

剪断乱流におけるエネルギー とエネルギー散逸率のスケーリング則

東大理学部 下村 裕 (Yutaka Shimomura)

1. はじめに

非圧縮乱流のもつ独立な次元の個数は 2 である。つまり、時間 $[T]$ と空間 $[L]$ の次元である。この 2 個の独立な次元は、乱流エネルギー K とエネルギー散逸率 ε と選んでも良い。(

$$[K] = [L]^2 [T]^{-2}, \quad [\varepsilon] = [L]^2 [T]^{-3})$$

従って、この K と ε によって種々の乱流統計量を表現する立場が考えられる。

創意的な着想は $\nu \varepsilon$ は $[\nu \varepsilon] = [L]^2 [T]^{-1}$ なので、 $\nu \varepsilon \propto K^2 \varepsilon^{-1}$

と表わすのである。 K と ε に対する支配方程式を解き、この

ように乱流場を求めよう方法と、乱流の 2 方程式モデル、あるいは

1) K - ε モデルと呼ぶ。

K - ε モデルは工学の分野でも多用され、多くの研究者によって発展させられてきた。通常用いられる標準的の K - ε モデルにおける、 K に対する方程式は以下の様にと与えられる。

$$\frac{DK}{Dt} = P - \varepsilon + \frac{\rho}{\rho \alpha^a} \left\{ \frac{\nu_e}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x^a} \right\}, \quad (1)$$

$$\nu_e = C_\nu \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (2)$$

(1)式において D/Dt はラグラジアン微分、 P はエネルギー生産項と呼ばれる正符号をもつ項、 ν_e は(2)式で与えられる渦粘性である。(1)、(2)式中の σ_k 、 C_ν は正定数で経験的に、

$$\sigma_k \sim 1.0, \quad C_\nu \sim 0.09, \quad (3)$$

という値がよく用いられる。(1)式において乱流モデルを組み込んだのは、右辺第三項の拡散項のみであり、この項が重要である。しかしながら、Yoshizawa²⁾ 統計理論を用いて、解析した結果、この項は次の様に表現されるべきだと主張された。

$$\frac{\rho}{\rho \alpha^a} \left\{ \frac{\nu_e}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x^a} + \frac{\nu_e}{\sigma_{k\varepsilon}} \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^a} \right\}, \quad (4)$$

つまり、(4)式(1)の第二項から必要なのであり、この付加項は cross-diffusion 項と呼ばれる、壁乱流の漸近挙動に関する Takemitsu³⁾ の解析によつてその重要性が指摘された。

本研究は、この経験的に用いられるモデル(1)式右辺第三項と理論的に導出されたモデル(4)式とのギャップを埋められることと主張するものである。

結論を言えり、それは、次の様にスケールされる事

式を示すのであす。

$$\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) = C_0 \left(\frac{k}{k_0}\right)^{-\frac{11}{6}} \quad (5)$$

(5)式の対数微分を とすげわかるように、(4)式は (1)式右辺の第3項の形と同等項なのであす。(C₀は定数)(ε₀, k₀はそれぞれε, kの波数定数)

(5)式は、kとεに関する一種のスケールリネグ則であす。スケールリネグ則は、臨界現象等いろいろ物理の分野で重要な法則であす。Kolmogorovの -5/3 則も、Fourier空間における、エネルギーと、エネルギー散逸率と波数に関するスケールリネグ則であす。

スケールリネグ則は、たいてい、簡単な議論に基づいて導出される大変有用な法則であす。以下に(5)式の導出方法を説明する。

2. 導出方法

解析手法として、Yoshizawa⁴⁾の考案した Two-Scale Direct Interaction Approximation (TSDIA) と基本に用いる。その概略と、今回改良した部分について説明するが、詳細は、文献を参照されたい。

