

### 3次元乱流のクラスター構造

計算流体研 真田 勉 (Tsutomu Sanada)

計算流体研 石井克哉 (Katsuya Ishii)

#### § 1. 序

3次元一様等方乱流では、エネルギーの散逸が空間的に一様に起こらず、狭い部分（すなわち小さい体積）に集中して起こることが古くから知られている (Batchelor and Townsend 1949, Kuo and Corrsin 1971)。さらに、散逸が集中した領域は sheet 状または tube 状の形をしていることが、しばしば報告されている (Kerr 1987, Schwarz 1990)。このような、散逸が集中したかたまり（クラスター）に、何か普遍的な統計法則があると期待することは自然である。クラスター構造の普遍的性質の発見は、乱流に関する理解を深めてくれるであろう。

本論文では、3次元非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の直接数値シミュレーションにより得られた乱流から、エネルギー散逸場と渦度（の2乗）場を求め、そのクラスター構造について解析した結果を報告する。また乱流の特徴を浮き彫りにするため、percolation との比較も行う。

#### § 2. 支配方程式

3次元非圧縮性粘性流体の運動は、次の Navier-Stokes 方程式に支配される。

$$\partial \underline{u} / \partial t + (\underline{u} \cdot \text{grad}) \underline{u} = - \text{grad } p + \nu \Delta \underline{u} + \underline{f},$$

$$\text{div } \underline{u} = 0.$$

ここに、 $\underline{u} = (u_x, u_y, u_z)$  は非圧縮性の速度場、 $p$  は（密度で割った）圧力場、 $\nu$  は動粘性率、そして  $\underline{f}$  は外力である。各方向周期  $2\pi$  の、周期境界条件を課し、初期条件  $\underline{u} = 0$  のもとで、Navier-Stokes 方程式

をフーリエスペクトル法 (Orszag, 1971) を用いて解く。外力は大きいスケール (小さい波数 ;  $|k| \leq 2$ ) のみを持ち、また時間に依らない。動粘性率  $\nu$  を小さく取れば外力によるエネルギーの注入と粘性によるエネルギーの散逸の間にスケール分離が生じ、いわゆる慣性領域 (  $-5/3$  乗則の領域 ) が形成されることが期待される。計算に用いた空間格子点の数は  $256^3$ 、ただし aliasing error 削除のため、 $2/3$  法則を用いるので、波数領域は  $-85 \leq k_x, k_y, k_z \leq 85$  である。 $\nu = 0.0005$  と置き、時間積分は 2 次 Runge-Kutta 法を用いた ( $\Delta t = 0.005$ )。

### § 3. 時間発展と乱流場

図 1、図 2 そして図 3 は、それぞれ単位質量当りの運動エネルギー：

$$E = 1/2 \langle u^2 \rangle$$

(  $\langle \cdot \rangle$  は空間平均を表す )、エンストロフィー：

$$Q = 1/2 \langle \omega^2 \rangle$$

(  $\omega = \text{rot } u$  ; 渦度 )、マイクロスケールレイノルズ数：

$$R\lambda = \sqrt{(2E/3)} \sqrt{(5E/Q)/\nu}$$

の時間発展である。  $t=100$  では、ほぼ  $R\lambda \sim 120$  である。

図 4 - 1 1 は  $t=100$  における、  $z=0$  面のエネルギー散逸場：

$$\varepsilon = \nu/2 \sum_{i,j} \left( \partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i \right)^2$$

と渦度 ( の 2 乗 ;  $\omega^2$  ) 場の等高線図と鳥かん図である。図 4 - 7 は大きいスケール (  $2\pi \times 2\pi$  ) を、図 8 - 1 1 は小さいスケール (  $\pi/2 \times \pi$  )

1/2) を描いている。  $\varepsilon$  と  $\omega^2$  は共に速度の一階微分で表現することができる。しかし、その空間構造は、特にその小さいスケールにおいて微妙に異なっている。等高線からは、渦度場の方がやや丸みを帯びているように見える。また鳥かん図からは、渦度場のスパイク構造の方が、より sharp であることがわかる。エネルギー散逸場と渦度場の定量的な比較は次の § 4 で行う。

#### § 4. クラスタ統計

エネルギー散逸場や渦度場のかたまり具合を定量的に捉えるために、クラスタを定義する。数値シミュレーションは 3 次元単純立方格子を用いて実行されており、その各点(site)ごとに  $\varepsilon$  ( $\omega^2$ ) の値が計算できる。そこで適当な threshold を選び、その threshold よりも大きい  $\varepsilon$  ( $\omega^2$ ) を持つ site に ● を置く。このとき連結した ● の領域を 1 個のクラスタと呼ぶことにする。また 1 個のクラスタに含まれる ● の数をそのクラスタの 'サイズ' または '体積' と呼ぶことにする。クラスタは threshold に依存することに注意すべきである。各 threshold に対して、次の量を求めることができる。

Volume Ratio = (クラスタの占める体積) / (全体積)、

Energy-Dissipation Ratio = (クラスタ中で起こるエネルギー散逸量) / (全空間で起こるエネルギー散逸量)。

ここに、threshold  $\rightarrow 0$  とすれば、Volume Ratio、Energy-Dissipation Ratio 共に  $\rightarrow 1$  である。 $\omega^2$  についても同じ量が計算できる。

