数理解析研究所講究録
第 774 巻 1991 年 103-125

円柱内ストークス流のラグランジュカオスの解析
（局所的解析）

東大理　中村英史（Fusashi Nakamura）

§1　ラグランジュカオスの位置付け

ラグランジュカオスとは粒子の軌道を追ってそのカオス的振舞を調べるのが目的であるが、別の立場から見直してみよう。

Euler記述；場の方程式 $\xrightarrow{\text{積分}}$ 速度場 etc. $v(x,t)$

{ N.S. eq. / Euler. eq. / Stokes. eq.

Lagrange記述；〃　〃 $\dashrightarrow$ 与えられたベクトル場 $v(x,t)$ に対して

$$\dot{x}_p = v(x_p, t)$$
$$\dot{x}_s = v(x_s, s) \quad \text{etc}$$

$\xrightarrow{\text{積分}}$ { $x_p(t)$; particle path / $x_s(t,s)$; stream line

図をみればわかるように、ラグランジュカオスとはラグランジュ記述における速度場の積分曲線を求める操作である。ここで速度場の積分曲線と述べたが流体力学では三種類ある。

① Stream line

$$\frac{dx}{ds} = v(x(s), t)$$ tは固定したパラメータとみる

② Particle path

$$\frac{dx}{dt} = v(x(t), t)$$

③ Streak line

いわゆるインク線の流れ

よく知られている様にvが定常であれば、三つの積分曲線は一致するが非定常だと様子が全く異なる。Stream lineは各時刻での速度場の積分曲線で、時刻tをパラメーターとして持っており領域中交叉したりすることはない。これに対しParticle pathは一つの粒子の軌跡を時間的に追ったもので、非定常の場合は、自分自身と交叉するなどカオス的振舞を示す要素を持っておりMixing Problemにも関連している。最後のStreak lineは初期条件を空間的には固定して時間的にずらして次々と領域中にトレーサーを送り出しその後の様子をみるもので、ここでは扱わない。

まとめると、ラグランジュカオスとは、非定常速度場の非自励系としての積分曲線のことである。

§2 カオスとなる原因

§1 の最後で"ラグランジュカオスとは――…積分曲線…"と書いたがもちろんすべての非定常ベクトル場の積分曲線がカオス的振舞をする分ではない。乱流などのEuler記述においては速度場のカオス的振舞の原因は，速度場の支配方程式であるNavier-Stokes方程式中の速度場についての非線項である（～～部）

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = -\underset{\sim\sim\sim}{(v\cdot\nabla)v} - \nabla p + \nu\Delta v \\ \operatorname{div} v = 0 \end{cases}$$

ではParticle Pathはどうであろうか。

$$\dot{x} = v(x, t)$$

上式二つを較べてみればわかるように，Particle Pathの非線形性は速度場vがxの函数として非線形性を持てばよいわけでこれはむしろごく一般的である。又さらに進んで速度場vそのものは解析的で層流であっても，Particle Pathは複雑な振舞をする可能性もある。実際，コーヒーにミルクを入れたり（あまり速くかき混ぜてはダメ），すみ絵式は，流れがStokes流と近似され得る場合でもミルクやすみ式のトレーサーはラグランジュカオスとして複雑なconfigurationを示すのである。よって，速度場そのものの非線形性がなく流れ

が層流であってもParticle Pathを見ればカオス的状況を観察できるし，又，Stokes流でもMixing Problemに対するモデルとみなせるのである。

§3 解析法

今まで述べた様にParticle Pathは元の速度場の方程式からみれば二回積分しなくてはならないが，カオス的振舞を見るには速度場が乱れていなくともよい。むしろ層流においてもカオス的振舞がみられるという事が興味深い。（もちろん非定常でなくてはならない。） これは非定常流のStream lineとParticle Pathの定性的差の現われであるが，突き詰めて考えれば非自励系の常微分方程式の積分曲線を空間に射影しているからである。時間軸方向にもう一つ次元を与えれば，自励系となってしまう。ということは逆に考えてカオス的振舞を示すParticle Pathでも何らかの秩序構造が見られるかも知れない。そこで空間内に固定した断面とParticle Pathとの交点をとったPoiancare Mapを調べてみた。

さて，速度場として何を持ってくるかというのは重要な問題であるが，ここでは今まで述べた理由からStokes流を考

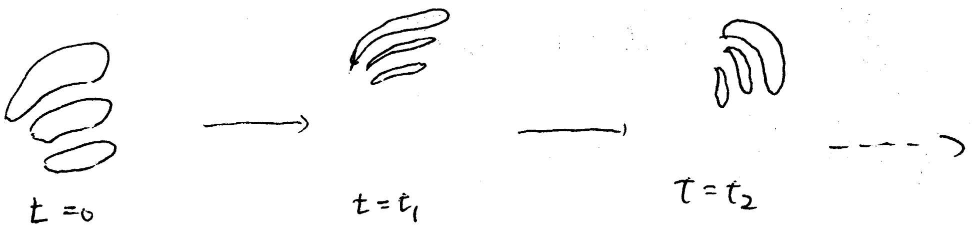
与える事にした。領域としては円柱を考え軸方向には周期的であるとした。Stokes流を持ってきたのは，

① 解析解の存在

② 速度場の重ね合わせができる

からである。

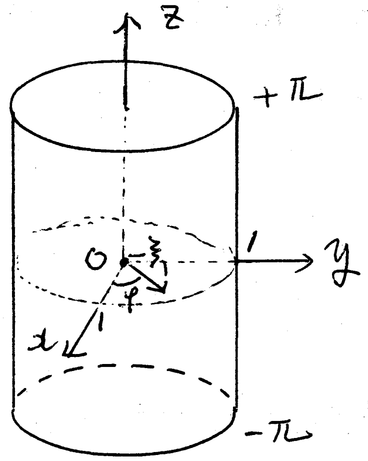
まず，定常解を求めそれに時間周期的な外力を加えた。外力は速度場の時間周期的成分を打ち消すように与えられていて，多少人工的ではあるがこうすると各時刻のstream line族は定常解のstream line族と位相的には同値であるという重要な性質が得られるのである。（下図）