時空点 (t_0, \vec{x}_0) における乱流の情報を得るために、以下の手順を行す。

① 擾乱場 u^α に対する支配方程式中の平均速度場 U^α を、点 (t_0, \vec{x}_0) のまわりにテイラー展開する。

② ステップ関数

$$\tau \equiv t - t_0, \quad T_0 \equiv \delta(t - t_0),$$

$$\vec{\tau} \equiv \vec{x} - \vec{x}_0, \quad \vec{X}_0 \equiv \delta(\vec{x} - \vec{x}_0). \quad (6)$$

と導入し、平均場は (T_0, \vec{X}_0) のみに、擾乱場は $(\tau, T_0, \vec{\tau})$ に依存すると仮定し、方程式を書き変える。(8はステップ関数)

③ ②で得られた方程式を、 τ に関して Fourier 変換する。

④ 擾乱場を δ で展開し、各次場の方程式を求めよう。

$$u^\alpha(\vec{k}; \tau) = u_0^\alpha(\vec{k}; \tau) + \delta u_1^\alpha(\vec{k}; \tau) + \dots$$

(\vec{k} : 波数).

⑤ 応答関数を導入することによって、 $u_0^\alpha, u_1^\alpha, \dots$ の形式解を求めよう。(u^α に関しては、連続の条件を満たす様にしよう。)

⑥ u_0^α 場は、 τ に関して一様、等価であると仮定して、種々の統計量を計算する。

④のステップが今回改良を山下点であり、この操作を繰り返すことにより、平均場の τ 空間における変化が表現される。その結果、(2)式における C_ν の値が

$$C_\nu \sim 0.08 \quad (7)$$

と結論される。経験値 0.09 (3) との一致が良い。ちよみ

に、 u^α 場の連続の条件を満足するように (9) 17 行より
Hamba⁵⁾ の計算に δ と $C_V \sim 0.12$ と計算を繰り返す。

(ステップ ① 2 行の正しい計算。)

① ~ ④ を行、下の場合、 δ^1 の次数の方程式は

$$u_i^\alpha(\vec{k}; \tau) = -\frac{ik^a}{k^2} \frac{\partial u_0^\alpha(\vec{k}; \tau)}{\partial X_0^a} + v_1^\alpha(\vec{k}; \tau), \quad (8)$$

と 17

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_1^\alpha(\vec{k}; \tau)}{\partial \tau} + \nu k^2 v_1^\alpha(\vec{k}; \tau) - 2iM^{\alpha ab} \int \int \delta(\vec{k}-\vec{p}-\vec{q}) u_0^a(\vec{p}; \tau) v_1^b(\vec{q}; \tau) \\ &= -\frac{D}{DT} u_0^\alpha(\vec{k}; \tau) - N^{\alpha abc} \frac{\partial u_0^b}{\partial X_0^a} u_0^c(\vec{k}; \tau) \\ &+ \frac{DU_0^a}{DT} (ik^a \tau) u_0^\alpha(\vec{k}; \tau) - 2i\nu k^a \frac{\partial}{\partial X_0^a} u_0^\alpha(\vec{k}; \tau) \\ &+ 2M^{\alpha ab} \int \int \delta(\vec{k}-\vec{p}-\vec{q}) u_0^a(\vec{p}; \tau) \frac{q^b}{q^2} \frac{\partial u_0^c(\vec{q}; \tau)}{\partial X_0^c} \\ &- D^{\alpha d} L^{\alpha bcd}(\vec{k}) \int \int \delta(\vec{k}-\vec{p}-\vec{q}) \frac{\partial}{\partial X_0^c} \{u_0^a(\vec{p}; \tau) u_0^b(\vec{q}; \tau)\}, \end{aligned}$$

