証明図の最下の contraction右... (I) は次の形をしてゐる。

$$P_0 \left\{ \begin{array}{l} IP \left\{ \begin{array}{l} \Gamma \rightarrow B, B \text{ --- } (*1) \\ \Gamma \rightarrow B \\ \vdots \\ \rightarrow A_0 \end{array} \right. \text{--- } I \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{この(I)の上式} \text{“}\Gamma \rightarrow B, B\text{”と} \\ \text{“}\rightarrow B\text{”と} \\ \text{“}\Gamma \rightarrow B\text{”に分離する。} \Gamma \rightarrow B, B \dots (*1) \\ \text{に到る証明図: } IP \text{ (才1段から非LJ} \\ \text{(}\rightarrow\text{左, } \supset\text{左, cut)なし)} \end{array}$$

(→左, ⊃左, cut)なし) に対し, (lemma)から dualな E, E' があつて, “E → B... (*2)”に到るLK*証明図 Q”と “E', Γ → B... (*3)”に到るLK*証明図 R”が構成される。そして(i)から“非LJ型(→左, ⊃左, cut)なし”の性質が, Q, Rに受けつがれ, (ii)から Q, R内の contraction右の個数の合計は Pの個数と変わらない。

従つて下図のように, 排中律的公理 →E ∨ E' を用い I を消

$$P'_0 \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \text{増左} \\ \text{換左} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} Q \left\{ \begin{array}{l} E \rightarrow B \text{ --- } (*2) \\ \vdots \end{array} \right. \\ \hline E, \Gamma \rightarrow B \end{array} \right. \quad R \left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \\ E', \Gamma \rightarrow B \text{ --- } (*3) \end{array} \right. \\ \hline \rightarrow E \vee E' \quad (V\text{左}) \quad \hline E \vee E', \Gamma \rightarrow B \quad (LJ \text{ cut}) \\ \hline \Gamma \rightarrow B \\ \vdots \\ \rightarrow A_0 \end{array} \right.$$

去するならば, 証明図全体 P_0' としては contraction 右 の個数は1つ減少する。この過程を下方の contraction 右 から順次適用すれば, それらのすべての消去が可能である。

(4) $\rightarrow E \equiv \neg E$ であることから, $\rightarrow E \vee E'$ は排中律を意味する と考え, (*2), (*3) に到る \mathcal{Q} と \mathcal{R} は, " $E, \neg E$ のそれぞれの場合に分けて $\Gamma \rightarrow B$ を証明する" ことを意味し, 更に "従って, 常に $\Gamma \rightarrow B$ が成立する" と推論をすゝめることに対応する。この意味で, \rightarrow に導入される "cut" も自然と考えられる。

更に $\rightarrow E \vee E'$ 自体の証明を $(LJ + \text{排中律}) = LJ^{\oplus}$ 体系で作成するので, これを (3) で述べた $(LJ + (\rightarrow E \vee E'))$ 証明図に結合するならば, 最終的に LJ^{\oplus} への変換アルゴリズムも得る。

§ 3 sequent 分離に対応する証明図分離の lemma

前 "変換アルゴリズムの概要" の項に述べた非LJ型推論の消去に用いる lemma を諸概念の定義と共に セ>拡張した形で 記述し, その証明を行う。

○ $\Gamma \rightarrow \Delta$ に到る LK^* 証明図 とは $A_i \rightarrow A_i (i=1, \dots, k), \rightarrow E_j \vee E_j'$ ($j=1, \dots, l$) なる形の公理 sequent と最上部にもち, 途中はLK推論によって $\Gamma \rightarrow \Delta$ を導く sequent の樹状堆積である (また LJ^* 証明図の定義は上記記述のLKをLJに変えて得る)

○ $\Gamma \rightarrow \Delta$ に到る証明図 \mathcal{P} と

$\mathcal{P}[\Gamma \rightarrow \Delta]$, または $\mathcal{P} \left\{ \begin{array}{l} \diagdown \diagup \\ \Gamma \rightarrow \Delta \end{array} \right.$ 等とかく。

更に最下の推論 I に注目するときには、次のようにかく。

$$IP \left\{ \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ P_1 \end{array} \rightarrow \Delta_1}{\Gamma \rightarrow \Delta} I \text{ (非分岐型)}, IP \left\{ \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ P_1 \end{array} \rightarrow \Delta_1, \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ P_2 \end{array} \rightarrow \Delta_2}{\Gamma \rightarrow \Delta} I \text{ (分岐型)}$$

○ “dual な formula”: 論理記号 \neg はなく、 \neg は素論理形式の前以外には現われない論理式 E に対し、 E' を E 内の $\wedge, \vee, \exists, \forall$ と $\vee, \wedge, \exists, \forall$ にそれぞれとりかえ、素論理形式の直前に \neg があれば除き、なければ \neg をつけ加えてうる論理式とする。

この E' を E の “dual な論理式” と呼ぶ。但し以下では単に dual な論理式 と略称する。勿論 $E'' = E, E' \equiv \neg E$ である。

