数理解析研究所講究録
第772巻 1991年 110-115



# サブスライス $\mathcal{L}_{3,n}$ 上の strongly independent な中間論理

東京理科大理工　増田　勳
(Isao Masuda)

中間論理は、スライス $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \cdots, \mathcal{L}_\omega$ に分けられている（細井［1]）。そして $\mathcal{L}_3$ の中間論理は、さらにサブスライス $\mathcal{L}_{3,1}, \mathcal{L}_{3,2}, \cdots, \mathcal{L}_{3,\omega}$ に分けられている（[2]）。ここでは $\mathcal{L}_3$ の各サブスライス $\mathcal{L}_{3,n}$ に非可算無限個の中間論理が存在することを、Jankov（[3]）の方法を使って証明する。Kuznecov（[4]）によると $\mathcal{L}_3$ に非可算無限個の中間論理が存在するというが、その証明は印刷されていない。

定義 1.　POSモデル（小野[5]）$S_{3,i}$ を以下のようにきめる。

$$S_{3,1} = 3\alpha,$$

$$S_{3,i+1} = \alpha \uparrow (2\alpha, \alpha^i) \text{ for } i=1,2,\cdots,$$

$$S_{3,\omega} = (S_{3,i})_{i=1,2,\cdots}$$

ただし、$\alpha$ とは一点からなるPOSモデルのことである。

サブスライス $\mathcal{L}_{3,n}$ は次のように定義されている（[2]）。

定義 2. $\mathcal{L}_{3,i} = \{L \in \mathcal{L}_3 \mid L(S_{3,i}) \supseteq L$, かつ $L(S_{3,i+1}) \not\supseteq L\}$

$\mathcal{L}_{3,\omega} = \{L \in \mathcal{L}_3 \mid L(S_{3,i}) \supseteq L \text{ for } i=1,2,\cdots\}$ .

定義 3. 次のように公理をきめる。

$P_{3,1} = N_{10}(a)$,

$P_{3,n} = (\bigvee_{1 \leqq i \leqq n} N_{10}(a_i)) \vee (\neg\neg(\bigvee_{1 \leqq i \leqq n} \neg a_i))$

$\vee \ (\bigvee_{1 \leqq i \leqq n} \neg\neg(\neg a_i \vee (\bigvee_{\substack{j \neq i \\ 1 \leqq j \leqq n}} a_j)))\ (1 < n < \omega)$.

$P_{3,\omega} = a \supset a$,

$A_n = \bigvee_{\substack{1 \leqq i,j,k \leqq n+2 \\ i \neq j,\ i \neq k,\ j \neq k}} (((a_i \supset Z(a_j, a_k)) \supset (\bigvee_{1 \leqq \ell \leqq n+2} a_\ell))$

$\supset (\bigvee_{1 \leqq \ell \leqq n+2} a_\ell))$.

POSモデル$M_n$を次のように定義する

定義 4. 1) $M_n = \bigcup_{1 \leqq i \leqq n+2} \{v_i, w_i\} \cup \{u_0\}$

ただし、順序関係は次の 2),3) をみたす最小の関係とする。

2) おのおのの i に対して、$u_0 < v_i$

3）異なる任意のｉ，ｊに対して、$v_i < w_j$

補題 5. $M_n \in \mathcal{L}_{3,1}$ (n=1, 2, …).

補題 6. $A_n \notin L(M_n)$ (n=1, 2, …).

証明　ＰＯＳモデル$M_n$に対して、付値Ｗを以下のように定義する。

1）異なる任意の ｉ， ｊ に対して、$W(a_i, w_i)$＝f かつ $W(a_j, w_i)$＝t

2）異なる任意の ｉ， ｊ に対して、$W(a_i, v_i)$＝t かつ $W(a_j, v_i)$＝f

このとき、$W(A_n, u_0)$＝f であることがわかる。

補題 7. もし $m \neq n$ ならば $A_m \in L(M_n)$ ($m$=1, 2, …, $n$=1, 2, …) である。

Ｌ（Ｍ）を ＰＯＳモデル Ｍ で ｖａｌｉｄ な論理式の集合とする。

補題 8. $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_{k-1} \wedge A_{k+1} \wedge \cdots \wedge A_n \in L(M_k)$ ($n < \omega$).