と 7 行。ここで ν は粘性率であり、 $\vec{v} = \nu \cdot L^{\alpha\beta\gamma\delta}, N^{\alpha\beta\gamma\delta}, M^{\alpha\beta\gamma}, D^{\alpha\beta}$ (9)

$$\text{す。} \quad L^{\alpha\beta\gamma\delta}(\vec{k}) = \frac{1}{2} \delta^{\alpha\gamma} \delta^{\beta\delta} + \frac{1}{2} \delta^{\beta\gamma} \delta^{\alpha\delta} - \frac{k^\alpha k^\beta}{k^2} \delta^{\gamma\delta},$$

$$N^{\alpha\beta\gamma\delta}(\vec{k}, \omega_{\vec{k}}) = \delta^{\beta\delta} \left(\delta^{\alpha\gamma} - 2 \frac{k^\alpha k^\gamma}{k^2} \right) - \delta^{\alpha\delta} k^\gamma \frac{\partial}{\partial k^\beta},$$

$$M^{\alpha\beta\gamma}(\vec{k}) = \frac{1}{2} (k^\beta D^{\alpha\gamma}(\vec{k}) + k^\gamma D^{\alpha\beta}(\vec{k})),$$

$$D^{\alpha\beta}(\vec{k}) = \delta^{\alpha\beta} - \frac{k^\alpha k^\beta}{k^2}, \quad (40)$$

で与えられる。($\delta^{\alpha\beta}$ は、70ページの δ 記号)

また、(9)式中の

$$U_0^\alpha, \quad \frac{\partial U_0^\alpha}{\partial X_0^\beta}, \quad \frac{DU_0^\alpha}{DT_0},$$

は、点 $(T_0=0, \vec{X}_0=0)$ での値を示していることは注意 (70) 頁
を参照せよ。

→ 7. (9)より (5) を導く。(9)に U_0^α 、(10)に $U_0^\alpha U_0^\alpha$ をかけて
導くことにする。

$$\int_{\vec{k}} d\vec{k} \frac{D}{DT_0} \langle u_0^\alpha(\vec{k}; \tau) u_0^\alpha(-\vec{k}; \tau) \rangle / \delta_{(0)},$$

$$\int_{\vec{k}} d\vec{k} \int_{\vec{p}} d\vec{p} \int_{\vec{q}} d\vec{q} \delta(\vec{k}-\vec{p}-\vec{q}) \frac{D}{DT_0} \langle u_0^\alpha(\vec{p}; \tau) u_0^\alpha(\vec{q}; \tau) u_0^\alpha(-\vec{k}; \tau) \rangle / \delta_{(0)},$$

(= 0)

を求めよ。局所平衡 $\frac{\partial}{\partial T} \langle \cdot \rangle = 0$ による。

DIAの精神に基づいて計算した結果、それではから式(1)を得る。

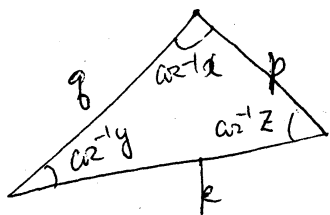
$$\int dk \, k^2 \frac{D}{D_0} \Theta(k) = 0,$$

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \delta(k-p-q) S_1(x, y, z) \frac{\partial}{\partial X_0} \{ \Theta(p) \Theta(q) \} = 0$$

(11)

(11)で $S_1(x, y, z)$ は geometrical factor ⁶⁾ である。

$$\begin{aligned} S_1(x, y, z) = & \frac{1}{6} \left[\frac{k}{q} (x^2 y + 2xy^2 z + 2y^3 + 2yz^2 - y) \right. \\ & + \frac{k}{p} (x^2 z + 2xyz^2 + 2xy + 6y^2 z + 2z^3 + z) \\ & \left. - 4 (x^2 + 3xyz + y^2 z^2 + 3y^2 + 2z^2) \right], \end{aligned}$$



(12)

と与えられる。 $\int T = \Theta(k)$ は、媒質を流れる波の1周期の空間平均で、粘性領域近似より、

$$\Theta(k) \propto \epsilon^{2/3} k^{-11/3} H(k - k_m), \quad (13)$$

と近似する。(13)において $H(k - k_m)$ は階段関数であり、

k_m は cut off 波数で、

$$k_m \propto \epsilon k^{-\frac{3}{2}}, \quad (14)$$

で与えられる。(13)を(11)に代入することにより、

$$\frac{D}{DT_0} (\epsilon^{2/3} k_m^{-1/3}) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial X_0^2} \left\{ (\epsilon^{2/3} k_m^{-1/3})^2 \right\} = 0, \quad (15)$$