この様な流れの中に落とされたトレーサーは次々とstream line（この場合は全て閉じている！）を渡り歩いて，複雑な軌道を描くのである。

§4 計算

次の様なconfigurationで数値計算した。



円柱座標

軸方向 …… $z \in [-\pi, \pi]$

動径方向 … $\xi \in [0, 1]$

角度方向 … $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$\vec{v} \equiv \vec{v}(z, \xi, \varphi) = v_z \vec{e}_z + v_\xi \vec{e}_\xi + v_\varphi \vec{e}_\varphi$$

Stokes 流

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\operatorname{grad} p + \nu \Delta \vec{v} \\ \operatorname{div} \vec{v} = 0 \end{cases}$$

境界条件

- 定常流 ⟺ 非摂動系

$$v_z\big|_{\xi=1} = \frac{1}{2} \sin z \sin \varphi$$

$$v_\xi\big|_{\xi=1} = 0$$

$$v_\varphi\big|_{\xi=1} = \frac{1}{2} \cos z (1 + \cos \varphi)$$

上の条件のもとでの厳密解は次の様になる。

$$v_z = \sin z \sin\varphi$$
$$\times \left[C_\psi \zeta \left\{ -I_0(\zeta) + \frac{1}{3} I_2(\zeta) \right\} + (D_+ - D_-) I_1(\zeta) \right]$$

$$v_\zeta = \cos z \sin\varphi$$
$$\times \left[C_\psi \frac{2}{3} \zeta I_1(\zeta) + D_- I_0(\zeta) - D_+ I_2(\zeta) \right]$$

$$v_\varphi = \cos z \cdot \hat{B}_1 \cdot I_1(\zeta)$$
$$+ \cos z \cos\varphi \left[D_- I_0(\zeta) + D_+ I_2(\zeta) \right]$$

$I_n(\zeta)$; n 次の変形 Bessel 函数

定数 ;

$$C_\psi = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{1}{2} C_{1\psi} + \frac{1}{2} C_{2\psi} \right)$$

$$D_- = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{1}{2} D_{1-} + \frac{1}{2} D_{2-} \right)$$

$$D_+ = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{1}{2} D_{1+} + \frac{1}{2} D_{2+} \right)$$

$$\Delta = \frac{2}{3} \left\{ I_1^2 (I_0 + I_2) + I_0 I_2 (I_2 - 3I_0) \right\} > 0 \qquad I_n \equiv I_n(1)$$

$$C_{1\psi} = \frac{1}{2} I_1 (I_2 - I_0)$$
$$D_{1-} = \frac{1}{6} (I_2^2 - 3 I_0 I_2 + 2 I_1^2)$$
$$D_{1+} = \frac{1}{6} (I_0 I_2 - 3 I_0^2 + 2 I_1^2)$$

$$C_{2\psi} = 2 I_0 I_2$$
$$D_{2-} = -\frac{2}{3} I_1 I_2$$
$$D_{2+} = \frac{2}{3} I_1 I_0$$

$$\hat{B}_1 = \frac{1}{2 I_1}$$

この主流の境界条件を時間周期的に変動させることにより摂動を与える。すなわち,

$$v_x\Big|_{\zeta=1} = \Big(\frac{1}{2} + \varepsilon \sin \underbrace{\frac{2\pi}{T}}_{\omega} t\Big) \sin\zeta \sin\varphi$$

この時,解の形式的型は変らない。定数部のところで,

$$C_\psi = \frac{1}{\Delta}\Big(\frac{1}{2}C_{1\psi} + \big(\frac{1}{2} + \varepsilon \sin\omega t\big) C_{2\psi}\Big)$$

$$D_- = \frac{1}{\Delta}\Big(\frac{1}{2}D_{1-} + \big(\frac{1}{2} + \varepsilon \sin\omega t\big) D_{2-}\Big)$$

$$D_+ = \frac{1}{\Delta}\Big(\frac{1}{2}D_{1+} + \big(\frac{1}{2} + \varepsilon \sin\omega t\big) D_{2+}\Big)$$

と,変わるだけである。

ここで注意しなければならないのは,摂動系の速度場はもはやStokes流ではないことである。すなわちTが非常に大きく準定常とみるか,あるいは$\frac{\partial v}{\partial t}$を打ち消す様な外力を加えたと解釈しなくてはならない。しかしながら後にも述べる様にこの形の速度場のstream lineは各時刻でトポロジーが同じであるので,particle pathの様子の違いがはっきり見えるという利点がある。

さて今回の解析では題に示した様に局所的な事柄を対象にした。すなわち,特定の積分曲線が主流と摂動系でどの様に異なる振舞を示すかを調べた。その前に速度場とstream line

の一般的性質を列挙しておこう。

● 非摂動系の速度場と(stream) line の特徴

① $v_\xi(-z)=v_\xi(z)$, $v_\varphi(-z)=v_\varphi(z)$, $v_z(-z)=-v_z(z)$

すなわち $z\in[0,\pi]$ のみで考えればよく $z\in[0,-\pi]$ はその対称($z=0$ 面に関する)移動で得られる

② $v_z\left(\frac{\pi}{2}+z\right)=v_z\left(\frac{\pi}{2}-z\right)$, $v_\xi\left(\frac{\pi}{2}+z\right)=-v_\xi\left(\frac{\pi}{2}-z\right)$, $v_\varphi\left(\frac{\pi}{2}+z\right)=-v_\varphi\left(\frac{\pi}{2}-z\right)$

line は $z=\frac{\pi}{2}$ について対称．すなわちすべて閉じている。

よってすべて中立安定な周期軌道かホモクリニック軌道のいずれかである。

③ $v_z|_{z=0}=v_z|_{z=\pi}=0$

line はすべて $z\in[0,\pi]$ に閉じ込められている。$z=0,\pi$ では slip condition と考えられる

④ stagnation points ; $\vec{x}_0$ s.t. $\vec{v}(\vec{x}_0)=\vec{0}$

1. $z=0$, $\varphi=\pi$, $\xi=0.00382$ elliptic

2. $z=\pi$, 〃 〃 〃

3. $z=\frac{\pi}{2}$ $\varphi=\pi$ $0.00382<\xi<1.0$ hyperbolic

固有ベクトルは $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 面上平行

4. $z=\frac{\pi}{2}$, $\varphi=0$, $0\leq\xi\leq1.0$ $\cup$ $\varphi=\pi$ $0<\xi<0.00382$ elliptic

