

鉛直トーラス内熱対流のプラントル数依存性

農工大教養 佐野 理 (Osamu Sano)

§ 1. はじめに

鉛直に立てたトーラス内に生じる熱対流のセル的な空間構造についてはすでに報告した。¹⁻³⁾ これまでの実験的・理論的研究をふまえ、ここではプラントル数の異なる流体について、より広いレイリー数領域にわたって比較を行なう。まず、純水、エチルアルコール、メチルアルコールなどを用いた実験結果を整理し、トーラス内熱対流の普遍的性質を探る。また、レイリー数の上昇に伴って生じるカオスの発生過程について述べる。つぎにこれらの結果を説明する新しいモデル ELM 8-11 を提案し、両者の比較を行なう。

§ 2. 実験のまとめ

実験装置のブロック・ダイアグラムを図 1 に示す。トーラスは肉厚 1mm のパイレックス・ガラス製で、ループの周に沿った長さ $2\pi R$ が 100cm、チューブの直径 $2a$ は 10mm のもの (torus I) と 5mm のもの (torus II) の 2 種類を使用した。

温度一定（誤差 $\pm 0.1^\circ\text{C}$ ）の流水によりループの下部約 $1/4$ の長さを高温 T_h に、また上部約 $1/4$ の長さを低温 T_c に保ち、それ以外の部分は室温 T_r に保ってある（誤差 $\pm 0.5^\circ\text{C}$ ）。これにより、鉛直方向に一様な温度勾配を近似する。

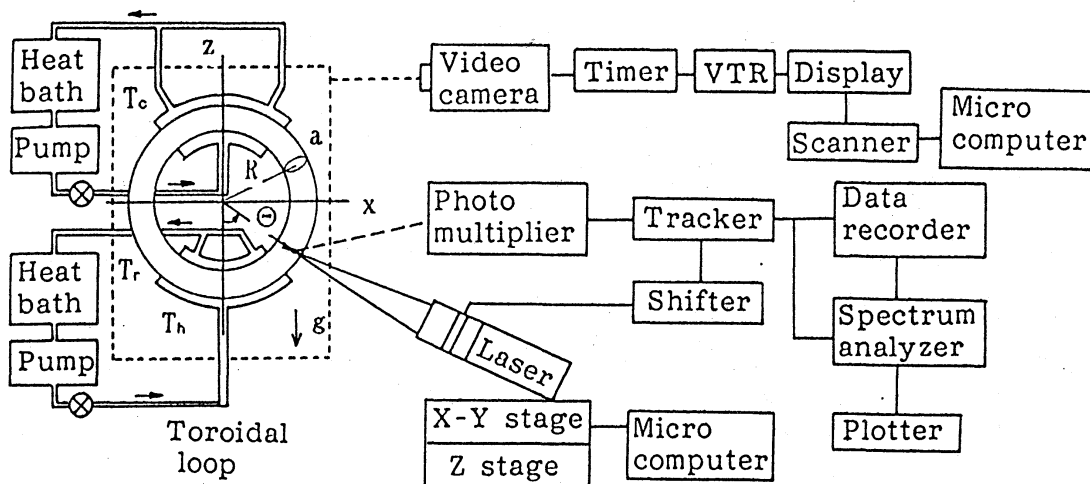


図 1. 実験装置のブロック・ダイアグラム

実験ではおもにトレーサー粒子による流れの可視化とその画像解析、レーザー・ドップラー流速計（LDV）による定量的な流速測定などを行い、流れの空間的構造と時間変動のレイリー数やプラントル数依存性を調べた。ここでレイリー数 Ra は $Ra = \alpha \beta g a^4 / (\kappa \nu)$ 、プラントル数は $Pr = \nu / \kappa$ と定義する。ただし、 α は流体の熱膨張率、 $\beta = (T_h - T_c) / (2R)$ は鉛直方向の平均の温度勾配、 g は重力加速度、 κ は熱拡散率、 ν は動粘性率である。

左右対称な境界条件のもとに実験を行なった結果をまとめると以下のようなになる。

(a) 臨界レイリー数 Ra_c は約 35 で、ループ周に沿ったほぼ 1 次元的な対流が発生する (図 2 を参照)。この流れは軸対称ポアズイユ流とみなせる。ただし、 $Re=2aU/\nu$ (U は断面内の最大速度)。