図 1 2 は、Volume Ratio と Energy-Dissipation (Enstrophy) Ratio の関係を示す。すなわち、この図は「どれだけの体積にどれだけのエネルギー散逸が集中しているか」、または「どれだけの体積にどれだけのエンストロフィー (渦度の 2 乗) が集中しているか」を表している。ある Volume Ratio に対して、Energy-Dissipation (Enstrophy) Ratio が大きい

方が、より集中度が高いと言える。図からエンストロフィーの方がエネルギー散逸よりも集中度が高いことがわかる。

次に横軸に Volume Ratio、縦軸にその体積を賄うクラスタの数をプロットしたものを図 1 3 に示す。ある Volume Ratio に対して、クラスタの数が多の方が場の構造はバラバラなものになる。Volume Ratio が小さいところ、すなわち  $\varepsilon$  や  $\omega^2$  の値が大きい部分では両者の間に違いが見られる。そこでは  $\varepsilon$  の方が、よりバラバラである。しかし、他の部分では大きな違いは見られない。

ところで Volume Ratio を確率  $p$  とみなし、単純立方格子のすべての site 上に、独立に確率  $p$  で ● を置くと、 $p$  に依存した一つのパターンができる。これは、いわゆる percolation の field に他ならない (Stauffer 1985)。このようなパターンは確率  $p$  を与えた下での、最もランダムなパターンと見なすことができるだろう。 $\varepsilon$  や  $\omega^2$  などの秩序を持った乱流場と、このランダムな場の比較は興味のある課題である。図 1 3 では、percolation の場合についても Volume Ratio ( $p$ ) vs Number of Clusters が plot してある。percolation と比べると、乱流は同じ体積を賄うクラスタの数ははるかに少なく、 $\varepsilon$  や  $\omega^2$  の大きい領域が固まる傾向にあることがわかる。

図 1 4 と図 1 5 は、ある threshold を選んだときのクラスタサイズの分布関数である。 $p_c = 0.3117$  は、単純立方格子における percolation の臨界値であり (いわゆる percolation probability)、この値を境にして、パターンの定量的性質のいくつかが不連続的に変化 (相転移) することが知られている。 $p_c$  付近では  $\varepsilon$ 、 $\omega^2$ 、percolation 共に ( $S$  の小さい部分で)  $N \sim S^{-2}$  のべき分布に従っていることがわかる。ところが、 $p \sim 0.1 < p_c$  (subcritical) では、percolation は  $N \sim S^{-2}$  より急減少であるが、 $\varepsilon$  と  $\omega^2$  は依然  $N \sim S^{-2}$  のべき分布に従っている。

$\varepsilon$  や  $\omega^2$  の場合は、percolation と比較して、大きなかたまりを作る傾向が強い。しかし、乱流は percolation の臨界値  $p_c$  における指数を (なぜか) 知っている。これは乱流場の本質に関わる問題を提起しそうである。(クラスタ統計のレイノルズ数依存性については、真田, 石井 (199

0)を参照。)

### § 5. まとめ

乱流中に現れる、 $\varepsilon$  や  $\omega^2$  の大きい領域が形成するクラスターについて、その統計的性質を報告した。percolation との比較により、乱流では確かに その大きい領域が固まる傾向にあることがクラスター統計を用いて、定量的に示された。これは、Navier-Stokes 方程式の dynamics の特徴の一つである。 $\varepsilon$  と  $\omega^2$  の場のクラスター統計には、 $\varepsilon$  や  $\omega^2$  が極めて大きい部分で、やや差がみられる。そこでは、 $\omega^2$  の方がより固まる傾向が強い。クラスターサイズのベキ分布  $N \sim S^{-2}$  が、percolation の臨界点におけるベキ分布と同じ指数  $-2$  を持つことは極めて興味ある現象と考えられる。この現象の解明には、より多くの理論的考察が必要であろう。

### 参考文献

- Batchelor, G.K. and A.A. Townsend 1949, Proc. R. Soc. London A199, 238.  
 Kerr, R.M. 1987, Phys. Rev. Lett. 59, 783.  
 Kuo, A.Y.-S. and S. Corrsin 1971, J. Fluid Mech. 50, 285.  
 Orszag, S.A. 1971, Stud. Appl. Math. 50, 293.  
 Schwarz, K.W. 1990, Phys. Rev. Lett. 64, 415.  
 Stauffer, D. 1985, Introduction to Percolation Theory (Taylor and Francis Inc.).  
 真田、石井 1990, 物性研究 53-6, 738.

### 図の説明

図 1. Energy の時間発展。

図 2. Enstrophy の時間発展。

図 3. マイクロスケールレイノルズ数の時間発展。

図 4 - 1 1.  $\varepsilon$  と  $\omega^2$  の等高線図と鳥かん図 ( $z=0$  面、 $t=100$ )。

図 4 - 7 は大きいスケール ( $2\pi \times 2\pi$ )、図 8 - 1 1 は小さいスケール

—ル ( $\pi/2 \times \pi/2$ )。

図 1 2. Volume Ratio vs Energy-Dissipation Ratio ( symbol  $\Delta$  )  
と Volume Ratio vs Enstrophy Ratio (  $\circ$  ) at  $t=100$ 。

図 1 3. Volume Ratio vs Number of Clusters.