これらは速度場の式から求められるものである。

この様な主流の stream line のうち特に stagnation point を通らないものを一本えらび，C とする。C は，

$t=0,\quad z=\frac{5}{6}\pi,\quad \xi=0.8,\quad \varphi=0.0$

という初期条件で出発した周期軌道で，その周期は $T_0=16.0$ である。（図1），ただし図1は，左上の円は円柱の上からの投影図，左下は $-y$ 方向からの（$x-z$ 平面への）投影図，右下は $+x$ 方向からの（$y-z$ 平面への）投影図である。以下，この形式で作図する。

このCに対し，2種類の摂動を加える。どちらも同じ初期条件から出発し，摂動の振幅 ε は 0.1 で，一つは C と同じ周期 $T_1=16.0$ の時間周期の摂動がある場合の C_1，もう一つは $T_2=10.0$ の場合の C_2 である。特に C_1 は共鳴現象が期待できる。（図2，3）。

ところが，図2，図3をみればわかるように C_1，C_2 はだいぶ様子が異なる。C の周期の30倍の時間，particle path を追跡したのであるが，共鳴現象が期待された C_1 より C_2 の方がはるかに乱れている。これをもっと詳しく見るため，各座標の時間変動をプロットしたのが図4～6である。C_1，C_2 とも C の周期や外力の周期よりはるかに長い周期を持つことがわかる。さらに 0.1 秒おきに 409.6 秒記録した各座標データをフーリエ変換してみた。（図7～9）　これらを較べてみると次の様

な特徴がわかる：

- C_1もC_2もCに対して長い周期の変動が加わる。特にC_2の方が影響を受けやすい。直観的には、C_1の方が共鳴を受けて不安定になりやすいと思われる。実際、図7と図8を較べればわかるようにC_1はある種の共鳴現象とみられるが不安定ではない。他方図9を見ればC_2が共鳴現象でないことは明らかである。
- 図4−6をみて、各座標の変動の受け方の違いに気がつく。C_1では$T = 16.0$の振動に長周期振動が加わってmodulateされているとみえるが、C_2では長周期変動の上に短い周期変動が小さく重ねられている。

以上よりさらに2つの数値計算をした。

i) 加えた外力の周期ごとにparticleの位置をPlotする。(図10, 11)

ii) $\varphi=0.0$ と $\varphi=\pi$ での xz平面を断面とするPoincaré mapをPlotする。(図12, 13)

図10-2をみるとわかるとおり、$t = 16.1n$ $(n=0,1,2 \ldots)$でparticleをPlotすると何の構造もみえないが $t=16.0n$でPlotすると(図10-1)、見事に閉曲線を得る。これはC_1が共鳴

現象と解釈され得ることを示している。図11をみればやはりC_2は共鳴現象ではなく予測不能なカオス的振舞を示している。図10,11のような操作は時間軸に周期的な断面を置くPoincaré mapであるが，断面が物理空間（3次元）のためまだ見にくい。そこでii)のような空間的Poincaré mapをとった。するとあれほど異なってみえたC_1，C_2に重要な共通点があることがわかる。すなわち両者ともある曲面上に乗っているということである。（図12，13）．（注；この主張はすべての角度方向に断面をとらなければ正当化できない。ここには載せないが実際そうなっている。）．ただし，C_1，C_2の違いは歴然としていてC_2の方はx-z平面に大きく広がっていて$x<0$の領域にも伸びている。さて，このPoincaré mapでも実はまだ3次元性をもつ。すなわち，今度は時間軸方向は浮いてしまうからである。そこで，図14，15のような解析をした。図中，$x_p(n)$はn回目にx-z平面を横切ったときのx座標であり，$t \bmod T$は，横切った時刻t（正確にはn回目に横切った時刻t_n）を振動の周期Tで割った余りである。図14-1,2を見ればわかるようにC_1はほぼ23回ごとにx-z平面の同じ点の付近を通る。この周期は144.27 [sec]である。一方図15をみると，C_2の方は全く周期性がなくカオス的振舞を示すことがわかる。

§5 まとめ

今回の計算で以下のことがわかった。

- 中立安定な周期軌道 C（周期 T）に時間周期的な摂動を加えると摂動の周期が T と同じな時は、particle path T_1 は物理空間内だけでは不規則にみえるが、Poincaré map をとって自由度を下げると長周期な modulation を受けている。
- 摂動の周期が T と整数比であっても、カオス的振舞を示す。

今後は摂動の周期をいろいろ変化させた時の particle path の様子、特に周期性からカオス性への分枝を調べる必要がある。

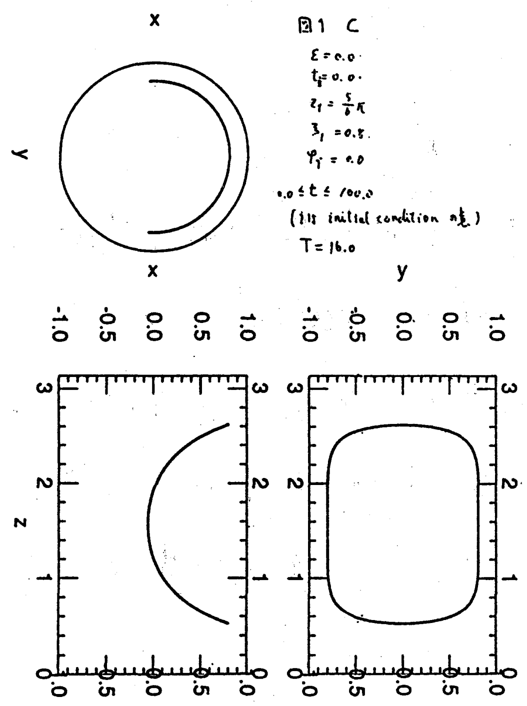


図1 C
$\varepsilon = 0.0$
$t_1 = 0.0$
$z_1 = \frac{5}{6}\pi$
$\xi_1 = 0.8$
$\varphi_1 = 0.0$
$0.0 \le t \le 100.0$
(は initial condition を表.)
$T = 16.0$
x
y
z
-1.0
-0.5
0.0
0.5
1.0
0
1
2
3

