数理解析研究所講究録
第 772 巻 1991 年 116-125

ＬＪにCDN-公理を追加してできる中間論理について

東京理科大学理工学部　佐々木克巳 (Katsumi SASAKI)

CDN-論理式とはたかだか∧、∨、¬の三種類の論理記号だけから成る命題論理の論理式をいう(cf. Hosoi and Ono[1])。直観主義命題論理ＬＪにこのCDN-論理式を追加してできる中間命題論理に対して、次のことがわかった。

定理１　ＬＪにCDN-公理を追加してできる中間命題論理の総数は加算無限個であり、それらは集合の包含関係に関して一列に並んでいる。

この定理１を証明するために、まず中間論理の列ＬQ_nを定義する。

定義２　最小元とｎ個の極大元を持つ有限 Kripke model の集合を $\boldsymbol{M}_n$とし、

$$LQ_0 = LK、$$

$$LQ_n = \cap_{M \in \boldsymbol{M}_n} L(M)、$$

$$LQ_\omega = LJ$$

とする。さらに、便宜上、論理式全体から成る論理をＬＱ$_{-1}$とする。

ＬＱ$_n$の定義から

$$LQ_0 \supsetneq LQ_1 \supsetneq \ldots \supsetneq LQ_n \supsetneq \ldots \supsetneq LQ_\omega$$

である。

次に、上のＬＱ$_n$をCDN-公理によって公理化する。定義から

$$LQ_0 = LJ + a \vee \neg a$$

である。n=1,2,...については次のように公理を与える。異なる命題変数の列

$$a_1, a_2, \ldots$$

を用意する。

$$\mathbf{C}(m) = \{B_1 \wedge \ldots \wedge B_m \mid B_i \in \{a_i, \neg a_i\}\}$$

とし、$k = 1, \ldots, 2^m$に対し、

$$\mathbf{D}_k(m) = \{\neg C_1 \vee \ldots \vee \neg C_k \mid C_i \in \mathbf{C}(m),$$
$$i \neq j \text{のとき} C_i \neq C_j\}$$

とする。

補題３（[2]）　$k \geqq 1$のとき、任意の論理式$A \in \mathbf{D}_{k+1}(m)$ $(k+1 \leqq 2^m)$に対し、

$$LQ_k = LJ + A。$$

一方、

$$\mathbf{C}^*(m) = \{a_{i_1} \wedge \ldots \wedge a_{i_k} \mid 1 \leqq i_1 < \ldots < i_k \leqq m\}$$

$$\mathbf{D}^*(m) = \{C_1 \vee \ldots \vee C_k \mid C_i \in \mathbf{C}(m),$$
$$i \neq j \text{のとき} C_i \neq C_j\}$$

とする。

補題４　Aは

$$a_1, \ldots, a_m$$

以外の命題変数を含まないCDN-論理式とする。このとき、次の２つの条件(1)と(2)を両方とも満足するような論理式の列

$$A_1, \ldots, A_s$$

が存在する：

(1) $A \equiv A_1 \vee \ldots \vee A_s \in \mathrm{LJ}$（ここで、$A \equiv B$ は $(A \supset B) \wedge (B \supset A)$ の省略形である。）、

(2) $A_i \in \{B, B \wedge \neg C, \neg C \mid B \in \mathbf{C}^*(m), C \in \mathbf{D}^*(m)\}$ 。

証明　Aに含まれる論理記号の数 n についての帰納法で証明する。

n＝0 のときは自明である。

n＞0 のとき、論理記号の数が n より小さく

$$a_1, \ldots, a_m$$

以外の命題変数を含まない論理式A’に対して、次の２つの条件(1)’と(2)’を両方とも満足するような論理式の列

$$A'_1, \ldots, A'_s$$

が存在すると仮定する：

(1)’ $A' \equiv A'_1 \vee \ldots \vee A'_s \in \mathrm{LJ}$

(2)’ $A'_i \in \{B, B \wedge \neg C, \neg C \mid B \in \mathbf{C}^*(m), C \in \mathbf{D}^*(m)\}$ 。

Aの一番外側の論理記号の種類によって場合分けする。

i) $A = \neg B$ のとき：　ある論理式 $B' \in \mathbf{D}^*(m)$ が存在して、

$$\neg B \equiv \neg B' \in LJ。$$

ii) $A = B \wedge C$ のとき：　帰納法の仮定より、集合

$$\{B,\ B \wedge \neg C,\ \neg C \mid B \in \mathbf{C}^*(m),\ C \in \mathbf{D}^*(m)\}$$

の元

$$B_1, \ldots, B_i,\ C_1, \ldots, C_j$$

が存在して、

$$B \equiv B_1 \vee \ldots \vee B_i \in LJ、$$

$$C \equiv C_1 \vee \ldots \vee C_j \in LJ。$$

よって、

$$A \equiv (B_1 \wedge C_1) \vee (B_1 \wedge C_2) \vee, \ldots, \vee (B_i \wedge C_j)。$$

$\neg P \wedge \neg Q \equiv \neg(P \vee Q) \in LJ$ より補題が示される。

iii) $A = B \vee C$ のとき：　帰納法の仮定より自明である。

補題５　Aは任意のCDN-論理式とする。このとき

$A \notin LQ_{n+1}$ ならば $LJ + A \supseteq LQ_n$ である。

証明　Aは

$$a_1, \ldots, a_m$$

以外の命題変数を含まないとし、さらにAの形は

$$A_1 \vee \ldots \vee A_s \vee \neg B_1 \vee \ldots \vee \neg B_t$$

$(A_i \in \{B, B \wedge \neg C \mid B \in \mathbf{C}^*(m), C \in \mathbf{D}^*(m)\}$ 、