$\varepsilon(\Delta)$ ,  $\omega^2(\circ)$  と percolation( $\square$ )。

図 1 4 - 1 5. Cluster Size の分布関数。  $\varepsilon(\Delta)$ ,  $\omega^2(\circ)$  と percola  
tion( $\square$ )。 図 1 4 は臨界点近く ( $\varepsilon(\text{Volume Ratio}=0.307)$ 、  
 $\omega^2(\text{Volume Ratio}=0.257)$  と percolation( $p_0=0.3117$ ))。 図 1 5 は  
subcritical ( $\varepsilon(\text{Volume Ratio}=0.092)$ ,  $\omega^2(\text{Volume Ratio}=0.108)$  と  
percolation( $p=0.1$ ))。

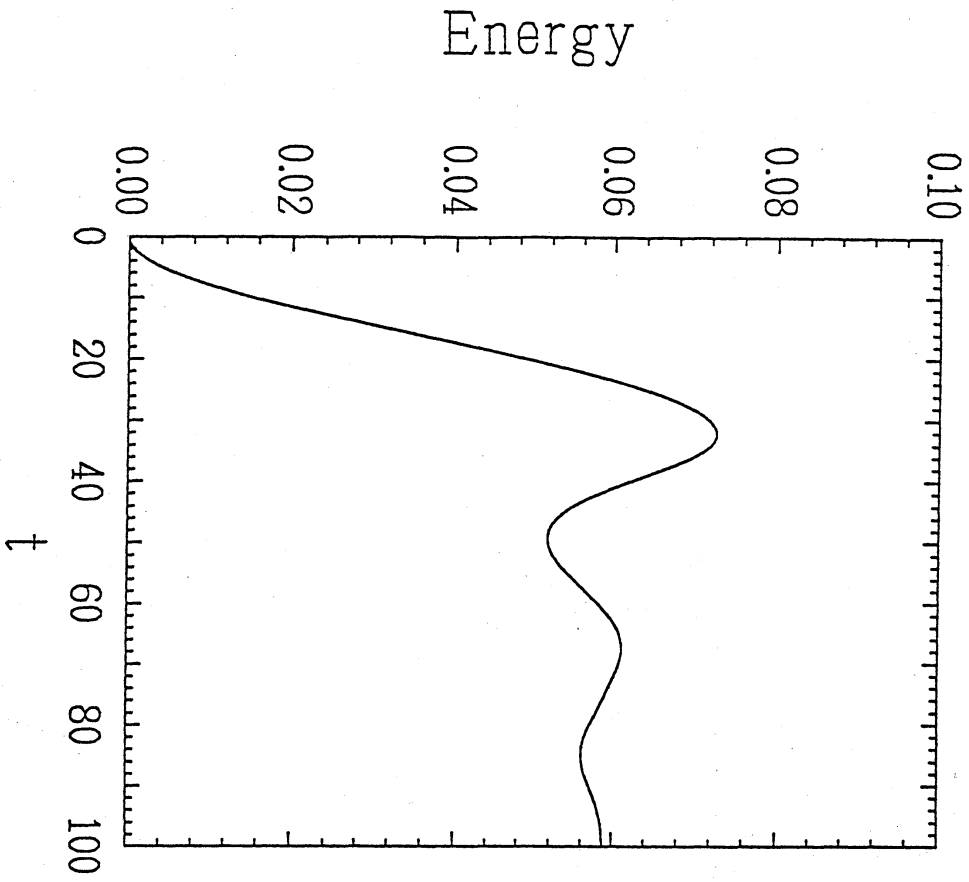


图 1

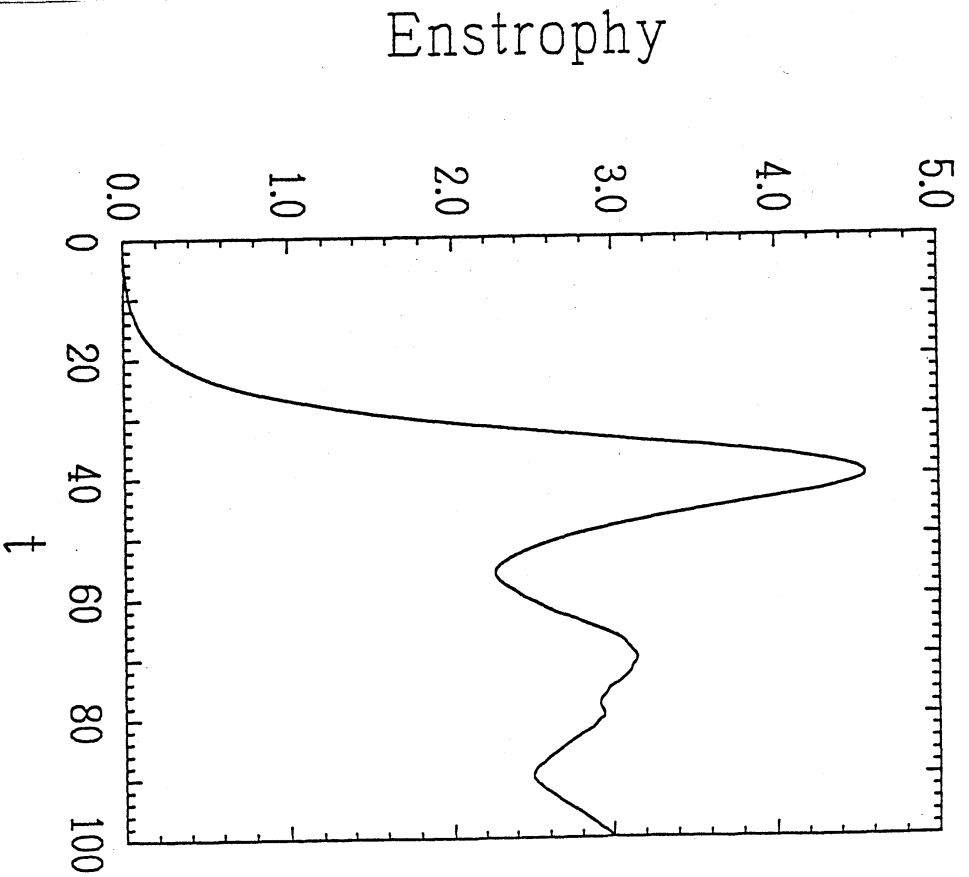


图 2

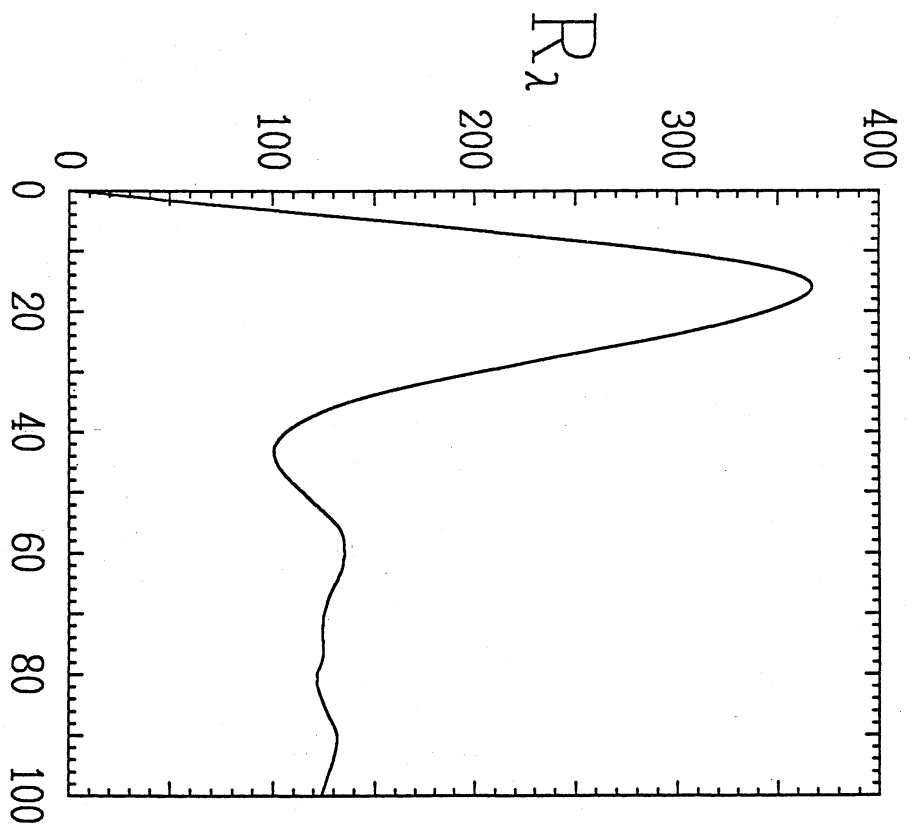
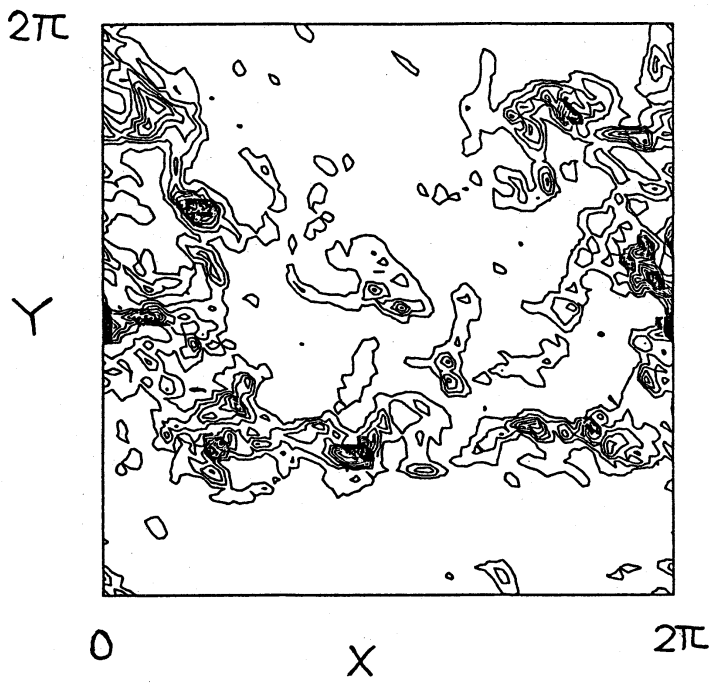
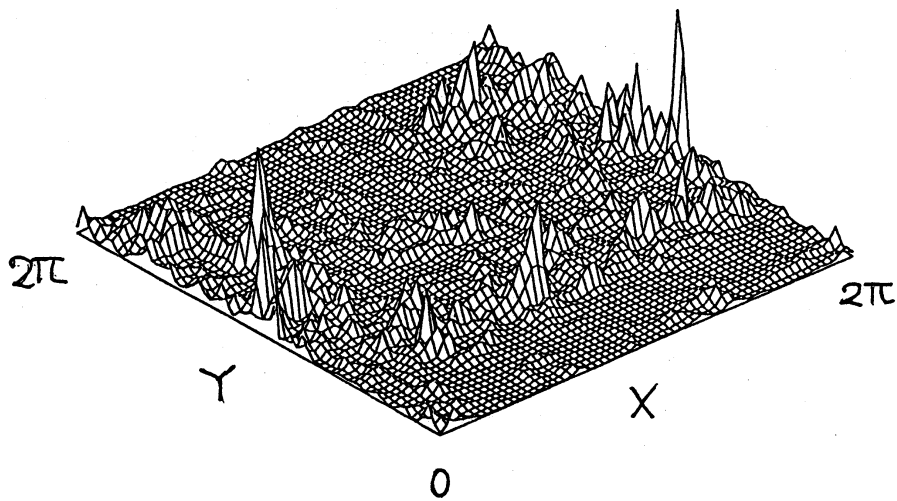