○ 親論理式: 推論 I の下式の主論理式 C に対し上式の副論理式 D は親である。また推論 II の下式の $\Gamma, \Delta, \Pi, \wedge$ 等で書かれた列に属する論理式 C に対し上式の同じ式の同じ位置の C を親という。

○ sequent $\Gamma \rightarrow \Delta$ の分離

$\Phi \subseteq \Gamma, \Psi \subseteq \Delta$; $\Theta = \Gamma - \Phi, \Sigma = \Delta - \Psi$ のとき, “ $\Phi \rightarrow \Psi$; $\Theta \rightarrow \Sigma$ ” を sequent $\Gamma \rightarrow \Delta$ の ($\Phi \rightarrow \Psi$ による) 分離と呼び

$$\Gamma \rightarrow \Delta = (\Phi \rightarrow \Psi; \Theta \rightarrow \Sigma) \text{ 等とかく。}$$

[lemma] LK^{*}証明図 $IP[\Gamma \rightarrow \Delta]$ が与えられたとき, 最下の sequent の分離 $\Gamma \rightarrow \Delta = (\Phi \rightarrow \Psi; \Theta \rightarrow \Sigma)$ に対し, ある 1 対の (dual な) 論理式 $E, E' (\equiv \neg E)$ があって, 2 つの LK^{*}証明図 $Q[E, \Phi \rightarrow \Psi], R[E', \Theta \rightarrow \Sigma]$ を構成しうる。更に,

(1) IP から $(Q; R)$ の作成を変換とみると, 非 LJ 型 (\neg 左,

左, cut) と contraction 右の推論の増加はない。□

(証明) $\mathcal{P}, \Gamma \rightarrow \Delta$ とその分離 $(\Phi \rightarrow \Psi; \Theta \rightarrow \Sigma)$ に対し, dual formula E, E' と 2 つの分離証明図 $\mathcal{Q}[E, \Phi \rightarrow \Psi], \mathcal{R}[E', \Theta \rightarrow \Sigma]$ を求める関数 Π を $h(\mathcal{P})$ (= \mathcal{P} の高さ) により帰納的に定義する。また $\Pi: \mathcal{P} \Rightarrow (\mathcal{Q}; \mathcal{R})$ を変換とみると $\pi(1)$ の成立を帰納的に確かめる。

1. $h(\mathcal{P}[\Gamma \rightarrow \Delta]) = 0$ のとき: $\Gamma \rightarrow \Delta$ は公理、従って,

(1-1) $\Gamma \rightarrow \Delta = B \rightarrow B$, (1-2) $\Gamma \rightarrow \Delta = \rightarrow E \vee E'$ の 2 つの場合あり,

それぞれ分離 $(\Phi \rightarrow \Psi; \Theta \rightarrow \Sigma)$ の形が 4 種と 2 種ある。

\mathcal{P} $\Gamma \rightarrow \Delta$	$(\Phi \rightarrow \Psi; \Theta \rightarrow \Sigma)$	\mathcal{Q} $E, \Phi \rightarrow \Psi$	\mathcal{R} $E', \Theta \rightarrow \Sigma$	
1)	$B \rightarrow B$	$(B \rightarrow B; \rightarrow)$	$t, B \rightarrow B$	$f \rightarrow$
2)	"	$(B \rightarrow; \rightarrow B)$	$\neg B, B \rightarrow$	$B \rightarrow B$
3)	"	$(\rightarrow B; B \rightarrow)$	$B \rightarrow B$	$\neg B, B \rightarrow$
4)	"	$(\rightarrow; B \rightarrow B)$	$f \rightarrow$	$t, B \rightarrow B$
5)	$\rightarrow E \vee E'$	$(\rightarrow E \vee E'; \rightarrow)$	$t \rightarrow E \vee E'$	$f \rightarrow$
6)	"	$(\rightarrow; \rightarrow E \vee E')$	$f \rightarrow$	$t \rightarrow E \vee E'$

但し, t, f はそれぞれ $B \vee \neg B, B \wedge \neg B$ とする, 11 通りの場合も \mathcal{Q}, \mathcal{R} 欄は LJ 証明可能で, 2 の修飾してうる LJ (従って LK*) 証明

図 \mathcal{Q}, \mathcal{R} を上表の E, E' と共に Π の値と定める。

1) の場合は:

$$\mathcal{Q} \left\{ \frac{B \rightarrow B}{B \vee \neg B, B \rightarrow B} \right. ; E = t$$

$$\mathcal{R} \left\{ \frac{\frac{B \rightarrow B}{\neg B, B \rightarrow}}{B \wedge \neg B, B \rightarrow} \right. ; E' = f$$

また, これら \mathcal{Q}, \mathcal{R} に非 LJ 推論

はるため (1) は成立している。

(2) $h(P(P \rightarrow \Delta)) > 0$ のとき: Π は 1) $\Pi \uparrow$, 2) Π , 3) $\Pi \downarrow$ の 3 つの部分に分け, この順に計算する. (但し 2) は再帰計算過程)