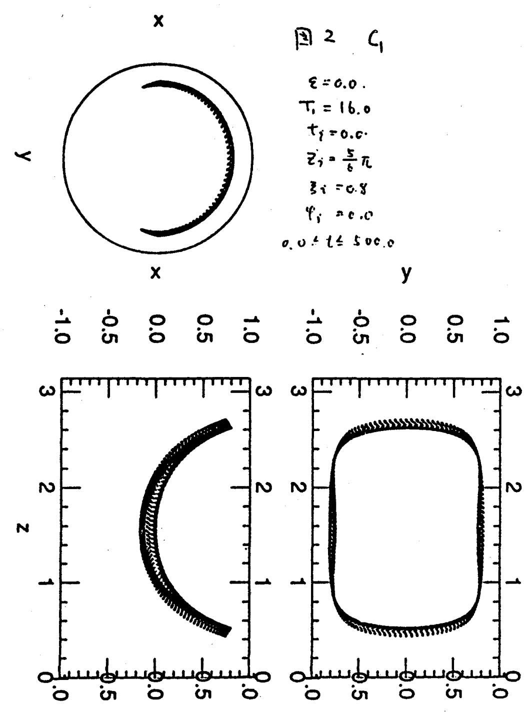


図2 C_1
$\varepsilon = 0.0$
$T_1 = 16.0$
$t_1 = 0.0$
$z_1 = \frac{5}{6}\pi$
$\xi_1 = 0.8$
$\varphi_1 = 0.0$
$0.0 \le t \le 500.0$
x
y
z
-1.0
-0.5
0.0
0.5
1.0
0
1
2
3

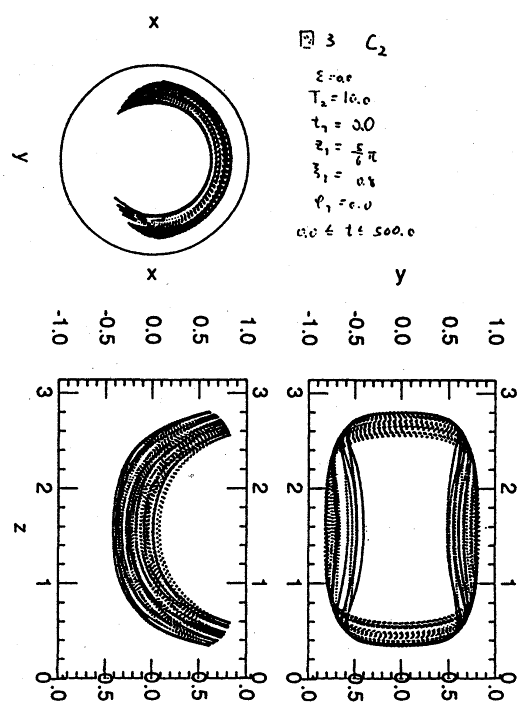


図3 C_2
$\varepsilon = 0.0$
$T_2 = 16.0$
$t_1 = 0.0$
$z_1 = \frac{5}{6}\pi$
$\xi_1 = 0.8$
$\varphi_1 = 0.0$
$0.0 \le t \le 500.0$
x
y
z
-1.0
-0.5
0.0
0.5
1.0
0
1
2
3

図4-1 ; C

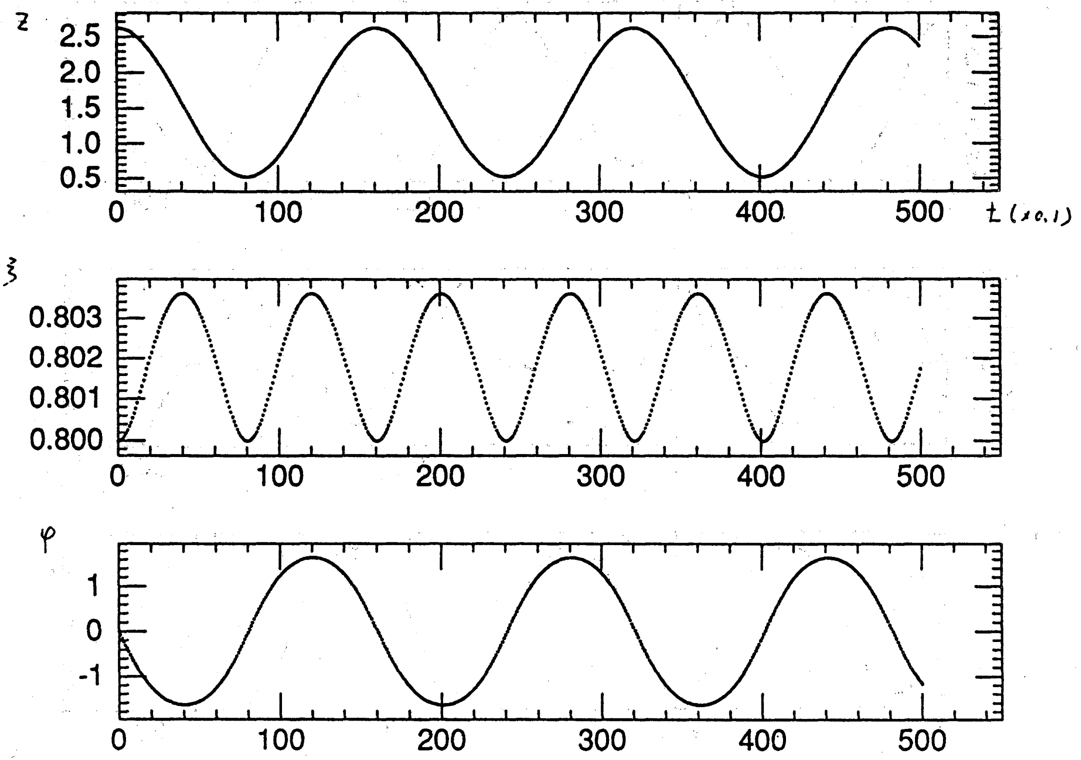

z
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
100
200
300
400
500
t (×0.1)
ξ
0.803
0.802
0.801
0.800
φ
1
0
-1