图 3

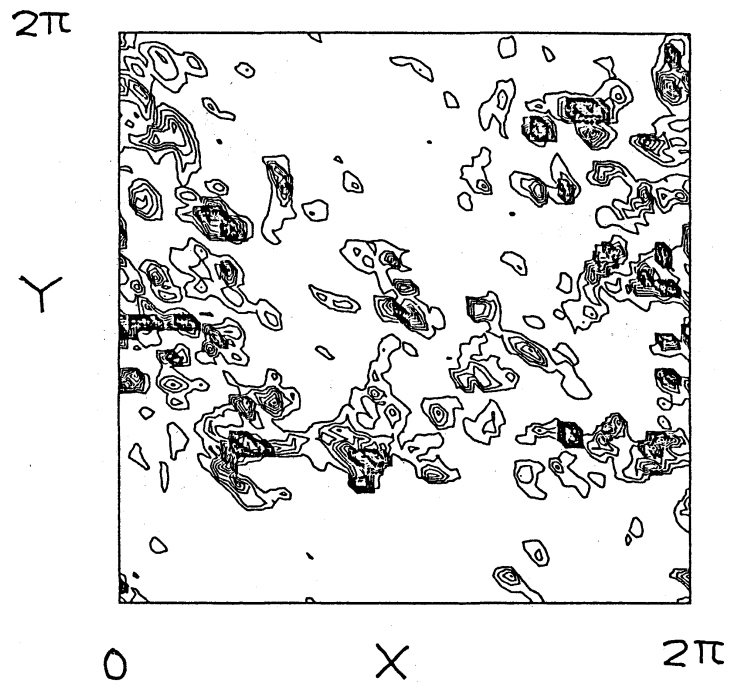
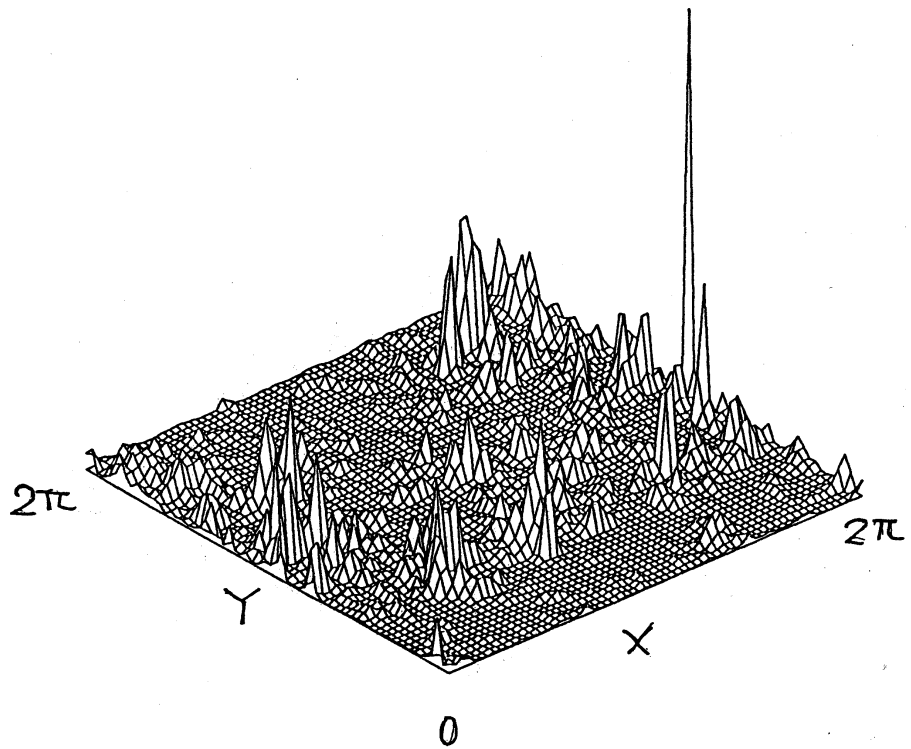