1) まず証明図 P と最下の式 $P \rightarrow \Delta$ の分離 $(\Phi \rightarrow \Psi; \Theta \rightarrow \Sigma)$ が与えられたとき, P の最下の推論 (I) $\frac{P_1 \rightarrow \Delta_1, (P_2 \rightarrow \Delta_2)}{P \rightarrow \Delta}$ に着目, 上式 $P_i \rightarrow \Delta_i$ とそれに到る部分証明図 P_i をとり出す ($i=1, 2$). また $P \rightarrow \Delta$ の分離 $(\Phi \rightarrow \Psi; \Theta \rightarrow \Sigma)$ の $\Phi \rightarrow \Psi$ の方の親を Φ とし, $P_i \rightarrow \Delta_i$ 内の $\Phi_i \rightarrow \Psi_i$ が Φ となり, $P_i \rightarrow \Delta_i$ の分離 $(\Phi_i \rightarrow \Psi_i; \Theta_i \rightarrow \Sigma_i)$ ($i=1, 2$) が与えられる.

分離により得られる 2 つの推論を J, K と indicate する. 即ち,

$$(J) \frac{\Phi_1 \rightarrow \Psi_1, (\Phi_2 \rightarrow \Psi_2)}{\Phi \rightarrow \Psi}, \quad (K) \frac{\Theta_1 \rightarrow \Sigma_1, (\Theta_2 \rightarrow \Sigma_2)}{\Theta \rightarrow \Sigma} \quad \text{このような情報を}$$

とり出す関数を $\Pi \uparrow$ とする (下式分離から上式分離導入計算). 即ち,

$$\begin{aligned} & \Pi \uparrow (P, P \rightarrow \Delta, (\Phi \rightarrow \Psi; \Theta \rightarrow \Sigma)) \\ &= \left((P_1, P_1 \rightarrow \Delta_1, (\Phi_1 \rightarrow \Psi_1; \Theta_1 \rightarrow \Sigma_1)), (P_2, P_2 \rightarrow \Delta_2, (\Phi_2 \rightarrow \Psi_2; \Theta_2 \rightarrow \Sigma_2)) \right); \\ & \quad I, (J; K). \end{aligned}$$

ここに, (I) の主論理式が $\Phi \rightarrow \Psi, \Theta \rightarrow \Sigma$ のいずれに属するかによって, ① $J=I, K: \text{dummy}$ または ② $J: \text{dummy}, K=I$ となる.

2) 次に ($h(P_i) < h(P)$ に注意し), $P_i, P_i \rightarrow \Delta_i$ とその分離 $(\Phi_i \rightarrow \Psi_i; \Theta_i \rightarrow \Sigma_i)$ に Π 自身を再帰適用する計算に進む.

$$\begin{aligned} & \Pi (P_i, P_i \rightarrow \Delta_i, (\Phi_i \rightarrow \Psi_i; \Theta_i \rightarrow \Sigma_i)) \\ &= \left((Q_i [E_i, \Phi_i \rightarrow \Psi_i], E_i), (R_i [E'_i, \Theta_i \rightarrow \Sigma_i], E'_i) \right) (i=1, 2). \end{aligned}$$

3) さてに 2) で得られた 2 つの証明図 Q_i, R_i 及び E_i, E'_i と 1) で得られた推論 J, K を用いて, 目的の dual

formula E, E' と IP の分離 $Q[E, \Phi \rightarrow \Psi]; IR[E', \Theta \rightarrow \Sigma]$ を構成する。この関数を $\Pi \downarrow$ とする (証明図分離の下方延伸)。即ち,

$$\begin{aligned} & \Pi \downarrow ((Q_1, E_1; Q_2, E_2), J), (IR_1, E_1'; IR_2, E_2'), K) \\ &= (E; Q \left\{ (J) \frac{Q_1 \left\{ E_1, \Phi_1 \rightarrow \Psi_1 \right\}, Q_2 \left\{ E_2, \Phi_2 \rightarrow \Psi_2 \right\}}{E, \Phi \rightarrow \Psi} \right. ; \\ & \quad \left. E'; IR \left\{ (K) \frac{IR_1 \left\{ E_1', \Theta_1 \rightarrow \Sigma_1 \right\}, IR_2 \left\{ E_2', \Theta_2 \rightarrow \Sigma_2 \right\}}{E', \Theta \rightarrow \Sigma} \right. \right) \end{aligned}$$

\rightarrow に演繹過程の組 (J, K) は推論の組 (J, K) から来する。

従って I (IP の最下の推論) から来する。

以下 $\textcircled{1} (J, K) = (I, \text{dummy})$ or $\textcircled{2} (\text{dummy}, I)$ に注意し

