数理解析研究所講究録
第 774 巻 1991 年 87-92

乱流のマルチフラクタル構造におけるαの確率分布

電通大　細川　巌　(Iwao Hosokawa)

航技研　山本稀義　(Kiyoshi Yamamoto)

1．いとぐち

等方性乱流のマルチフラクタル構造は，一般次元D_qと関連して次式の中に具現化されている。[1)]

$$\int \rho(\alpha) r^{(\alpha-1+d)q} r^{-f(\alpha)} d\alpha \Rightarrow r^{(q-1)Dq} \quad \text{as } r\to 0 \qquad (1)$$

αは乱流場のスケール指数，dは空間次元，$f(\alpha)$は等α集合のフラクタル次元，rはマクロスケールLによって規格化されている。ここで$\rho(\alpha)$はしかるべきαの測度であるが，未定である。マルチフラクタルの理論において，いまだかって$\rho(\alpha)$がくわしく議論されたことはないので，ここでその妥当なかたちを確定したい。

もしこれができれば，空間におけるαの分布確率が確定し，αによって表現できる全ての変数のアンサンブル平均を計算することができる。

じっさいに，理論的に$f-\alpha$スペクトルがわかっているときのαの確率分布をこのようにして計算し，数値実験などから得られるαの空間分布と比較することは興味があるので，それを試みる。

2．αの確率分布

例によって，式(1)の左辺を鞍部点法によって計算すると，

$$\text{左辺} = \int \rho(\alpha_1) r^{(\alpha_1 - 1 + d) q} r^{-f(\alpha_1)} r^{-f''(\alpha_1)(\alpha - \alpha_1)^2/2} (\quad) d\alpha \tag{2}$$

ここで $q = f'(\alpha_1)$, $f''(\alpha_1) < 0$, ( )には $r \to 0$ で無視できる因子：$|\log r|^{1/2}$ を付け加えておく。こうすると，両辺ともにrの冪となり，形式が整う。(2)を計算し，(1)と等値すると，まず

$$(\alpha_1 - 1 + d) q - f(\alpha_1) = (q - 1) D_q \tag{3}$$

がえられる。これは良く知られた接触変換の基礎式である。さらに数因子が一致するためには，

$$\rho(\alpha_1) = |f''(\alpha_1)|^{1/2} / (2\pi)^{1/2} \tag{4}$$

でなければならない。

(4)を入れて，(1)を書き直すと，$q = 0$の場合，

$$\int [|f''(\alpha) \log r| / (2\pi)]^{1/2} r^{d - f(\alpha)} d\alpha = r^{d - D_0} \tag{5}$$

となる。 左辺の被積分関数（$= p(\alpha; r)$)はαの空間分布の確率を与える。$d = D_0$の場合には，右辺＝1となりαは全空間を満たして存在するが，$d > D_0$のときはそうではない。（例：βモデル。）

Lognormal model の場合，(5)から与えられる確率は，$D_q = -\mu q/2 + d$（$\mu_q = \mu q(q-1)/2$ と等価。）から出発して$f(\alpha)$を算出し，

$$f(\alpha) = -(\alpha - 1 - \mu/2)^2 / (2\mu) + d \tag{6}$$

を得るから，

$$p(\alpha;r)=r^{(\alpha-1-\mu/2)/2\mu}/[|\log r|/(2\pi\mu)]^{1/2} \qquad (7)$$

となる。この時，明らかに$\int p(\alpha;r)d\alpha=1$。

3．数値実験との比較

乱流のf－αスペクトル（第２図）が分かっている時，(7)のように簡単な解析的フォームでなくても，$p(\alpha;r)$を示すことができる。第１図の実線は，等方性乱流の数値計算結果[2]による$f(\alpha)$から$p(\alpha;r)$を計算したものである。点線はpモデル[3]である。

一方，スケールrのsubboxでの平均散逸ε_rから$\varepsilon_r/\varepsilon_L=(r/L)^{\alpha-1}$の関係によって計算できるαの空間分布が，慣性領域のrにおいて　○，×，△，□によって示してある。

少なくとも，αの値域は見事に一致しているが，ピークの位置がずれている。理論的には，ピークが$\alpha=1$より右にある方が正しい。(7)がそれを示している。Meneveau & Sreenivasan[4]が述べているように，又第２図が示すように，Lognormal model はピーク近傍で正しいのである。Kolmogorovの 1941theory は$\alpha=1$で成立する。