図4-2 ; C

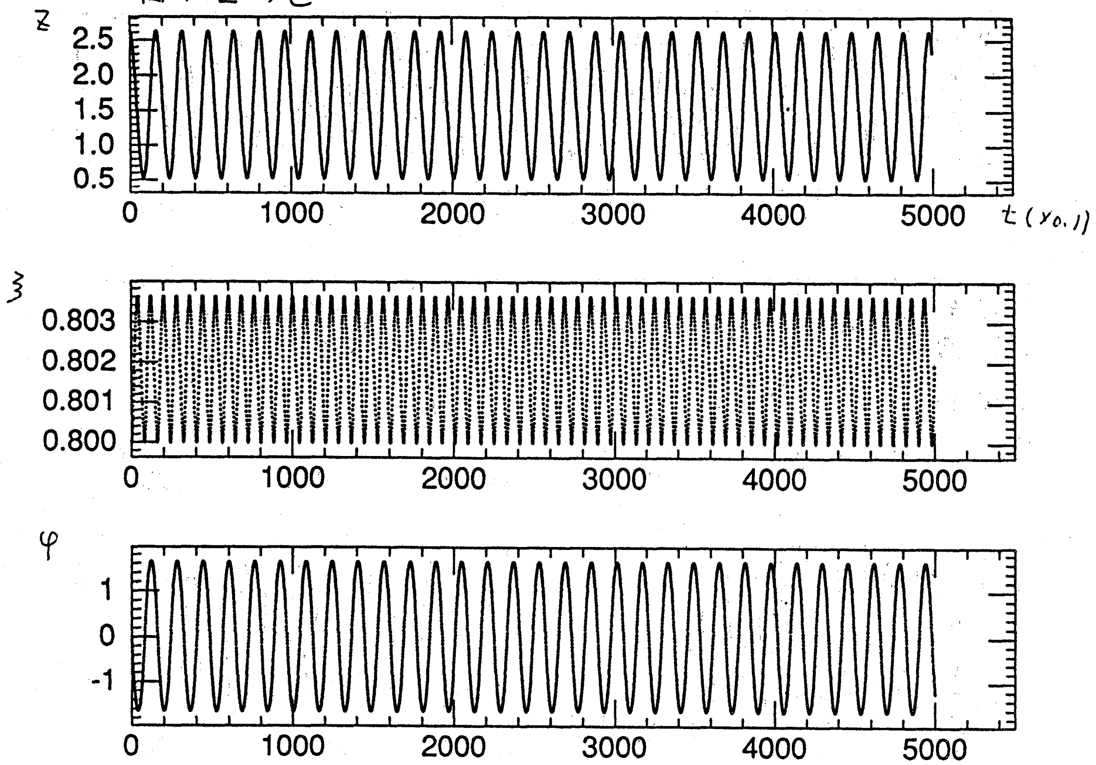
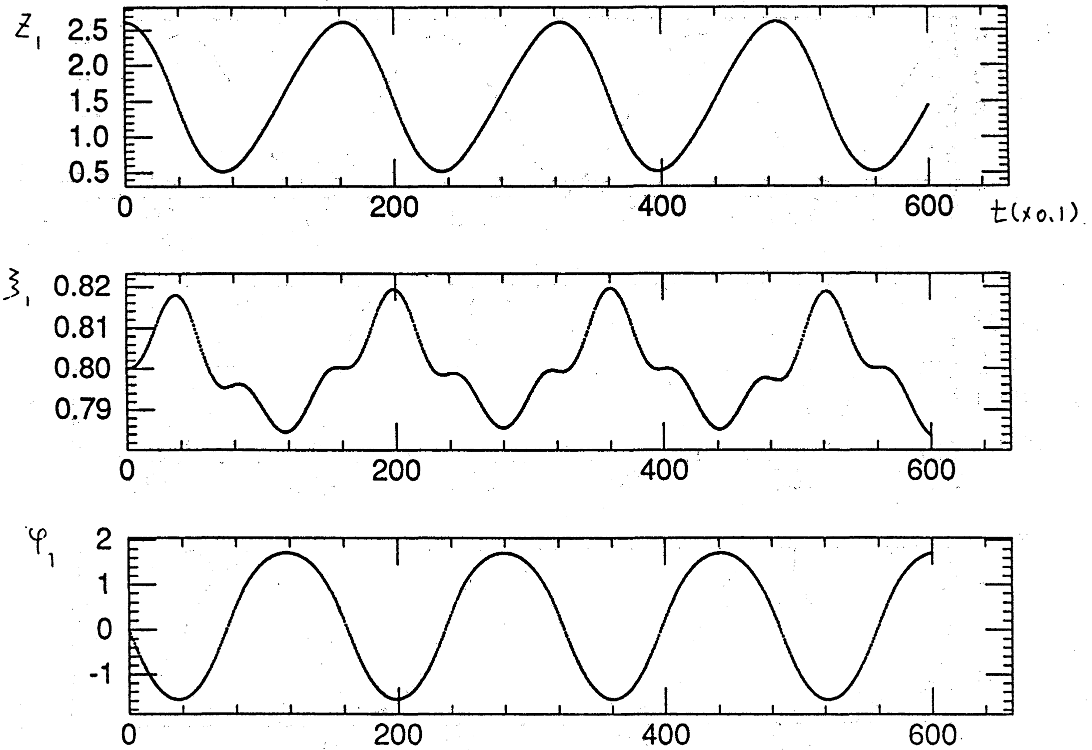
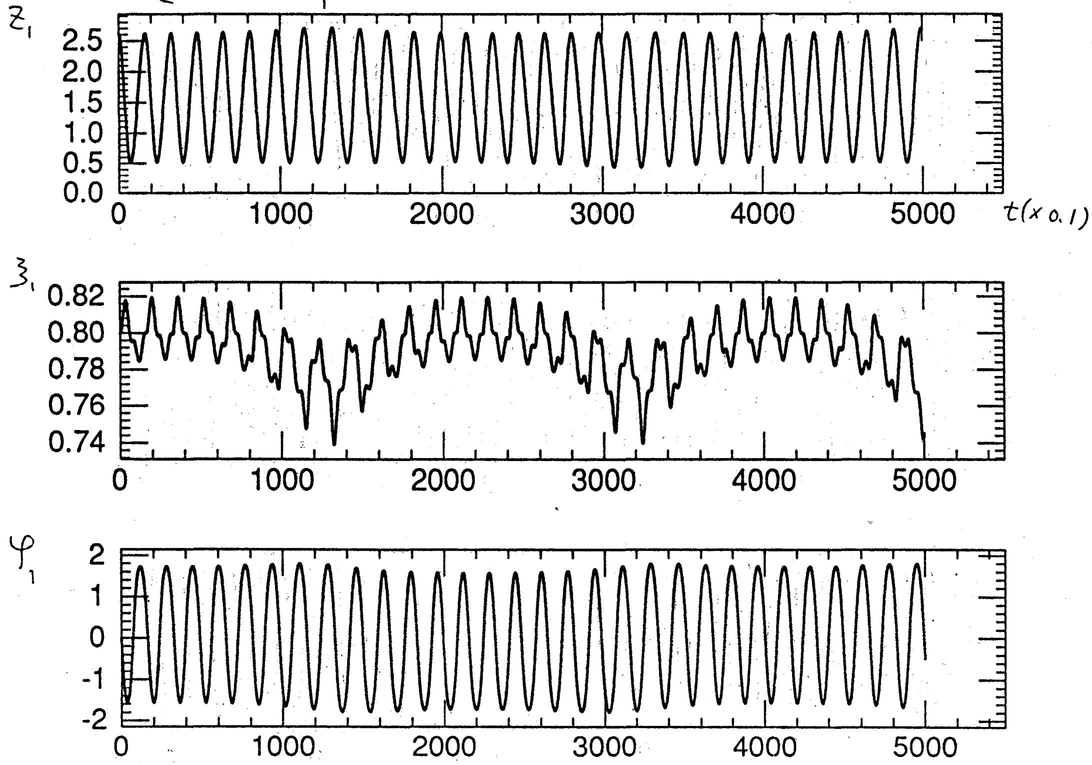