$\Pi \downarrow$ の定義を I の種類別に与える,

($\Pi \uparrow$ の定義は“親”の定義から確定する) Π における(1)の帰納的証明には $\Pi \downarrow$ の定義における I の種類別に次の(*)を定めればよい。

(*) $I \Rightarrow (J, K)$ において, “(1)に記載の推論”の増加はない。

(A) I が非分岐のとき (このとき Q_2, IR_2 はない)。

(A-1) I が “ \forall 右, \exists 左以外”の推論”または “ \forall 右, \exists 左推論”

eigen variable が E_1 になり (このとき E_1' にもなり)”とき:

$$E = E_1, E' = E_1' \text{ とし,}$$

$$Q \left\{ (J) \frac{Q_1 \left\{ E_1, \Phi_1 \rightarrow \Psi_1 \right\}}{E_1, \Phi \rightarrow \Psi} \right. ; IR \left\{ (K) \frac{IR_1 \left\{ E_1', \Theta_1 \rightarrow \Sigma_1 \right\}}{E_1', \Theta \rightarrow \Sigma} \right.$$

$I \Rightarrow (J, K) (= (J, K))$ において(*)成立。取ら $IP \Rightarrow (Q, IR)$ で(1)成立。

(A-2) I が \forall 右 または \exists 左 で E_1 (従って E_1') が eigen variable (α)

を含むとき:

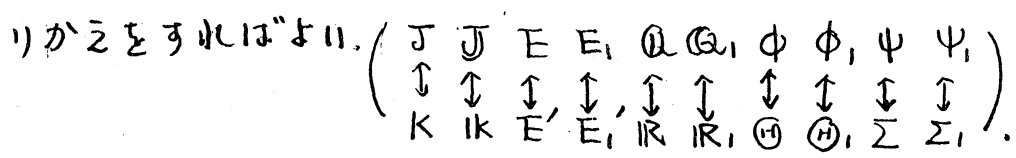
(i) $(J, k) = (I, \text{dummy})$ の場合: $\mathbb{H}_1 \rightarrow \Sigma_1 (= \mathbb{H} \rightarrow \Sigma)$ には α なし.

$E = \forall z E_1(\alpha/z)$, $E' = \exists z E_1'(\alpha/z)$ とし, \mathbb{Q}, \mathbb{R} は次のようにする.

$$\mathbb{Q} \left\{ \begin{array}{l} (\mathbb{J}) \left\{ \begin{array}{l} (\forall \text{左}) \frac{\mathbb{Q}_1 \left\{ \begin{array}{l} E_1, \phi_1 \rightarrow \psi_1 \\ \vdots \\ \forall z E_1(\alpha/z), \phi_1 \rightarrow \psi_1 \end{array} \right.}{\forall z E_1(\alpha/z), \phi_1 \rightarrow \psi_1} \\ (\mathbb{J}) \frac{\quad}{\forall z E_1(\alpha/z), \phi_1 \rightarrow \psi_1} \\ (\exists \text{左}) \frac{\quad}{\forall z E_1(\alpha/z), \phi_1 \rightarrow \psi_1} \end{array} \right. \\ (\mathbb{I}) \frac{\quad}{\forall z E_1(\alpha/z), \phi_1 \rightarrow \psi_1} \end{array} \right. ; \mathbb{R} \left\{ \begin{array}{l} (\mathbb{K}) = (\exists \text{左}) \frac{\mathbb{R}_1 \left\{ \begin{array}{l} E_1', \mathbb{H}_1 \rightarrow \Sigma_1 \\ \vdots \\ \exists z E_1'(\alpha/z), \mathbb{H}_1 \rightarrow \Sigma_1 \end{array} \right.}{\exists z E_1'(\alpha/z), \mathbb{H}_1 \rightarrow \Sigma} \end{array} \right.$$

(*) の成立は明らか.

(ii) $(J, k) = (\text{dummy}, I)$ の場合: (i) の記述において, 次のと



(B) I が命題推論のとき: (= のとき, $\mathbb{Q}_1, \mathbb{Q}_2, \mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2$ あり.)

(B-1) I が cut 以外 (\wedge 右, \vee 左, \supset 左) のとき:

(i) $(J, k) = (I, \text{dummy})$ のとき: $E = E_1 \wedge E_2$, $E' = E_1' \vee E_2'$ とし,