$B_i \in \mathbf{D}^*(m)$、$s+t \geqq 1)$

としても一般性は失わない。

i) $t=0$ のとき： Aに含まれるすべての命題変数に

$a \wedge \neg a$ を代入してできる論理式を A' とすると

$$A' \to a \wedge \neg a \in LJ。$$

よって、$LJ+A$ は LQ_{-1} である。

ii) $t>0$ のとき： $A \notin LQ_{n+1}$ より、ある Kripke model

$M \in \boldsymbol{M}_{n+1}$ が存在して

$$A \notin L(M)$$

である。Mの極大元を $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ 、最小元を β とすると、

ある付値Wが存在して、

$$W(A, \beta) = f。$$

故に、

$$W(\neg B_i, \beta) = f \quad (i=1, \ldots, t)。$$

よって、ある α_j が存在して、

$$W(\neg B_i, \alpha_j) = f。$$

このような j の最小を f(i) とする。

$$W(B_i, \alpha_{f(i)}) = t \cdots (*)$$

一方、各α_jに対して、唯一の$C_j \in \mathbf{C}(m)$が存在して、

$$W(C_j, \alpha_j) = t。$$

$$C_j = C_{j,1} \wedge \ldots \wedge C_{j,m}$$

とする。(*)より、ある$B_i^* \in \mathbf{D}^*(m) \cup \{a \wedge \neg a\}$が存在して、

$$B_i \equiv C_{f(i)} \vee B_i^* \in LJ。$$

よって、

$$\neg B_1 \vee \ldots \vee \neg B_t$$

$$\equiv (\neg C_{f(1)} \wedge \neg B_1^*) \vee \ldots \vee (\neg C_{f(t)} \wedge \neg B_t^*) \in LJ。$$

さらに、2つの場合に分ける。

ii-i)　$f(1) = \ldots = f(t)$のとき：

$$A \equiv A_1 \vee \ldots \vee A_s \vee (\neg C_{f(1)} \wedge (\neg B_1^* \vee \ldots \vee \neg B_t^*))$$

$$\in LJ$$

だから、Aの中に各a_iに対して、$C_{f(i),i}$を代入してできる論理式をA’とし、さらに、A’のすべての命題変数にaを代入してできる論理式をA”とすると、

$$A'' \to a \vee \neg a \in LJ。$$

よって、$LJ+A \supseteq LQ_C$。

ii-ii) $f(i) \neq f(j)$を満たす(i, j)が存在するとき：

集合 $\{a_1, \ldots, a_m\}$ を次のようにS_1, S_2, S_3 に分ける。

$C_{f(1),i} = \ldots = C_{f(t),i} = \neg a_i$のとき $a_1 \in S_1$、

$C_{f(1),i} = \ldots = C_{f(t),i} = a_i$のとき $a_2 \in S_2$、

$\{a_1, \ldots, a_m\} - S_1 - S_2 = S_3$。

論理式C^*を次のように決める。

$$C^*_{f(i)} = \bigwedge_{j \in S_3} C_{f(i),j} \text{、}$$

$$C^* = \neg C^*_{f(1)} \vee \ldots \vee \neg C^*_{f(t)}$$

Aに含まれるS_1の元に$a \wedge \neg a$、S_2の元にC^*を代入してできる論理式をA'とすると

$$A' \to C^* \in LJ。$$

$\{1, \ldots, n+1\} \supseteq \{f(1), \ldots, f(t)\}$ と補題４より、C^*は$LQ_{n'}$ $(n' \leq n)$の公理になっている。故に、

$$LJ+A \supseteq LQ_n。$$

補題６　Aは任意のCDN-論理式とする。このとき

$A \notin LQ_{n+1}$ならば

$$LJ+A \in \{LQ_k \mid k=-1, 0, \ldots, n\} 。$$

証明　n についての帰納法で証明する。

$n=0$ のとき：補題5より $LJ+A \supseteq LQ_0$ だから $LJ+A$ は LQ_0 または LQ_{-1} を表す。

$n>0$ のとき： n より小さい n' に対して、

$A \notin LQ_{n'+1}$ ならば

$$LJ+A \in \{LQ_k \mid k=-1,0,\ldots,n'\}$$

が成り立つと仮定する。補題5より

$$LJ+A \supseteq LQ_n$$

である。$LJ+A=LQ_n$ のとき、補題は成り立つ。

$LJ+A \supsetneq LQ_n$ のとき、$A \notin LQ_n$ だから帰納法の仮定より $LJ+A \in \{LQ_k \mid k=-1,0,\ldots,n\}$ である。

補題7

$$\{L \mid L=LJ+A、A\text{はCDN-公理}\} = \{LQ_n \mid n=-1,0,\ldots,\omega\}$$

証明　Aがあらゆる有限 Kripke model で valid であるとき $LJ+A=LJ$ である。$A \notin L(M)$ をみたす有限 Kripke model Mが存在するとき補題6より示される。

$$LQ_0 \supsetneqq LQ_1 \supsetneqq \ldots \supsetneqq LQ_n \supsetneqq \ldots \supsetneqq LQ_\omega$$

と補題7から定理1が証明される。

参考文献

[1] T. Hosoi and H. Ono: Intermediate propositional logics (A suvey), J. Tsuda College, 5 (1973), 67-82.

[2] K. Sasaki: Axiomatization of the intersection of Kripke models with finite maximals, to appear.