z
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
1000
2000
3000
4000
5000
t (×0.1)
ξ
0.803
0.802
0.801
0.800
φ
1
0
-1

図 5-1 : C_1



Z1
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
200
400
600
t(×0.1)
ξ1
0.82
0.81
0.80
0.79
φ1
2
1
0
-1

図 5-2 C_1



Z1
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0
1000
2000
3000
4000
5000
t(×0.1)
ξ1
0.82
0.80
0.78
0.76
0.74
φ1
2
1
0
-1
-2

図6-1 ; C_2

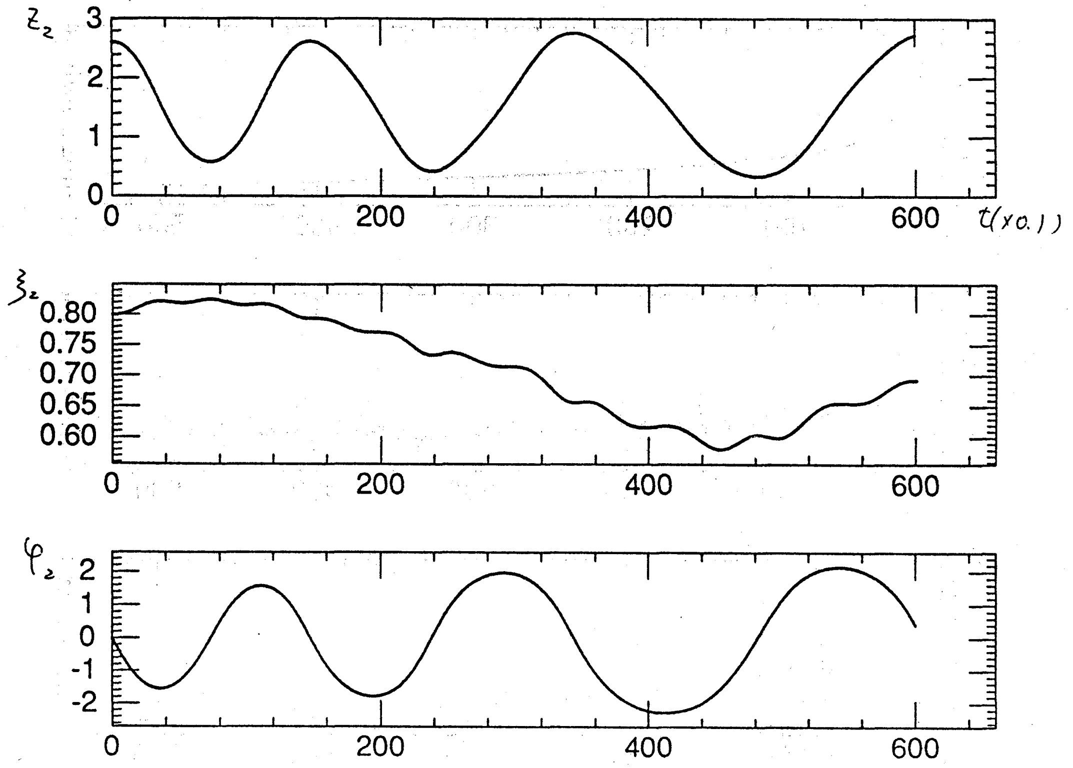


図6-2 ; C_2

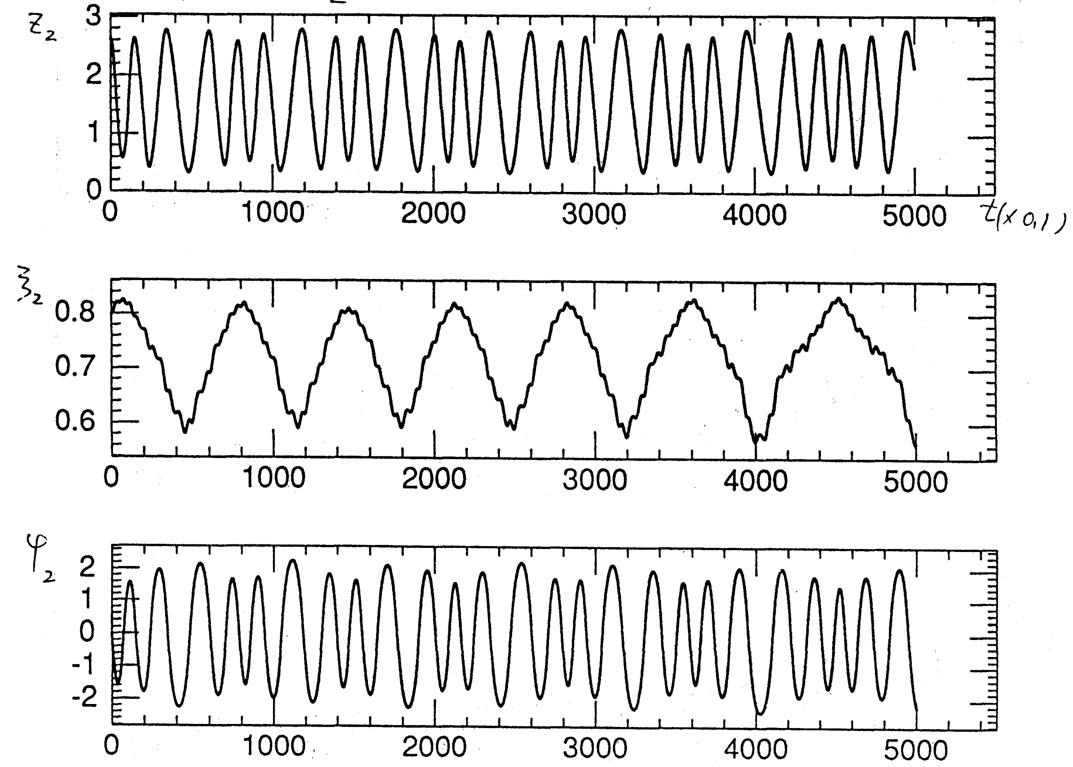


図7 ; C

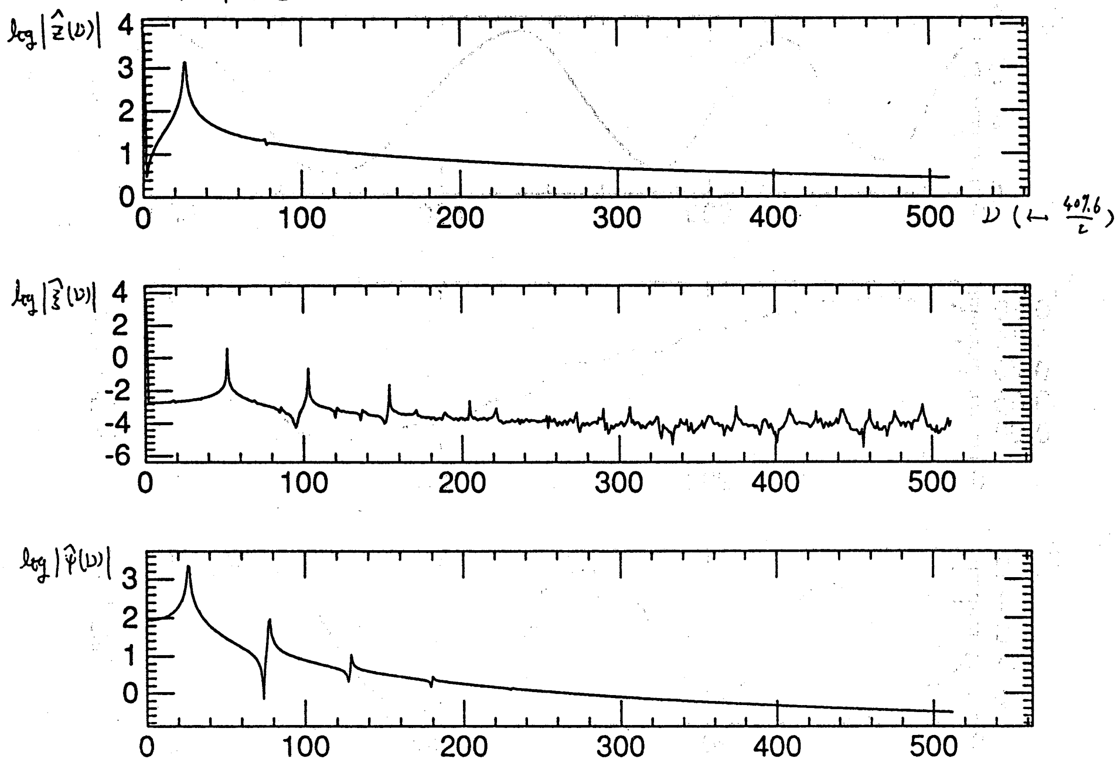


図8 : C_1

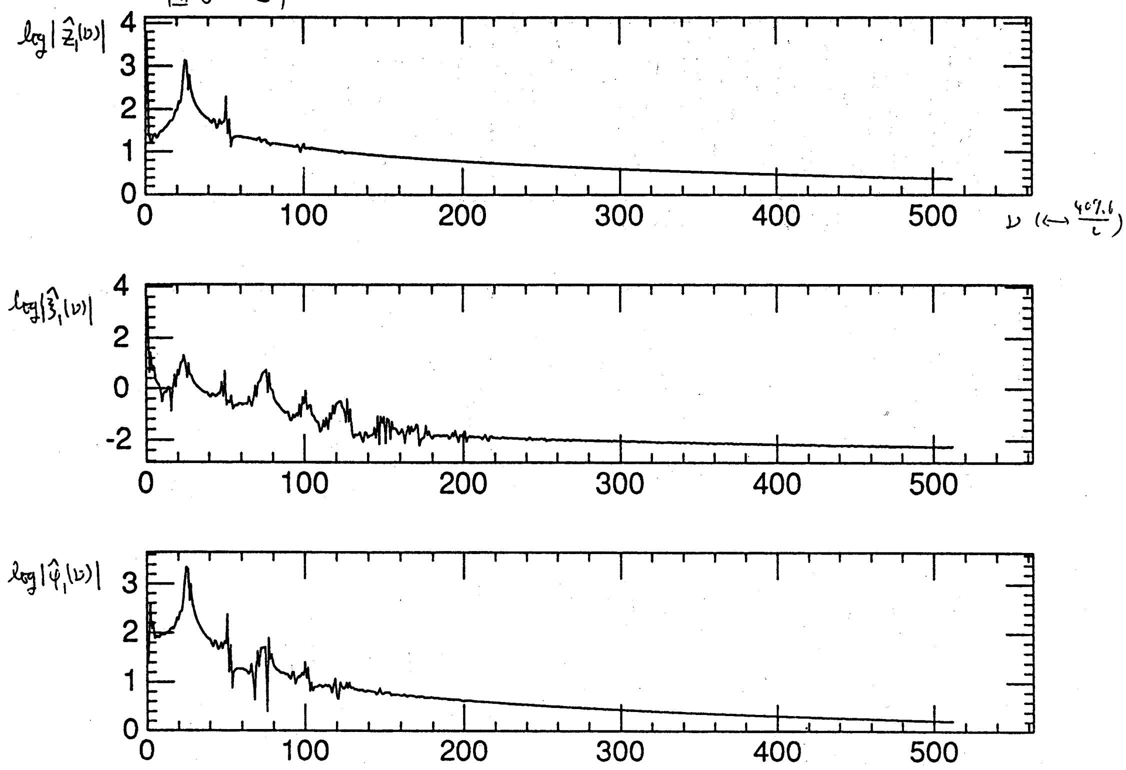