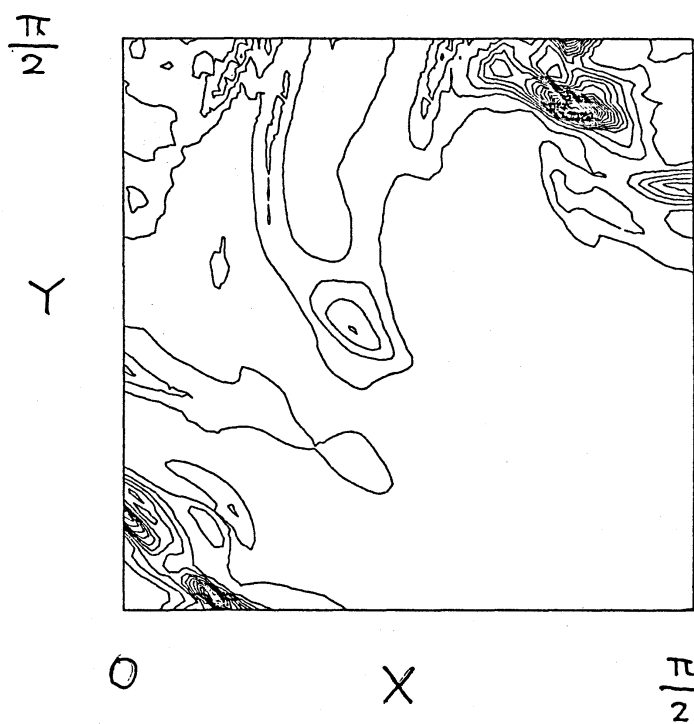


⊠ 4,  $\varepsilon$

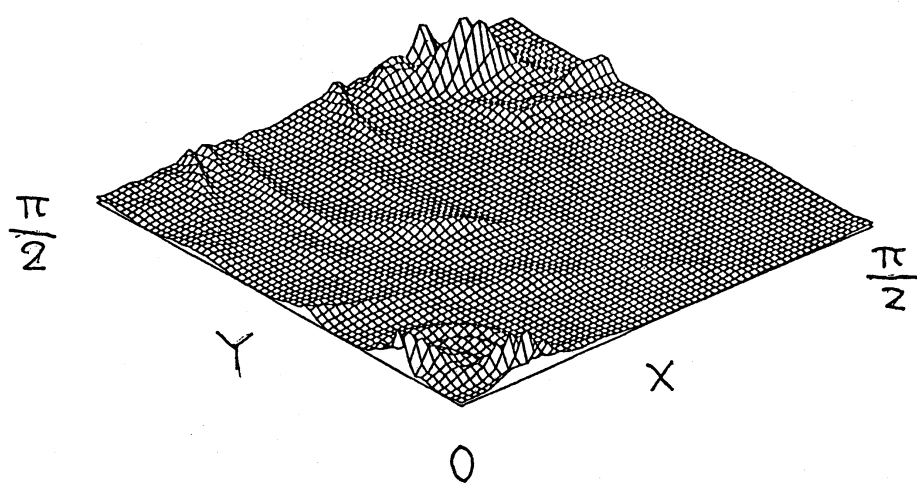


⊠ 5,  $\varepsilon$

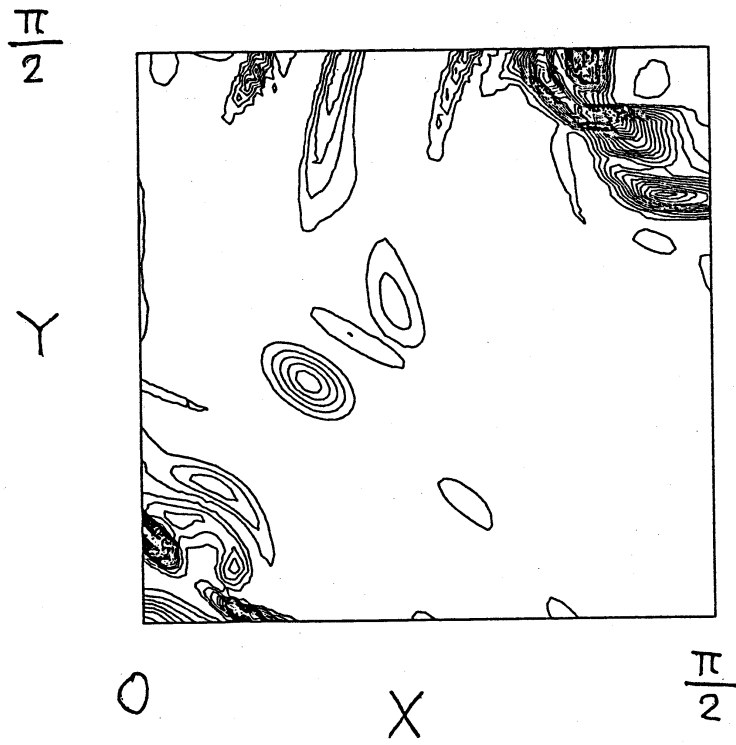