$$\mathbb{Q} \left\{ \begin{array}{l} (\mathbb{J}) \left\{ \begin{array}{l} (\wedge \text{左}) \frac{\mathbb{Q}_1 \left\{ \begin{array}{l} E_1, \phi_1 \rightarrow \psi_1 \\ \vdots \\ E_1 \wedge E_2, \phi_1 \rightarrow \psi_1 \end{array} \right.}{E_1 \wedge E_2, \phi_1 \rightarrow \psi_1} \quad (\wedge \text{右}) \frac{\mathbb{Q}_2 \left\{ \begin{array}{l} E_2, \phi_2 \rightarrow \psi_2 \\ \vdots \\ E_1 \wedge E_2, \phi_2 \rightarrow \psi_2 \end{array} \right.}{E_1 \wedge E_2, \phi_2 \rightarrow \psi_2} \\ (\mathbb{J}) \frac{\quad}{E_1 \wedge E_2, \phi_1 \rightarrow \psi_1} \\ (\exists \text{左}) \frac{\quad}{E_1 \wedge E_2, \phi_1 \rightarrow \psi_1} \end{array} \right. \\ (\mathbb{I}) \frac{\quad}{E_1 \wedge E_2, \phi_1 \rightarrow \psi_1} \end{array} \right. ; \mathbb{R} \left\{ \begin{array}{l} (\mathbb{K}) = (\vee \text{左}) \frac{\mathbb{R}_1 \left\{ \begin{array}{l} E_1', \mathbb{H}_1 \rightarrow \Sigma_1 \\ \vdots \\ E_1' \vee E_2', \mathbb{H}_1 \rightarrow \Sigma_1 \end{array} \right.}{E_1' \vee E_2', \mathbb{H}_1 \rightarrow \Sigma_1} \quad \mathbb{R}_2 \left\{ \begin{array}{l} E_2', \mathbb{H}_2 \rightarrow \Sigma_2 \\ \vdots \\ E_1' \vee E_2', \mathbb{H}_2 \rightarrow \Sigma_2 \end{array} \right.}{E_1' \vee E_2', \mathbb{H}_1 \rightarrow \Sigma_1} \\ (\mathbb{K}) = (\vee \text{左}) \frac{\quad}{E_1' \vee E_2', \mathbb{H}_1 \rightarrow \Sigma_1} \end{array} \right.$$

($\mathbb{H}_1 \rightarrow \Sigma_1 = \mathbb{H}_2 \rightarrow \Sigma_2 = \mathbb{H} \rightarrow \Sigma$).

(ii) $(J, k) = (\text{dummy}, I)$ のとき: (i) の記述において (A-2)(ii)

と同様をとりかえを行う. 但し $\mathbb{Q}_2 \leftrightarrow \mathbb{R}_2, \phi_2 \leftrightarrow \mathbb{H}_2, \psi_2 \leftrightarrow \Sigma_2$ を追加.

(*) の成立も明らかである。

(B-2) I が cut のとき: IP は次のようにかける。

$$IP \left\{ (I) \frac{\mathbb{P}_1 \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \Gamma_1 \rightarrow \Delta_1^*, D \end{array} \right\} \quad \mathbb{P}_2 \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ D, \Gamma_2^* \rightarrow \Delta_2 \end{array} \right\}}{\Gamma_1, \Gamma_2^* \rightarrow \Delta_1^*, \Delta_2} (cut) \right.$$

$\Gamma \rightarrow \Delta = \Gamma_1, \Gamma_2^* \rightarrow \Delta_1^*, \Delta_2$ の分離 $= (\phi \rightarrow \psi; \Theta \rightarrow \Sigma)$ につき

ϕ の Γ_1, Γ_2^* 部分を ϕ_1, ϕ_2 ; ψ の Δ_1^*, Δ_2 部分を ψ_1, ψ_2 とおく。
 Θ の Γ_1, Γ_2^* 部分を Θ_1, Θ_2^* ; Σ の Δ_1^*, Δ_2 部分を Σ_1^*, Σ_2 とおく。

$\Pi \uparrow$ の定義から、
 $\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_1 \rightarrow \Delta_1^*, D \text{ の分離は } (\phi_1 \rightarrow \psi_1; \Theta_1 \rightarrow \Sigma_1^*, D), \\ D, \Gamma_2^* \rightarrow \Delta_2 \text{ の分離は } (\phi_2 \rightarrow \psi_2; D, \Theta_2^* \rightarrow \Sigma_2). \end{array} \right.$

それぞれに Π を適用、 $\left\{ \begin{array}{l} dual(E_1, E_1' \text{ と } \mathbb{P}_1 \Rightarrow (Q_1; R_1)) \\ dual(E_2, E_2' \text{ と } \mathbb{P}_2 \Rightarrow (Q_2; R_2)) \end{array} \right\}$ をうる。

そこで、この場合の $\Pi \downarrow$ の定義は次のようにする。

$E = E_1 \vee E_2, E' = E_1' \wedge E_2'$ とし、 Q, R は次のようにする。

$$Q \left\{ (V\text{左}) \frac{\mathbb{Q}_1 \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ E_1, \phi_1 \rightarrow \psi_1 \end{array} \right\} \quad \mathbb{Q}_2 \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ E_2, \phi_2 \rightarrow \psi_2 \end{array} \right\}}{E_1, \phi_1, \phi_2 \rightarrow \psi_1, \psi_2} \left(\begin{array}{c} \text{weak.左} \\ \text{右} \\ \text{exch.左} \\ \text{右} \end{array} \right) \quad \left. \begin{array}{c} \mathbb{Q}_2 \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ E_2, \phi_2 \rightarrow \psi_2 \end{array} \right\} \\ E_2, \phi_1, \phi_2 \rightarrow \psi_1, \psi_2 \end{array} \right\} (J)$$