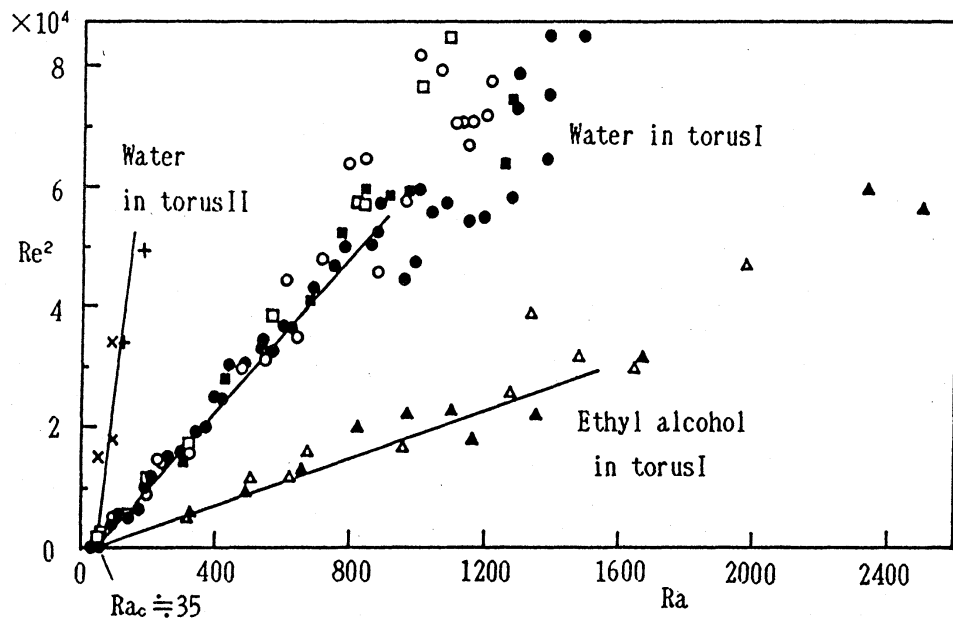


図 2. レイノルズ数 - レイリー数の関係

(b) レイリー数をさらに増加させていくと、流れは非軸対称的になるが、 Ra のかなり広い範囲で依然として 1 次元性が保たれ、 $Re \propto \sqrt{Ra - Ra_c}$ の関係に従う。ただし (○, ●) や (□, ■) は水と torus I の、(×, +) は水と torus II の、さらに (△, ▲) はエチルアルコールと torus I の組合せにより得られた結果であり、(○, □, △, ×) 印はループに沿う反時計

回りの流れ, それ以外は逆向きの流れに対するものである.

(c) レイリー数をさらに上げると, 図3に示すようなセル的な流れが観測される. ループに沿う流れが弱い場合には4個のセルが, またそれが強い場合には2個のセルが観測される(図3参照).

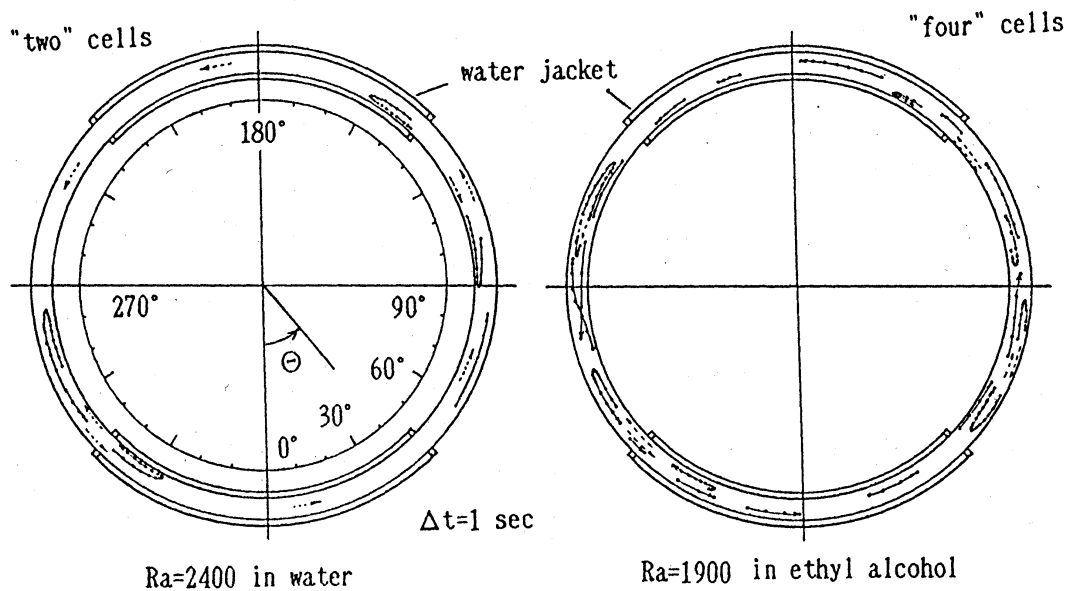


図3. 鉛直ループ内熱対流のセル構造

以下, エチルアルコールでの実験結果をもとに述べる.

図4は, 流速信号, そのパワー・スペクトル(d以外は4サンプルの平均である), 流速の時系列から再構成された2次元位相空間軌道, ポアンカレ断面, などを示したものである. 実験に伴うノイズのためにデータにはかなりの変動幅が見られるが,