が結論される。更に絞ると、

$$\frac{2}{3} \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{D}{DT_0} \frac{\partial}{\partial X_0^2} \right) \epsilon - \frac{11}{3} \frac{1}{k_m} \left(\frac{D}{DT_0} \frac{\partial}{\partial X_0^2} \right) k_m = 0. \quad (16)$$

(16)を(14)に代入することにより

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{D\epsilon}{DT_0} = \frac{11}{6} \frac{1}{k} \frac{Dk}{DT_0},$$

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial X_0^2} = \frac{11}{6} \frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial X_0^2}, \quad (17)$$

を得る。(17)は(5)と同じであり、 k と ϵ に對するスケールは
則ち導出された。

3. 応用

スケールは(17)と同じに一樣減衰理論に適用してみる。

$$\frac{Dk}{DT_0} = -\epsilon \propto -k^{\frac{11}{2}}, \quad (18)$$

より

$$k \propto T^{-\frac{6}{5}}, \quad (19)$$

が結論される。 $\frac{6}{5} = 1.2$ の実験値に非常に近い。

次に 1. に述べた k の支配方程式における拡散項の整理を図る。拡散項 D を

$$\begin{aligned} D &= -\frac{1}{2} \langle u'^a u'^a u'^d \rangle - \langle p' u'^d \rangle \\ &= \frac{k^3}{\varepsilon} \left[C_{kk} \frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial X_0^d} - C_{k\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_0^d} \right], \quad (20) \end{aligned}$$

と書いた場合、Yoshizawa²⁾ の計算結果に示すは、

$$C_{kk} \sim 1.27, \quad C_{k\varepsilon} \sim 0.720, \quad (21)$$

となるが、今回の計算方法にすると

$$C_{kk} \sim 0.588, \quad C_{k\varepsilon} \sim 0.335, \quad (22)$$

とほぼ半分の値となる。この数値を出す際、次の積分を計算しなくてはならぬ。

$$I = \int_0^\infty dk \int_1^\Delta dp \int_1^\infty dq F(k, p, q) (kpq). \quad (23)$$

ここで Δ は k, p, q が三角形をなす領域である。すなわち

$$\begin{cases} F(k, p, q) = F(k, q, p), \\ F(ak, ap, aq) = a^{-n} F(k, p, q), \end{cases} \quad (24)$$

が満足されると、この三重積分は、二重積分に変換できること

が、本研究で判明した。可なり。

$$I = 8\pi^2 \left[\int_0^{1/2} dv \int_{1-v}^{1+v} dw + \int_{1/2}^{\infty} dv \int_v^{1+v} dw \right] \left(\frac{1}{n-6} v^{n-5} w \right) X$$

$$F(k, p, q) \Big|_{\substack{k=1 \\ p=v \\ q=w}} \quad (25)$$

(20) と (17) の第 2 式を用いて、 k だけの振散形

$$D = C'_{kk} \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x^\alpha}, \quad (26)$$

に書いた場合、本計算では

$$C'_{kk} \sim -0.0260, \quad (27)$$

と、 C'_{kk} が負に成ってしまう。これは、(1) の様な経験的モデルと定性的に違うけれど、 C'_{kk} は絶対値が小さいので、これは正の小さな値とも解釈する方がよいであろう。重要なのは、cross-diffusion 効果は必要ないということである。ただし、この結論は、leading order の近似であり、また、境界のない理想化された状況下の剪断乱流に対して成り立つものである。従って、本結論は、1. に説明した Takemitsu³⁾ の主張と矛盾するものではない。