$$R \left\{ (I) \frac{\mathbb{R}_1 \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ E_1', \Theta_1 \rightarrow \Sigma_1^*, D \end{array} \right\} \quad \mathbb{R}_2 \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ D, E_2', \Theta_2^* \rightarrow \Sigma_2 \end{array} \right\} (exch.左)}{E_1', \Theta_1, E_2', \Theta_2^* \rightarrow \Sigma_1^*, \Sigma_2} (cut) \left. \begin{array}{c} \mathbb{R}_2 \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ D, E_2', \Theta_2^* \rightarrow \Sigma_2 \end{array} \right\} \\ E_1', \Theta_1, E_2', \Theta_2^* \rightarrow \Sigma_1^*, \Sigma_2 \end{array} \right\} (K)$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{exch.左} \\ \wedge \text{左} \\ \text{cont.左} \end{array} \right) \frac{E_1' \wedge E_2', \underbrace{\Theta_1, \Theta_2^*}_{\Theta} \rightarrow \underbrace{\Sigma_1^*, \Sigma_2}_{\Sigma}}$$

$I \Rightarrow (J, K)$ において、増加する推論に“(*)”に記述のものを
 従って(*)成立。

§4 LK証明図の (LJ + (→E'VE')) (= LJ*) 証明図への変形アルゴリズム

論理式 A_0 の LK証明図 $P_0 [\rightarrow A_0]$ に対し前節で示した Lemmaを用い, (才1段) P_0 内の非LJ型 (→左, ⊃左, cut) を上から順次消去した証明図 $S_0 [\rightarrow A_0]$ を作り, (才2段) $S_0 P_1$ の contraction右を下から順次消去し目的の証明図を作る。

(才1段) $P_0 [\rightarrow A]$ 内の非LJ型 (→左, ⊃左, cut) の最上部の1つ I に着目, I の上部を P_1 とする。

(Case 1) I : 非LJ型 →左 = P_1 最下式 $\Gamma \rightarrow \Delta, B \text{ E } (\rightarrow B; \Gamma \rightarrow \Delta)$

$$P_0 \left\{ \begin{array}{l} P_1 \left\{ \begin{array}{l} \Gamma \rightarrow \Delta, B \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right. \\ \text{(I)} \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, B}{\rightarrow B, \Gamma \rightarrow \Delta} \quad (|\Delta| \geq 1) \\ \vdots \\ \rightarrow A_0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{と分離, lemma を適用してうる証明図を} \\ Q_1 [E_1 \rightarrow B], R_1 [E'_1, \Gamma \rightarrow \Delta] \text{ とする。} \\ P_1 \text{ に非LJ型 (→左, ⊃左, cut) なし, 故に} \\ Q_1, R_1 \text{ も同じ性質をもつ。かつ contraction 右の個数は不変。} \end{array}$$

$$P'_0 \left\{ \begin{array}{l} Q_1 \left\{ \begin{array}{l} E \rightarrow B \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right. \quad \text{(LJ型 →左)} \\ \text{(I')} \frac{E \rightarrow B}{\rightarrow B, E \rightarrow} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{Weak's} \\ \text{exch.'s} \end{array} \rightarrow R_1 \left\{ \begin{array}{l} E'_1, \Gamma \rightarrow \Delta \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right. \\ \frac{E, \rightarrow B, \Gamma \rightarrow \Delta}{\rightarrow E'VE'} \quad \leftarrow \frac{E'_1, \Gamma \rightarrow \Delta}{\rightarrow E'_1, \Gamma \rightarrow \Delta} \quad \text{(V左) とすれば, 非LJ型} \\ \frac{\rightarrow E'VE' \quad E'VE', \rightarrow B, \Gamma \rightarrow \Delta}{\rightarrow B, \Gamma \rightarrow \Delta} \quad \text{(LJ型 cut) (→左, ⊃左, cut)} \\ \vdots \\ \rightarrow A_0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{左図のように} \\ \text{推論を追加し, } P'_0 \\ \text{は1つだけ減少} \\ \text{する。(IがLJ型のI'となる。)} \end{array}$$

(Case 2) I が非LJ型 ⊃左のとき: I の左上部 $P_1 [\Gamma \rightarrow \Delta, B]$

$$P_0 \left\{ \begin{array}{l} P_1 \left\{ \begin{array}{l} \Gamma \rightarrow \Delta, B \quad C \quad \Gamma \rightarrow \Delta \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right. \quad P_2 \\ \text{(I)} \frac{B \supset C, \Gamma \rightarrow \Delta}{\rightarrow B, \Gamma \rightarrow \Delta} \quad (|\Delta| \geq 1) \\ \vdots \\ \rightarrow A_0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{につま } \Gamma \rightarrow \Delta, B \text{ の分離} \\ (\rightarrow B; \Gamma \rightarrow \Delta) \text{ に lemma} \\ \text{を適用, } Q_1, R_1 \text{ をうる。} \end{array}$$