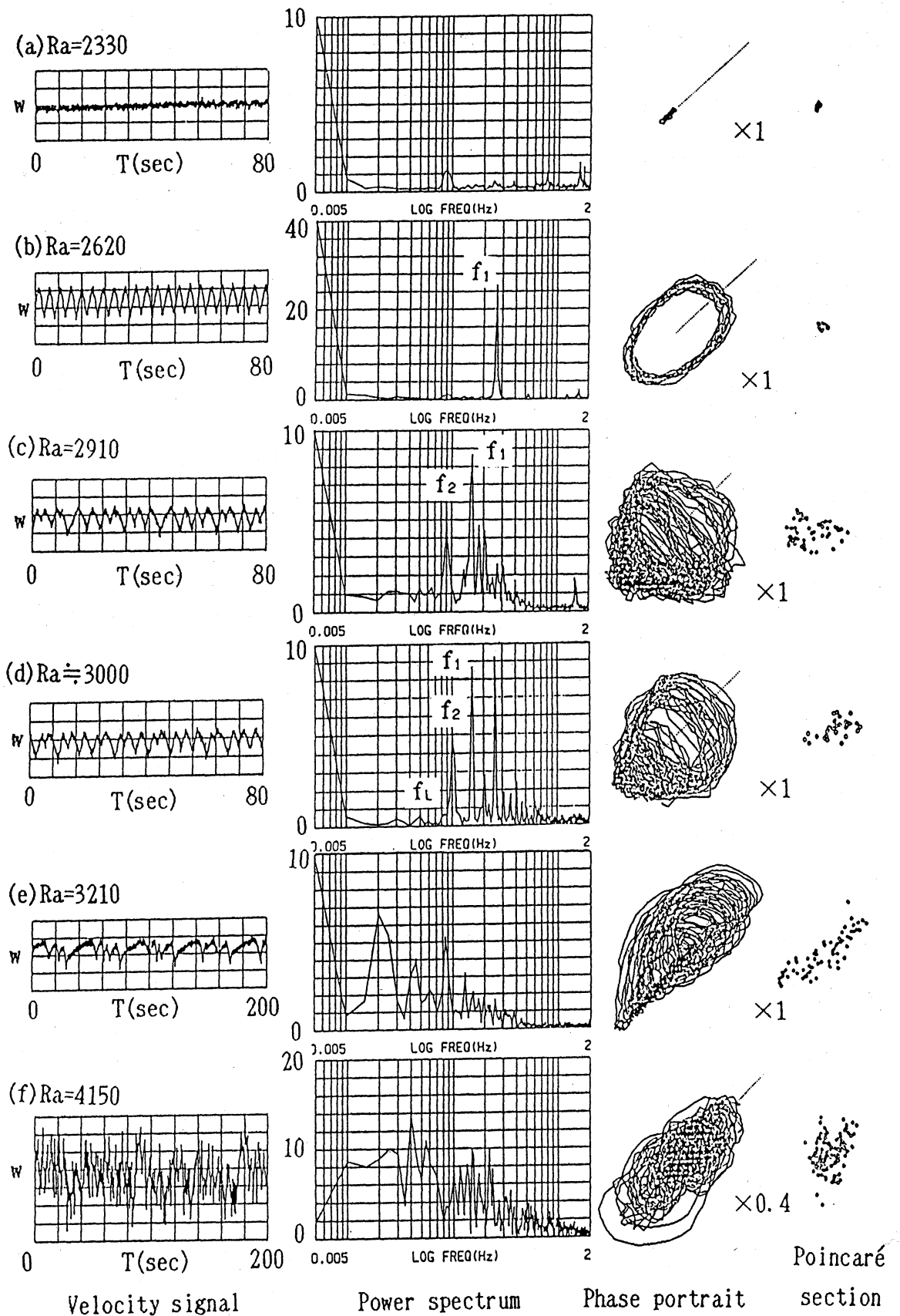


図 4. 流速の時間変動

(d) レイリー数が2500程度に達すると、単一振動 f_1 で特徴づけられる振動が発生する(図4b参照)。

(e) その後、新たな振動数 f_2 が発生して準周期状態(図4c)に、またロッキング状態(と解釈できるもの図4d)を経て、カオス(図4e)に至ることがうかがえる。

(f) さらに高いレイリー数では、流速場はかなり乱れているが(図4f)、セル的な構造は依然として残されている。

ここで使用した流体のプラントル数 Pr は水で約6、エチルアルコール(99.5%)で約15である。我々の実験装置で作りに出せる加熱冷却の温度差は高々60℃であり、温度制御の精度が±0.1℃であることを考慮すると、比較的低いレイリー数領域では純水を、また高いレイリー数領域ではエチルアルコールを使用の方が実現可能かつ相対精度の高いデータが得られる。これが上述の(d)以降でエチルアルコールの結果を報告した理由である。しかし、プラントル数が異なるためにそれぞれの流体でまったく異なる対流の分岐現象が起こるといふ懸念がないわけではない。この点を検討するために、

(i) まず図2と同じデータを使って $e Re Pr$ と Ra をプロットしてみよう(図5)。ここで $e = a/R$ はループの幾何学的な細さを示すパラメータである。多少のバラツキはあるもの

の、これらが1つの曲線上にあることは明らかであろう。レイリー数の比較的高いところ（数100から2000程度まで）では、これらはほぼ比例し、浮力と粘性摩擦力が釣り合っただ常状態にあることがうかがえる。