最後に、チャネル乱流のラージエディ-シミュレーション⁷⁾ によるデータを用いて (5) のスケーリング則を検証する。

図1は、 k と ϵ の関係と釘数目盛りでプロットした図であり、
 (5)の成り立つ領域が一部見られる。図2は、チャンネル中心
 ϵ を $\epsilon=0$ 、壁を $\epsilon=0.5$ と17、 $\epsilon/k^{1/6}$ を ϵ に訂して、
 プロットした図であり、図1で(5)の成り立つ領域は、
 チャンネル中心と壁の間の領域であることがわかる。壁近傍
 で(5)が成立しないのは明らかであるが、チャンネル中心で
 成り立つのはどうしてなのか？ 以下をうらぐ。チャンネル中
 心では、 k 、 ϵ の空間微分の大きさを小さく、(17)式の第2の
 式の精度が低くなっていることに起因するのであろう。

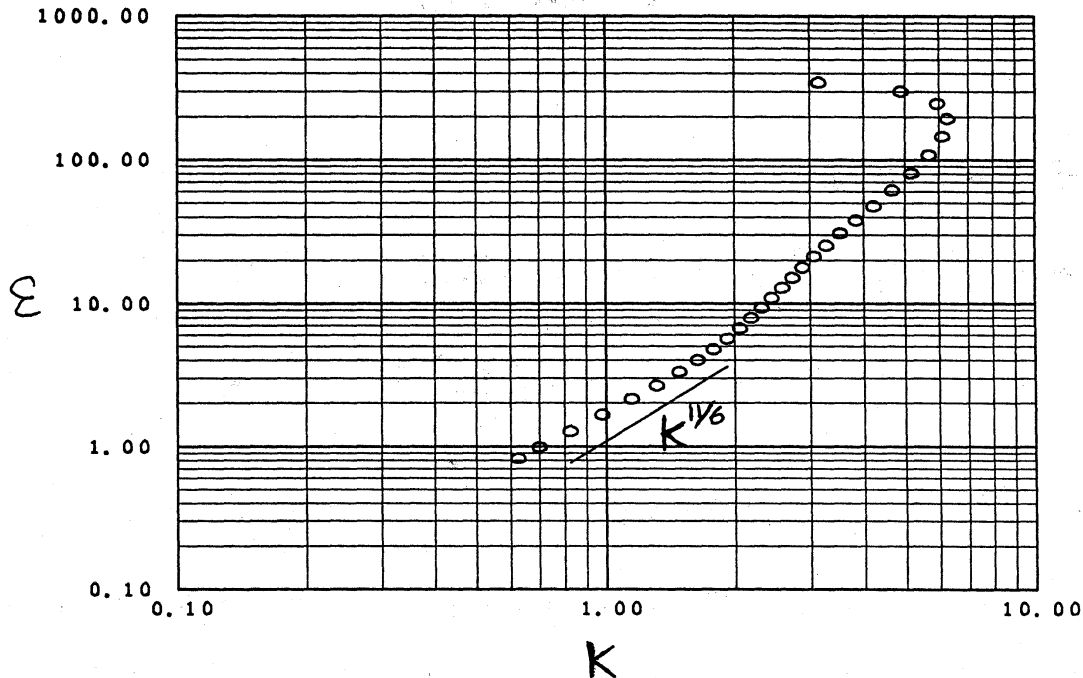


図 1.
 ENERGY-EPSILON

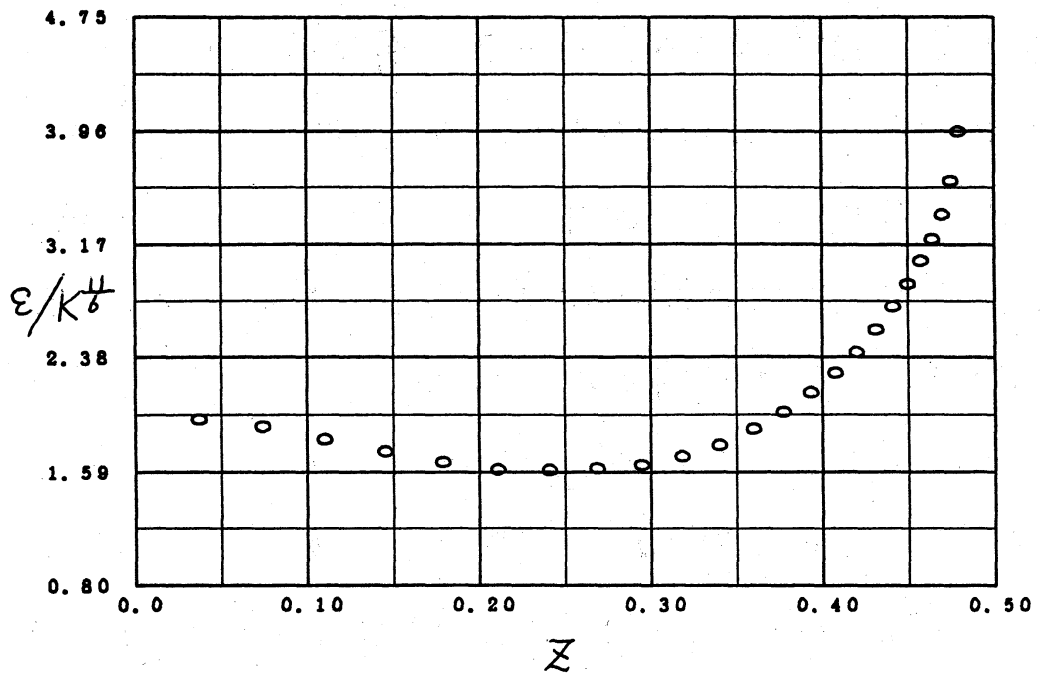


図 2.
EPS/(K** (11/6))

4. まとめと展望

乱流エネルギー k とエネルギー散逸率 ϵ の間には

$$\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right) = C_0 \left(\frac{k}{k_0}\right)^{\frac{11}{6}},$$

というスケーリング則が成り立つことが理論的に示された。この関係式によって、cross-diffusion 項は、必要ではないことが結論され、従来用いられていたモデルの理論的妥当性が判明した。

最後に将来の展望を記す。

今回の解析は、 $O(\delta^1)$ までのものであるが、 $O(\delta^2)$ まで次
 物と上げることで、 ε の支配方程式と、 $\varepsilon, k, \text{シア-ライト}$ に
 関する空間的スケ-リ-ング則が得られることが予想される。