⊠ 6,  $\omega^2$ ⊠ 7,  $\omega^2$



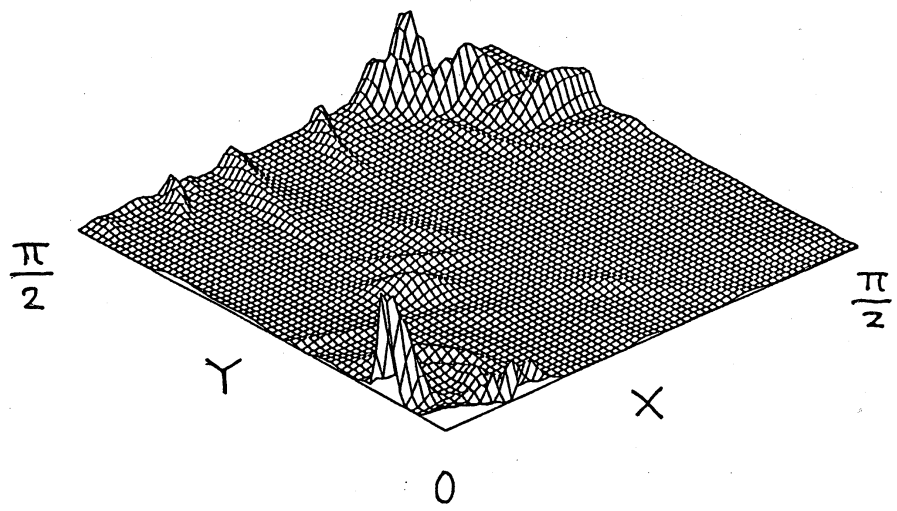
3 8,  $\varepsilon$



3 9,  $\varepsilon$



⊠ 10,  $\omega^2$



⊠ 11,  $\omega^2$