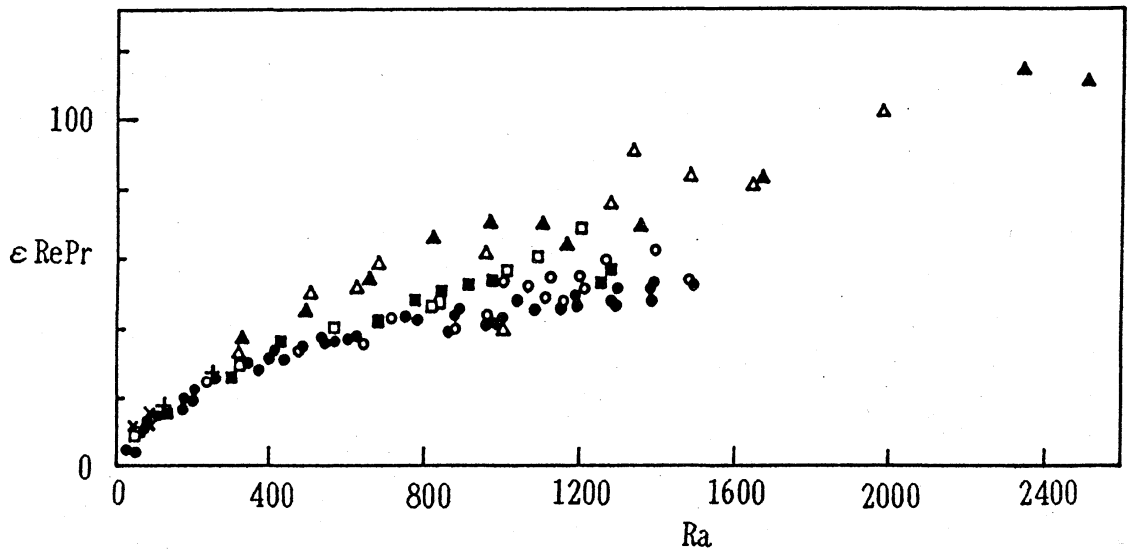


図5. $\epsilon RePr$ と Ra の関係

(ii) 図3はtorusI内で観測されたトレーサー粒子の軌道であった。流体の種類によりレイリー数の値そのものはいくらか異なるが、純水とエチルアルコールのいずれでも Ra_c の20倍程度以上では上述のようなセル構造の発生することが確認されている。しかし、より細かいループを用いれば、(幾何学的に1次元領域に近づくので)流れも1次元的なものになるのではないか? これを確認するためにtorusIIを用いて実験を行なった。ループを細くすると対流発生の臨界温度差も大きくなるのでそのままでは Ra_c の数10倍ものレイリー数領域は

実現し難い。そこでプラントル数は水とほぼ同じ ($Pr \approx 7$) であるがレイリー数で約10倍高い値の得られるメチルアルコール (99.5%) を使用した。結果は他の場合とほぼ同様で、 Ra_c の数10倍のところまでセル的な対流が発生した。

(iii) 図4はエチルアルコールのデータであったが、純水を用いた実験でも図4bの段階の振動流が確認されている。

これらの実験事実から考えて、鉛直トーラス内の熱対流は
静止 (熱伝導状態) \rightarrow 定常1次元流 \rightarrow 定常3次元流
 \rightarrow 単一振動的3次元流 \rightarrow 準周期的3次元流 \rightarrow (位相
ロッキング状態) \rightarrow カオス

というかなり普遍的なルートをたどってカオス状態に到達すると思われる。とくに3次元的な流れは、 Ra の増加に伴って流速が増し (図2)、流体の管の断面内での温度一様性が実現されなくなると、この断面内を横切る流速成分が発生するために生じるもので、熱拡散率 κ の有限な通常の流体では避けることのできないものと考えられる。4個のセルが作られる理由は、鉛直に置かれたトーラスの幾何学的な配置によるものである。例えば、ループの下半分では、より大きな浮力を得た流体はループの上側の壁に移動するが、これがループに沿って流れて上半分の領域にまで来ると、今度は断面を横切って反対側の壁に近づく。他方ループの上半分では逆の流

れが起こり、両者は上下左右の4箇所で見交差しながら双方向の流れを形成する。その結果各4分円内にセル構造ができる。

§ 3. 定常場の理論的解析

この節では、上に述べたような実験結果を説明するモデルを考察する。解析はブシネスク近似に基づき、鉛直方向の一様な温度勾配における熱伝導状態からの摂動として定常的な速度場 $\mathbf{v} = (u, v, w)$ や温度場 T を求める。その際、トラスは十分細い ($\epsilon = a/R \ll 1$) と仮定する (これによって w と T は ϵ のオーダーが1次低くなる)。さらに Θ , ϕ 方向について2重フーリエ級数に展開し (ループの周方向に測った長さを $\mu = R\Theta$, 横断面内での2次元極座標を (r, ϕ) と選んである), 種々の基本的な流れについて考察する, という方法で進めた (詳しくは文献3を参照)。

図6はこれらのいくつかを示したものである。

ここで A_{00} 型の流れはループに沿うポアズイユ的な流れを, A_{10} 型の流れは管の断面内で半分ずつポアズイユ流になっている流れを, また S_{12} 型の流れは4つのセルを表す流れ, などとなっている。 A_{00} 型の級数解を無限項までとると, 臨界レイリー数 $Ra^* = 33.44523\dots$ が求められ, 実験値の $Ra_c \approx 35$ とほぼ一致する。