証明　補題 7 から、この補題を得る。

補題 9. $A_k \notin LJ + A_1 + A_2 + \cdots + A_{k-1} + A_{k+1} + \cdots + A_n$.

証明　補題 8 から、$LJ + A_1 + A_2 + \cdots + A_{k-1} + A_{k+1} + \cdots + A_n \subseteq L(M_k)$ であり、

補題 6 から、$A_k \notin L(M_k)$ である。故に $A_k \notin LJ + A_1 + A_2 + \cdots + A_{k-1} + A_{k+1}$

$+\cdots+A_n$ となる。

補題 10. $A_k \notin LJ+A_1+A_2+\cdots+A_{k-1}+A_{k+1}+\cdots+A_n+\cdots$.

証明 $A_k \in LJ+A_1+A_2+\cdots+A_{k-1}+A_{k+1}+\cdots+A_n+\cdots$ であると仮定する。このとき、compactness theorem によって、ある m が存在して $A_k \in LJ+A_1+A_2+\cdots+A_{k-1}+A_{k+1}+\cdots+A_m$ となる。これは、補題 9 に矛盾する。

補題 11. $P_3 \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge\cdots\wedge A_{k-1} \wedge A_{k+1} \wedge\cdots\wedge A_n \in L(M_k)$.

証明 補題 8 と $h(M_k)=3$ ということから、補題を得る。

したがって、補題 9 と同様にして、つぎの補題を得る。

補題 12. $P_3 \wedge A_k \notin LJ+P_3+A_1+\cdots+A_{k-1}+A_{k+1}+\cdots$.

補題 13. $P_3 \wedge P_{3,m} \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge\cdots\wedge A_{k-1} \wedge A_{k+1} \wedge\cdots\wedge A_n \in L(M_k)$.

証明 補題 8 と $P_{3,m} \in L(M_k)$ ということから、補題を得る。

したがって、補題 9 と同様にして、つぎの補題を得る。

補題 14. $P_3 \wedge P_{3,m} \wedge A_k \notin LJ+P_3+P_{3,m}+A_1+\cdots+A_{k-1}+A_{k+1}+\cdots$.

補題 15. $LJ+A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots \in \mathcal{L}_\omega$.

証明 任意の $A_i$ に対して、$A_i \in L(S_\omega)$ ということから、補題を得る。

系 16. $LJ+P_3+A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots \in \mathcal{L}_3$.

補題 17. $LJ+P_3+A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots \in \mathcal{L}_{3,\omega}$.

証明 任意の $S_{3,j}$ に対して、$A_i \in L(S_{3,j})$ である。故に、どんな $A_i$ に対しても $A_i \in L(S_{3,\omega})$ となる。また、任意の $S_{3,j}$ に対して、$P_3 \in L(S_{3,j})$ である。したがって、補題 15 から、補題を得る。

系 18. $\{i_1, i_2, i_3, \cdots\}$ は自然数の集合の部分集合とする。このとき、

$$LJ+P_3+A_{i_1}+A_{i_2}+\cdots+A_{i_n}+\cdots \in \mathcal{L}_{3,\omega}$$

が成り立つ。

系 19. $\{i_1, i_2, i_3, \cdots\}$ は自然数の集合の部分集合とする。このとき、

$$LJ+P_3+P_{3,n}+A_{i_1}+A_{i_2}+\cdots+A_{i_n}+\cdots \in \mathcal{L}_{3,n}$$

が成り立つ。

注意 系 18 と 19 において、異なる部分集合から構成される論理は必ず異なる。

定理 20. スライス3の各サブスライス$\mathcal{L}_{3,n}$ ($1\leqq n\leqq \omega$) には、非可算無限個の中間論理が存在する。

参照文献

[1] T. Hosoi: On intermediate logics I, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. I, 14 (1967), 293-312.

[2] 細井勉・増田勳：スライス3の中間論理の分類，数学基礎論分科会講演アブストラクト（日本数学会平成3年度年会（慶応大学））5－6.

[3] V. A. Jankov: Constructing a sequence of strongly independent superintuitionistic propositional calculi, Soviet Math. Dokl., 9(1968), 806-807.

[4] A. V. Kuznecov: On Superintuitionistic Logics, Proceedings of the International Congress of Mathmaticians Vancouver, 1974, 243-249.

[5] H. Ono: Kripke models and intermediate logics, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 6 (1970/71), 461-476.