これらと P_2 を用いて P_0' を下のように構成。 (Weak.左, exch.左)

$$P_0' \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{Q}_1 \left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \\ E \rightarrow B \quad B, B \supset C \rightarrow C \end{array} \right. \quad P_2 \left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \\ C, \Gamma \rightarrow \Delta \end{array} \right. \quad R_1 \left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \\ E', \Gamma \rightarrow \Delta \end{array} \right. \\ \hline (LJ cut) \quad \frac{E, B \supset C \rightarrow C}{E, B \supset C, \Gamma \rightarrow \Delta} \quad \frac{C, \Gamma \rightarrow \Delta \quad E', \Gamma \rightarrow \Delta}{E', B \supset C, \Gamma \rightarrow \Delta} \\ \hline \rightarrow E \vee E' \quad \frac{E \vee E', B \supset C, \Gamma \rightarrow \Delta}{B \supset C, \Gamma \rightarrow \Delta} \quad (V左) \\ \hline \frac{B \supset C, \Gamma \rightarrow \Delta}{\vdots} \quad (LJ cut) \\ \hline \rightarrow A_0 \quad [(\ast) \text{は LJ で証明可能, LJ(左)は含む}] \end{array} \right.$$

$P_0 \Rightarrow P_0'$ の変形によって, 非LJ型 (\rightarrow 左, \supset 左, cut) のうち非LJ型 \supset 左 (I) が1つ減少する。(contraction右の個数は不変.)

(Case 3) I が非LJ型 cut のとき: P_1 の最下式 $\Gamma \rightarrow \Delta, B$ の分

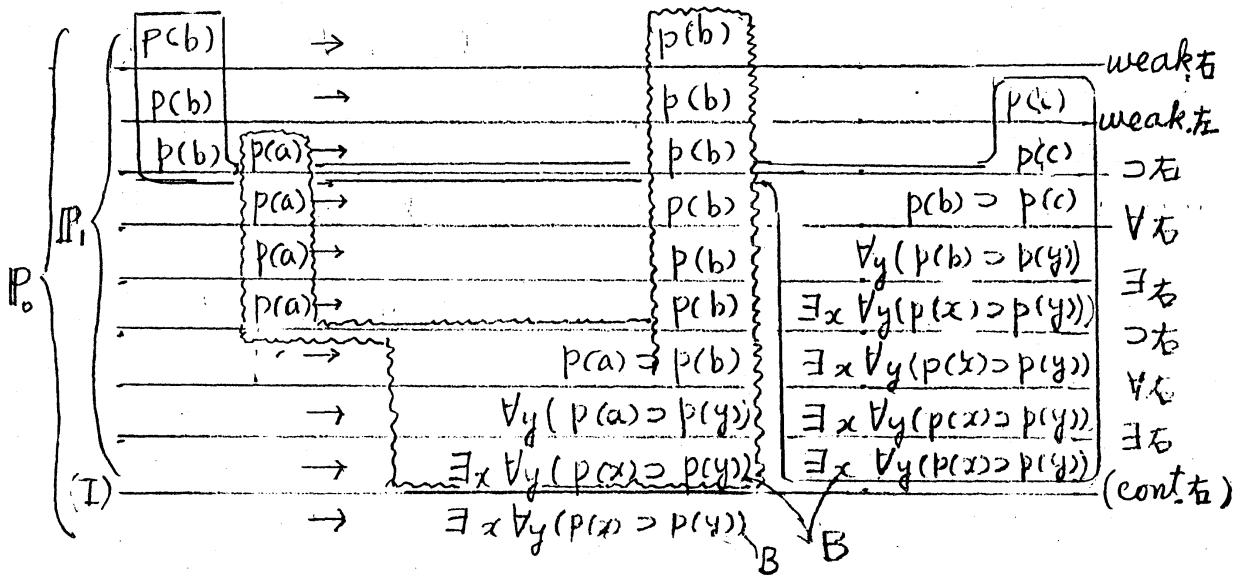
$$P_0 \left\{ \begin{array}{l} P_1 \left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \\ \Gamma \rightarrow \Delta, B \end{array} \right. \quad P_2 \left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \\ B, \Pi \rightarrow \Lambda \end{array} \right. \\ \hline (I) \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, B \quad B, \Pi \rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Pi \rightarrow \Delta, \Lambda} \quad (|\Delta| \geq 1) \\ \hline \rightarrow A_0 \end{array} \right. \quad \text{命題 } (\rightarrow B; \Gamma \rightarrow \Delta) \text{ に lemma} \\ \text{を適用し, } \textcircled{Q}_1 [E \rightarrow B]; \\ \text{ } R_1 [E', \Gamma \rightarrow \Delta] \text{ をうる。} \\ \hline P_0' \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{Q}_1 \left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \\ E \rightarrow B \quad B, \Pi \rightarrow \Lambda \end{array} \right. \quad P_1 \left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \\ E', \Gamma \rightarrow \Delta \end{array} \right. \\ \hline (I') \quad \frac{E, \Pi \rightarrow \Lambda \quad E', \Gamma \rightarrow \Delta}{E, \Gamma, \Pi \rightarrow \Delta, \Lambda} \quad \frac{E', \Gamma, \Pi \rightarrow \Delta, \Lambda}{E', \Gamma, \Pi \rightarrow \Delta, \Lambda} \\ \hline \rightarrow E \vee E' \quad \frac{E \vee E', \Gamma, \Pi \rightarrow \Delta, \Lambda}{\Gamma, \Pi \rightarrow \Delta, \Lambda} \quad (LJ cut) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{これを用いて, } P_0' \text{ のよ} \\ \text{うに変形すれば, 非LJ} \\ \text{型 cut (I) は消去され,} \\ \text{目的を達する。} \end{array} \end{array} \right.$$