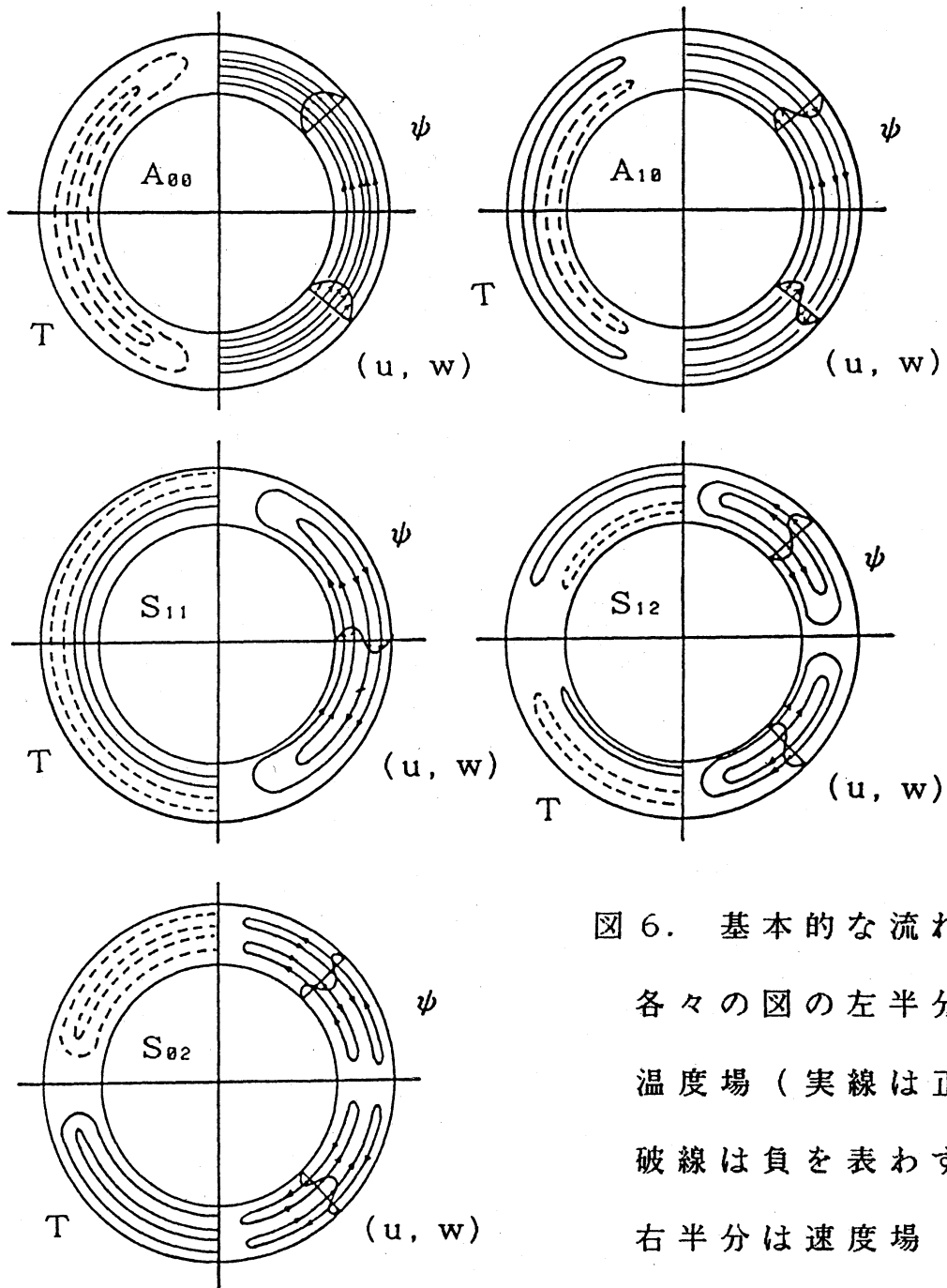


図 6. 基本的な流れ.

各々の図の左半分は温度場（実線は正，破線は負を表わす），右半分は速度場（速度分布と流線）。いずれもトーラスの中央面での様子を示す。

これらを重ね合わせると，実験で見いだされた流れが表現

できる. 一例を図7に示す.