 後者に関する準備的計算によると、平均流 U が $y=1$ に依存
 している場合、

$$k \propto U^{\frac{6}{5}}, \quad \varepsilon \propto U^{\frac{11}{5}}$$

というスケ-リ-ング則が示唆される。($U' \equiv \frac{dU(y)}{dy}$)

もう一つの興味として、今回の手紙で、 P-3 がスカラー
 に関するスケ-リ-ング則を導出することである。もし速度場
 の長さスケ-ルと、スカラー場の長さスケ-ルがほぼ等しい場
 合は、 ε_0 (スカラー場の散逸率) = ε となることを最近
 示された。

また今回改良された TSDIA を用いて、二次元乱流の渦
 粘性を計算するのにも興味深い。今回の定式化では、波長 k に
 関する微分項があるので、自らの渦粘性を計算する可能性が
 ある。

以上、新しい結果が次第報告する予定である。

参照文献

- 1) P. Bradshaw, T. Cebeci, and J. H. White law :
"Engineering Calculation Methods for Turbulent Flow"
(Academic, London, 1981) p. 37.
- 2) A. Yoshizawa : J. Phys. Soc. Jpn. 51 (1982) 2326
- 3) N. Takemitsu : Trans. Jpn. Soc. Mech. Engrs.
B 53 (1987) 2528.
- 4) A. Yoshizawa : Phys. Fluids 27 (1984) 1377.
- 5) F. Hamba : J. Phys. Soc. Jpn. 56 (1987) 79.
- 6) D. C. Leslie : "Developments in the Theory of
Turbulence" (Oxford University Press, 1983).
- 7) Y. Shimomura : submitted to Phy. Fluids A.