(才2段) 才1段で得た $S_0 [\rightarrow A_0]$ に対し, 更に contraction 右を, 下から順次消去し, LJ*証明図とする手続は 2(3)の通りである。

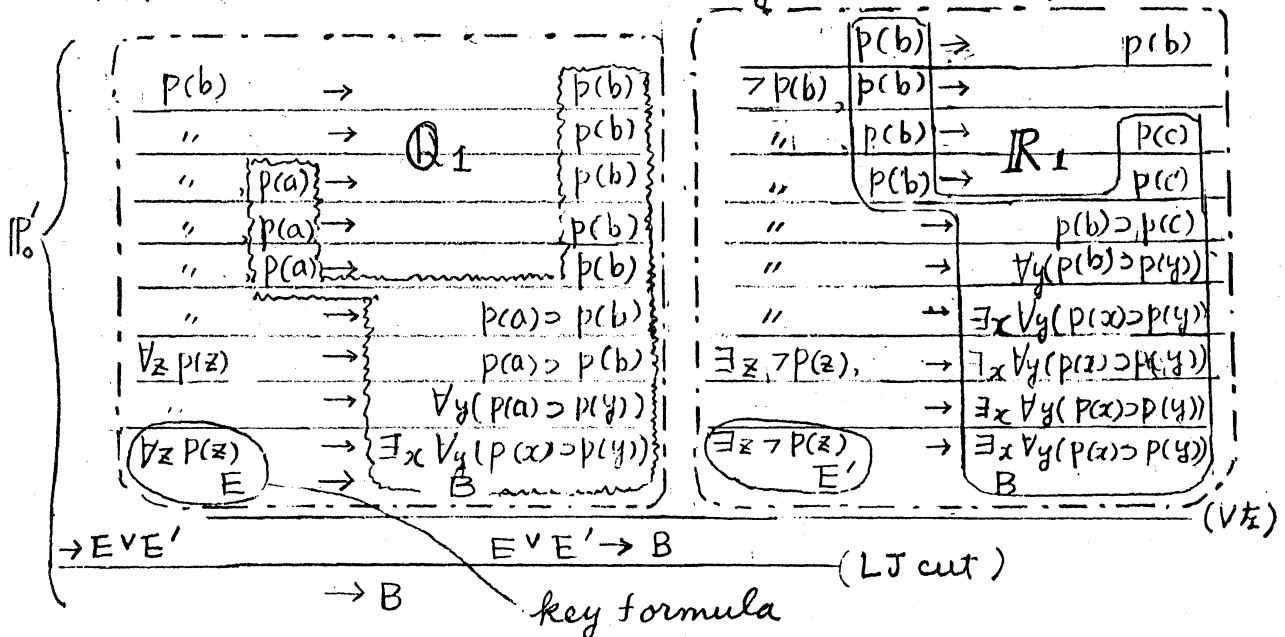
§ 5 非LJ型推論の消去とkey formula生成の例

すでに 1. で述べた $B = \exists x \forall y (p(x) \supset p(y))$ の証明を自動証明により近接する。

(1) 始め, [2] による7°□7°ラムにより cut-free LK証明図 Π_0 を作成,



(2) これに \mathcal{L}_1 の $LJ^* = (LJ + (\rightarrow E \vee E'))$ 証明図 Π_0' への変換を行う。 Π_0 の非LJ型推論の原因としては, 最下の cont. 右のみ, この上式: $\rightarrow B, B$ の分離 ($\rightarrow B; \rightarrow B$) に lemma を適用。 Key formula $E = \forall z p(z)$ を得る。



参考文献

[1] T. OSHIBA: A Method for Obtaining Proof Figures in the First Order Predicate Calculus, Comm. Math. Univ. St. Pauli, Vol. 30, No. 1, PP 49-62 (1981)

[2] 大芝猛: guide情報と利用する証明の7°□7°ラム, 数理科学, No. 270, PP 56-68 (1985)