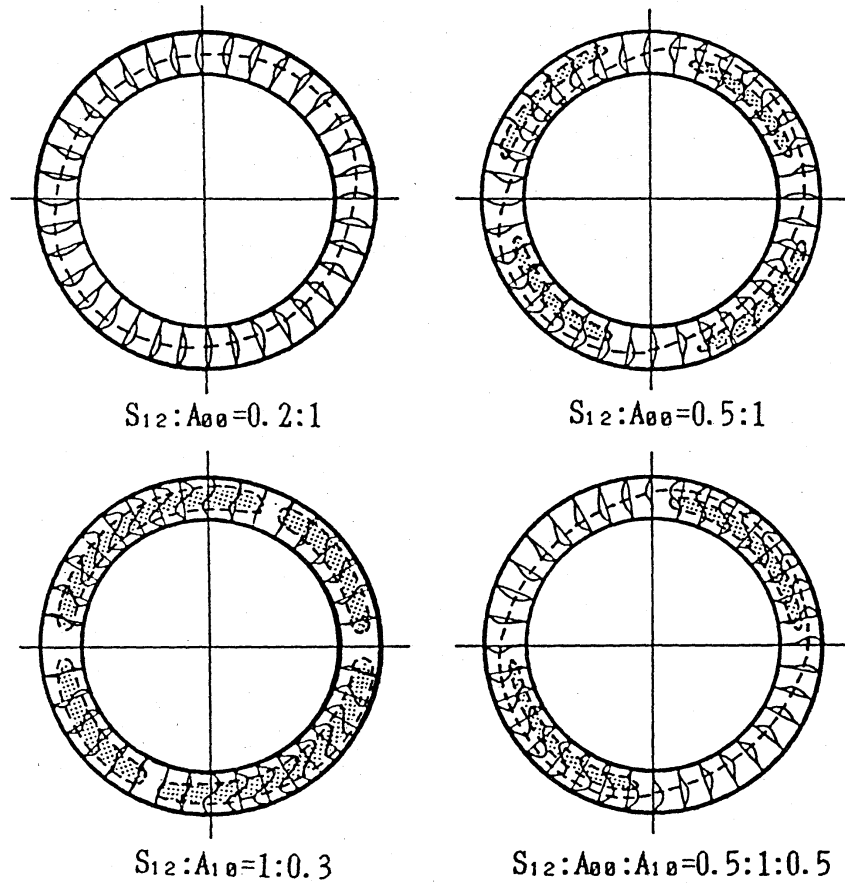


図7. 基本解の重ね合わせによる流れ

§4. 新しいモデル E L M 8 - 1 1

実験で観測された流速変動を説明するために, 上で求めた流れのうち, A_{00} , S_{02} , A_{10} , S_{12} の4種類の流れを採用する. これらの解の振幅を, 速度場についてそれぞれ X , A , B , C , 温度場についてそれぞれ Y , Z , D , E (これらの振幅はいずれも時間 t の関数) と仮定し, もとの非線形方程

式に代入する。①, ϕ の同じ関数形を持つもの同士を等置し、振幅についての非線形常微分方程式を得る。つぎに係数の r 依存性を調べ、その代表的な値として $r/a=0.2$ での値を用いる ($r/a=0, 0.5, 1$ では係数がゼロになるものがあるが、それ以外では比較的平坦な振舞いであること、および図 4 に示した実験データの測定箇所が $r/a=0.2$ であることによる)。

これにより新しいモデル方程式系 E L M 8 - 1 1 :

$$\dot{X} = -5.7832PrX + 0.086458PrY,$$

$$\dot{A} = -(15.265 + 20.291Pr)A + 0.019666PrZ,$$

$$\dot{B} = -14.682PrB + 0.034055PrD,$$

$$\dot{C} = -14.682PrC + 0.017028PrE,$$

$$\dot{Y} = 5.7832(RaX - Y)$$

$$+ \epsilon (7.9025XZ - 15.055AY + 0.98507BE + 12.641CD),$$

$$\dot{Z} = 12.714(RaA - Z) + \epsilon (-5.7051C$$

$$- 3.7635XY + 11.841AZ - 0.67980BD - 8.7237CE),$$

$$\dot{D} = 14.682(RaB - D)$$

$$+ \epsilon (5.4535XE - 33.883AD + 20.062BZ - 25.831CY),$$

$$\dot{E} = 14.682(RaC - E) + \epsilon (10.929A$$

$$- 5.4535XD + 33.883AE - 13.845BY + 61.536CZ),$$

(1)

を得る。

この方程式系で X, Y, Z だけを残すとローレンツ・モデル:

$$\dot{X} = -PrX + PrY, \quad \dot{Y} = (Ra/Ra_c)X - Y + XZ, \quad \dot{Z} = -bZ - XY \quad (2)$$

に帰着する (b は幾何学的パラメター). その意味で, 方程式系 (1) を 8 変数に拡張されたローレンツ・モデル

(Extended Lorenz Model with 8 variables, 略して ELM8) と呼ぶ.

モデル方程式 (1) で, まず $\varepsilon = 0.03$, $Pr = 5$ の場合について $(r/a, \phi, \Theta) = (0.2, 0, \pi/4)$ での流速 w_m , そのスペクトル, 2次元位相空間内軌道, ポアンカレ断面, リャプーノフ指数などを計算した. 初期条件をわずかに変えても, 全体的な様子としては大きな変化はなかった. 数値シミュレーションの結果は以下の通りである (図 8, 9 を参照).

(a) このモデルでの臨界レイリー数 \tilde{Ra}_c は 66.890 である. これは A_{00} 型の解を主要項だけで打ち切ったために, 理論値 Ra^* の 2 倍となったものである.

(b) $w_m \propto \sqrt{Ra - \tilde{Ra}_c}$ の関係は Ra が 300 程度まで成立ち, $Ra \geq 1000$ では $w_m \propto Ra$ となる. 流れは定常的である (図 8 a).

(c) $Ra \doteq 1240$ で第 1 回目のホップ分岐が起こり, 振動数 f_1 の単一振動の流れが生じる (図 8 b).

(d) $Ra \doteq 1810$ で第 2 回目のホップ分岐が起こり, 振動数 f_2 が現れる. 他の鋭いスペクトル線は $mf_1 + nf_2$ (m, n は整数) で表現できる (図 8 c).