いまのところ，第１図の不一致がレイノルズ数の十分大きくないことによるのか，現実の乱流場が，本来，完全な自己相似性を持たないことに起因するのか，不明である。（マルチフラクタルの理論は$r\to 0$において完全な自己相似性を前提している。）

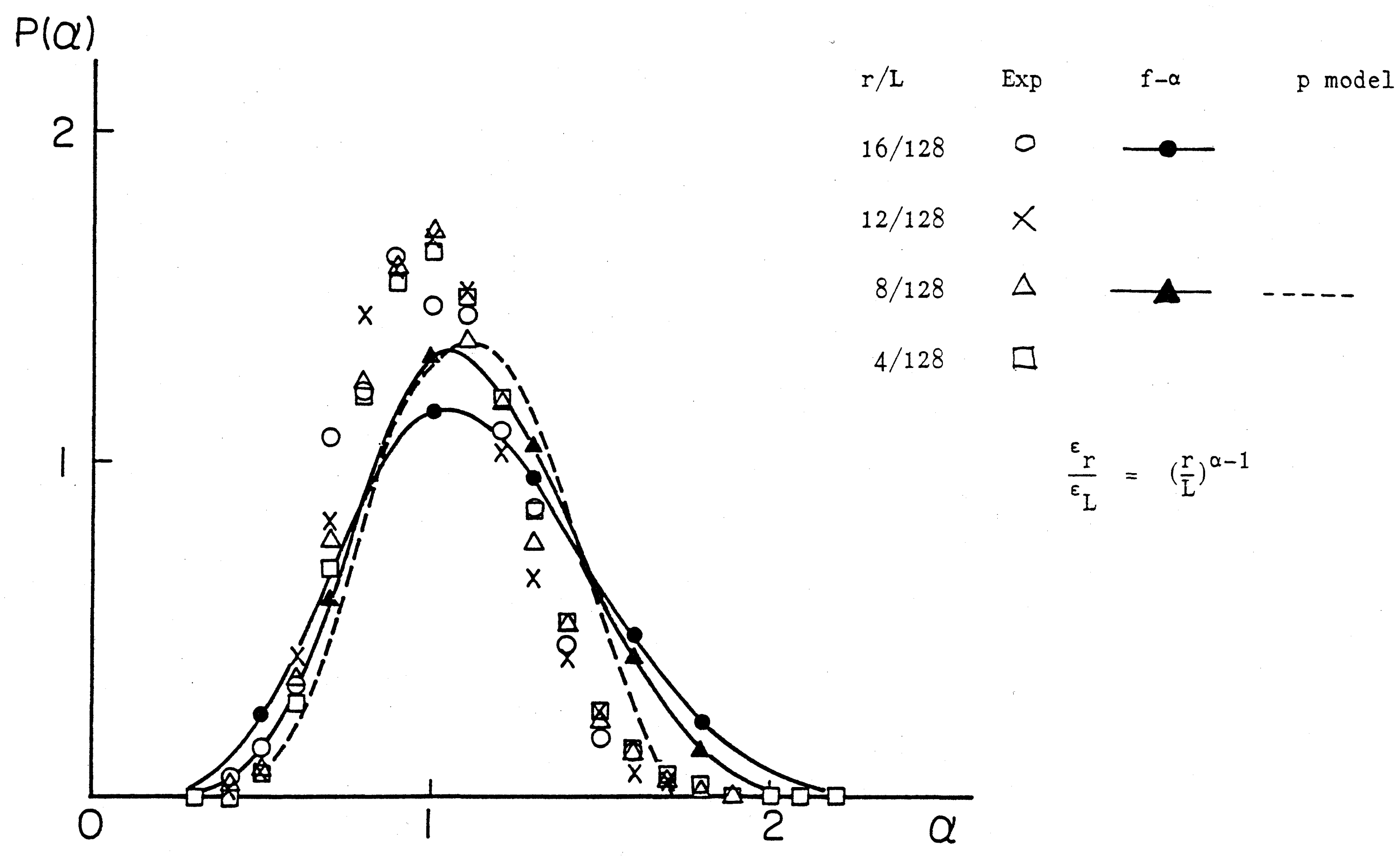
参考文献

１）細川：第４５回物理学会講演予稿集（第４分冊），ｐ．８７．

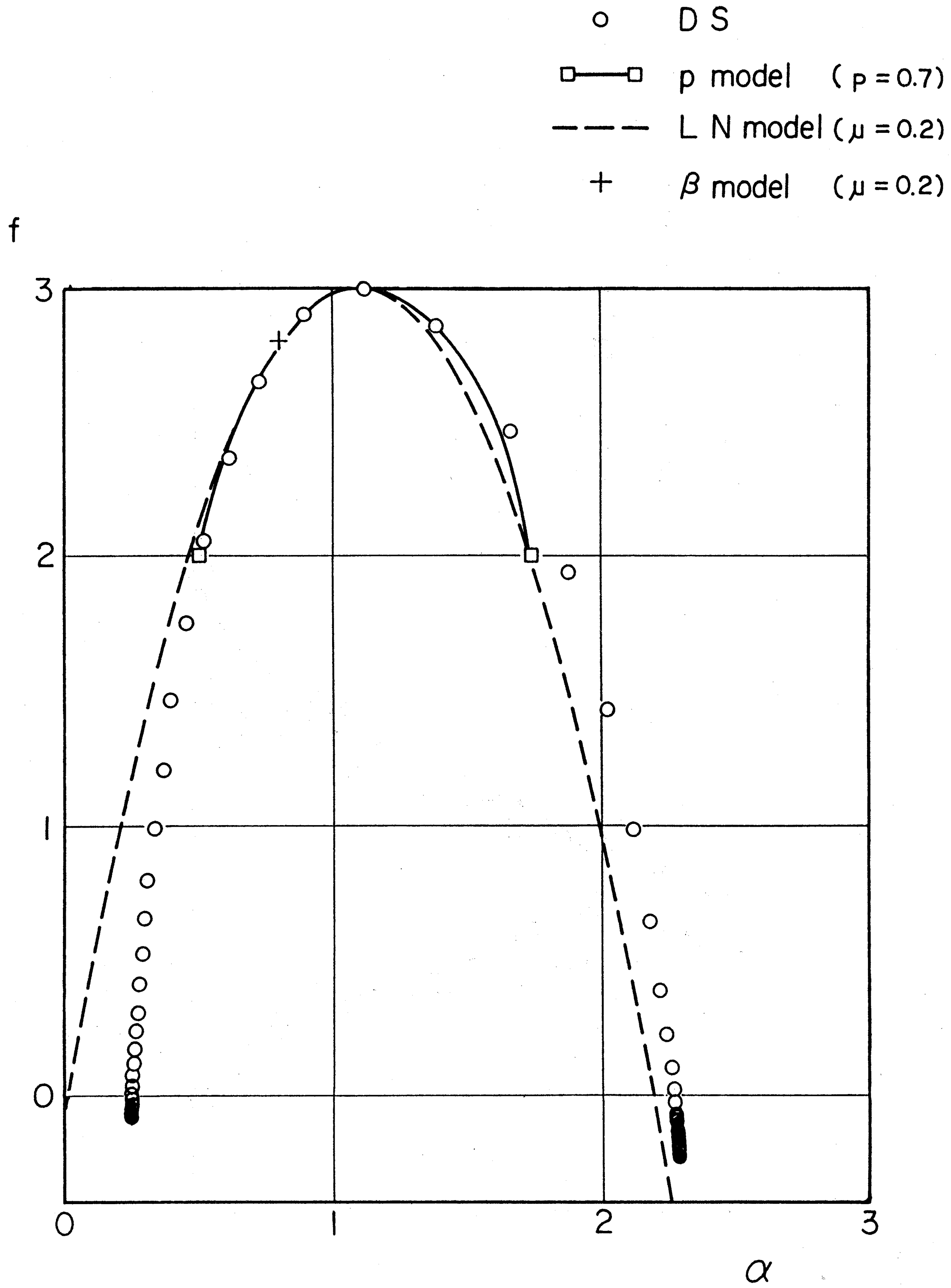
２）I. Hosokawa & K. Yamamoto: J. Phys. Soc. Japan 59 (1990) 401.

３）C. Meneveau & K. R. Sreenivasan: Phys. Rev. Lett. 59 (1987) 1424.

４）C. Meneveau & K. R. Sreenivasan: Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 2 (1987) 49.


P(α)
2
1
0
1
2
α
r/L
Exp
f−α
p model
16/128
12/128
8/128
4/128
$\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_L} = (\frac{r}{L})^{\alpha-1}$

第 1 図



第 2 図