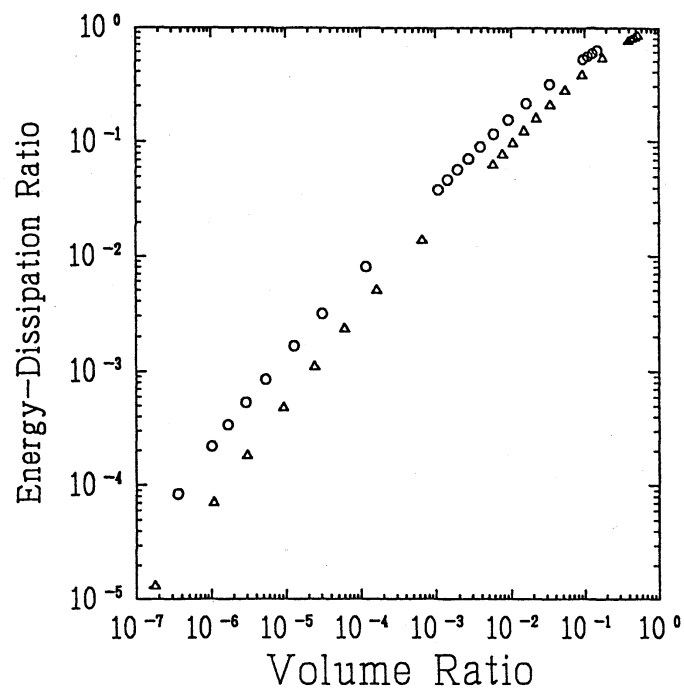


図 12

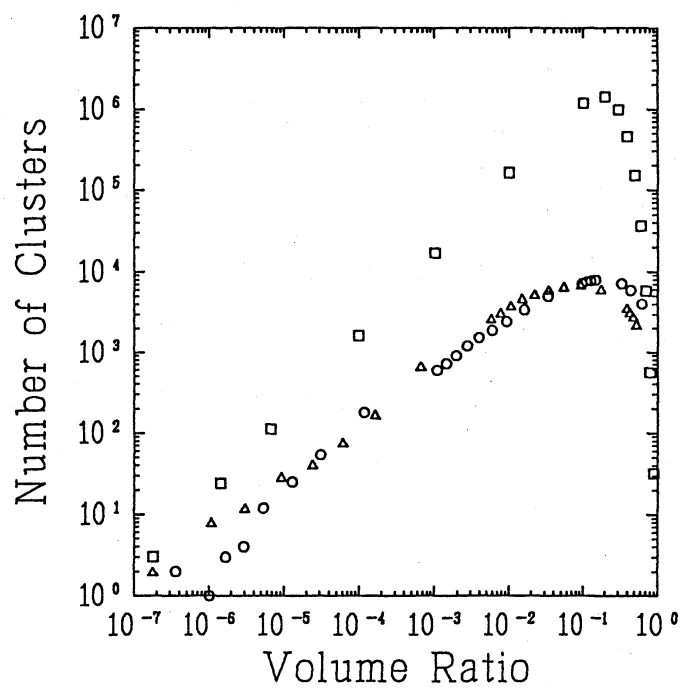


図 13

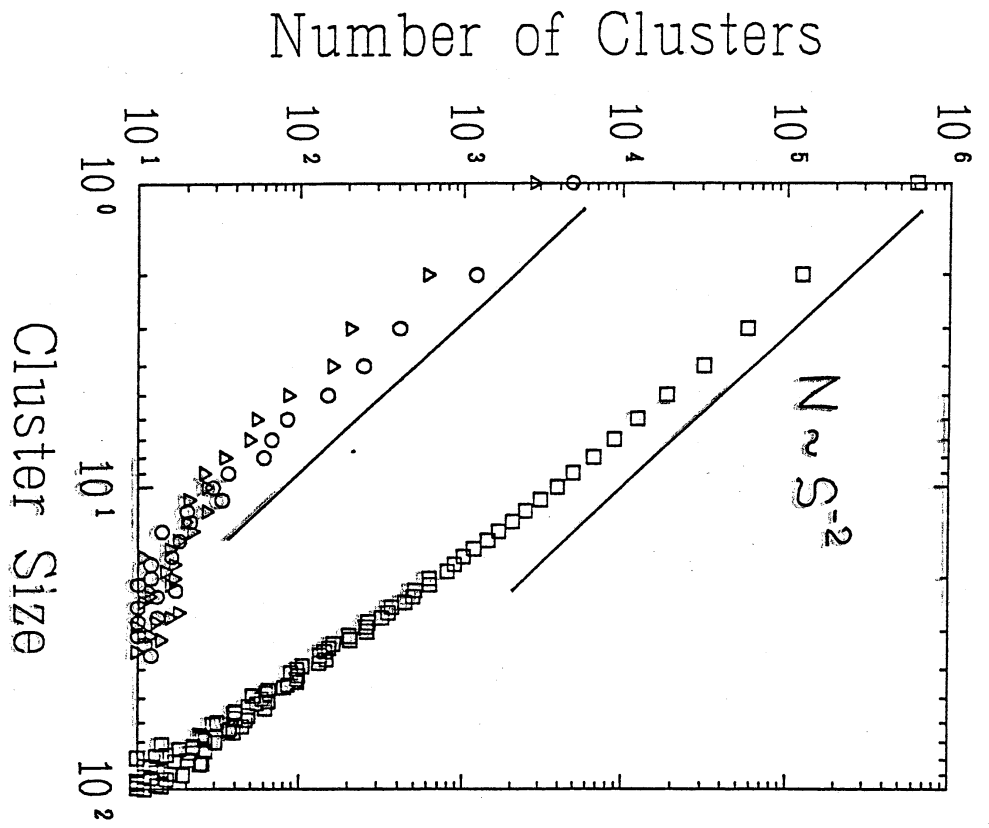


图 14

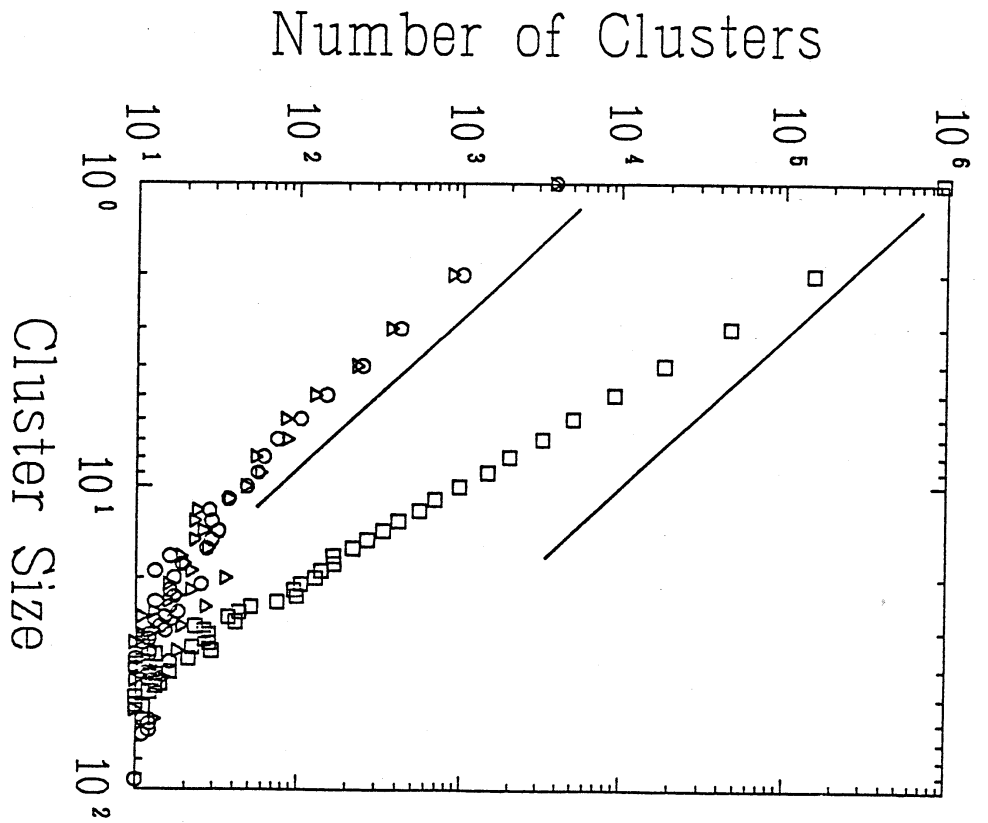


图 15