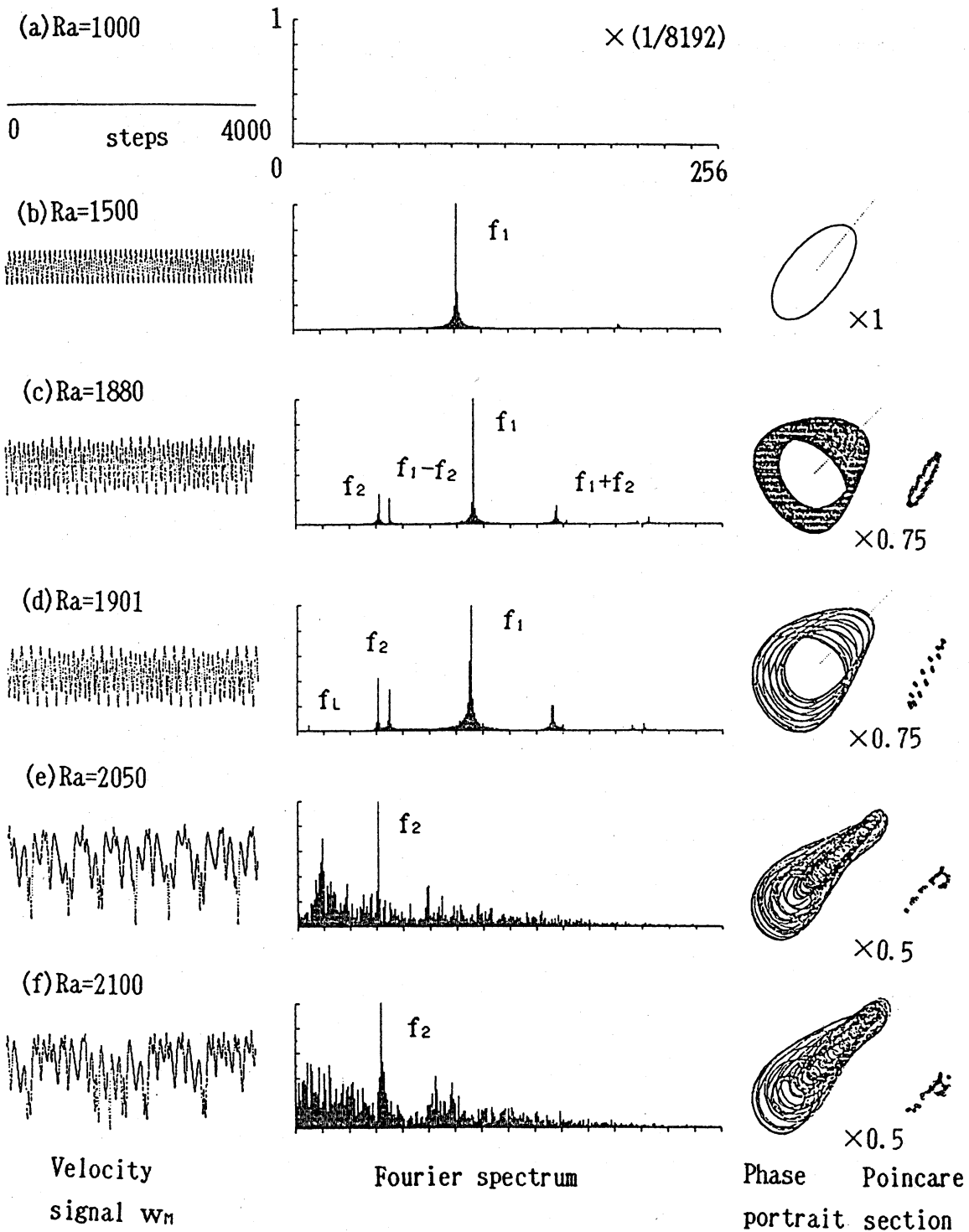


図 8. E L M 8 の数値シミュレーション ($Pr=5, \epsilon=0.03$)

この領域での、各振幅の時間変化の例を図9に示す。 w_m の平均値が短い区間で見ると2段階に分けられるように見えるが、これは振幅DやBに起因するようである。これらはいずれもA₁₀型の流れであり、この振幅が変化すると、観測されるセルの大きさや位置が変化する。

(g) このモデルは $Ra \approx 2308$ で発散する。

プラントル数を変えて調べた結果を図10に示す。Pr=5, 7, 10, 15 と増加させても全体としての傾向は変わらないように見える。しかし、臨界レイリー数 \tilde{Ra}_c や第1回目のホップ分岐に対応するレイリー数 \tilde{Ra}_1 はあまり大きな変化は見られない反面、準周期状態やカオスのはじまるレイリー数 \tilde{Ra}_n ($n=2, 3, \dots$) は著しく上昇する。このためにPr=15ではカオスが確認される前に数値的な発散が起こっている。

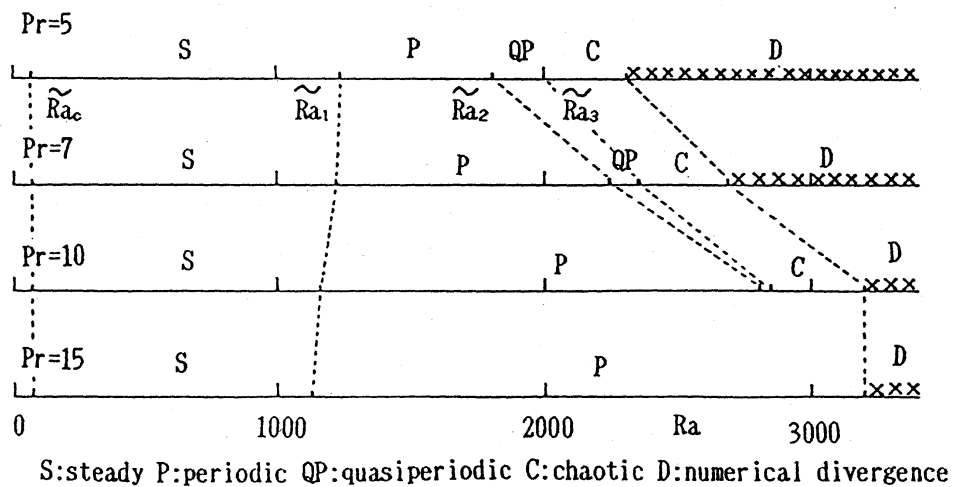


図10. 分岐の様子プラントル数依存性

(e) Ra が 1900 から 2000 の間でしばしば振動数のロッキングが起こる。例えば $Ra=1901$ で $f_L/f_2/f_1=1/7/15$ (図 8 d), $Ra=1929$ で $f_L/f_2/f_1=1/6/13$, $Ra=1995$ で $f_L/f_2/f_1=1/5/11$, など。ただし, f_L はロッキング周波数である。

(f) $Ra=1996$ でスペクトルは連続的になり, リャプーノフ指数も正になる。速度の信号もカオス的に見える (図 8 e)。

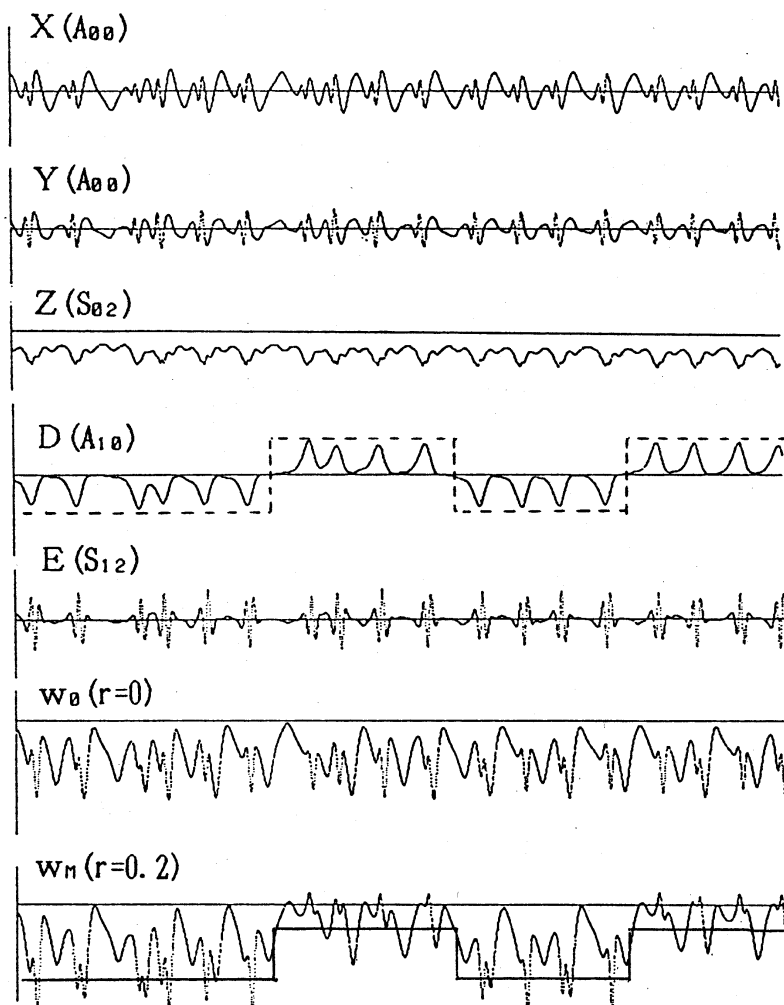


図 9. 振幅の時間変化 ($Ra=2000$, $Pr=5$, $\epsilon=0.03$)

§ 5. まとめ

鉛直トーラス内の熱対流の実験で見い出された定常3次元流を、摂動論的に導いた少数の基本解の重ね合わせで表現することができた。これらを用いて作った新しいモデル方程式 E L M 8 - 1 1 は、実験で測定された時間変動をかなりよく再現しているように思われる（図4と図8を参照）。定量的にはレイリー数の値や振動数の値で約2倍程度の不一致はあるが、弱非線形の仮定やモデル方程式の係数の決め方の粗さなどを考えればやむを得ないであろう。3次元セル構造は細かいループでも、プラントル数の異なる流体でも（それがあまり大きいものでない限り）普遍的に見られる。いろいろな流れの状態に分岐するレイリー数の値 \tilde{Ra}_n ($n = 1, 2, \dots$) は、プラントル数によって異なるが、E L M 8 - 1 1 は Pr の増加と共に \tilde{Ra}_n ($n \geq 2$) の上昇する傾向を示している。

引用文献

- 1) O. Sano: Nagare 3 (Suppl.) (1984) 197; Proc. 3rd Asian Congress Fluid Mech., Tokyo (1986), p. 331; Proc. 4th Asian Congress Fluid Mech., Hong-Kong (1989), H37.
- 2) O. Sano & T. Wakayama: J. Phys. Soc. Jpn. 58 (1989) 2615.
- 3) O. Sano: J. Phys. Soc. Jpn. 55 (1986) 4234; 56 (1987) 3893; 57 (1988) 1662; 数理解析研講究録 739 (1990) 印刷中.