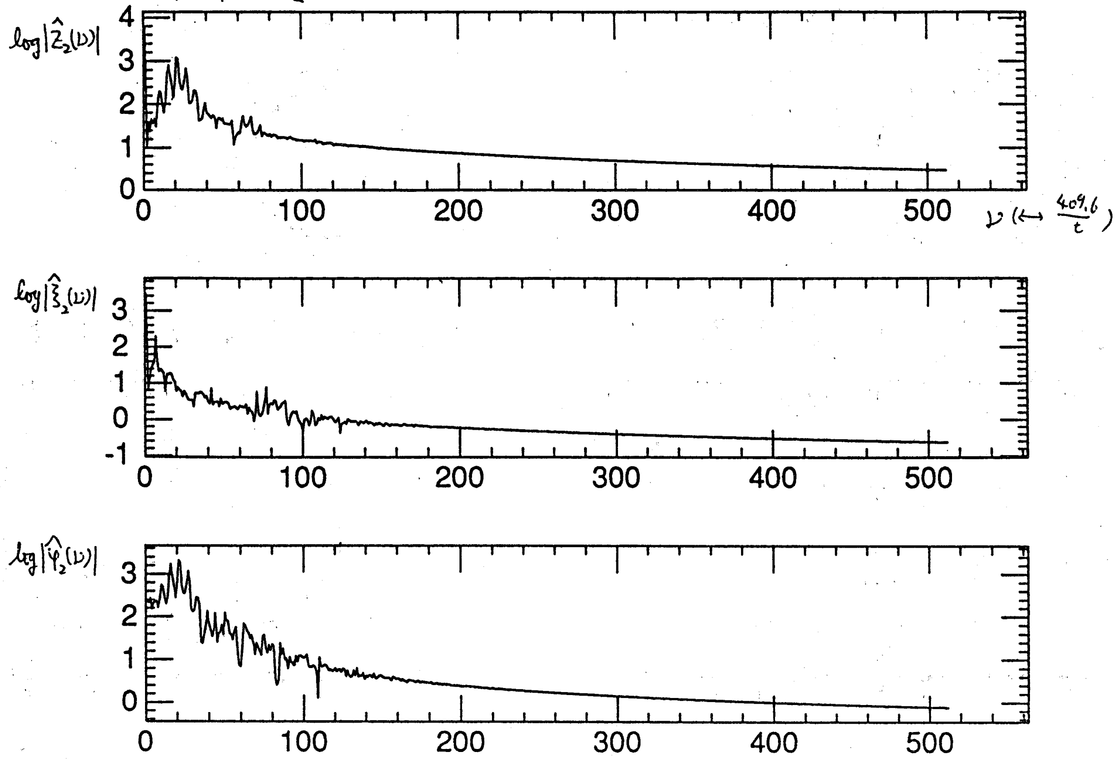


図9 ; C_2


$\log|\hat{Z}_2(\nu)|$
$\nu\ (\leftrightarrow \frac{409.6}{t})$
$\log|\hat{\xi}_2(\nu)|$
$\log|\hat{\varphi}_2(\nu)|$

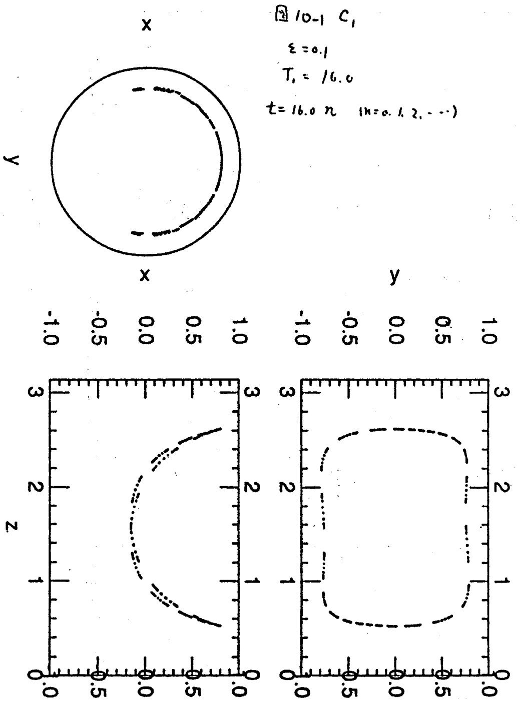


図10-1 C_1
$\varepsilon = 0.1$
$T_1 = 16.0$
$t = 16.0n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$

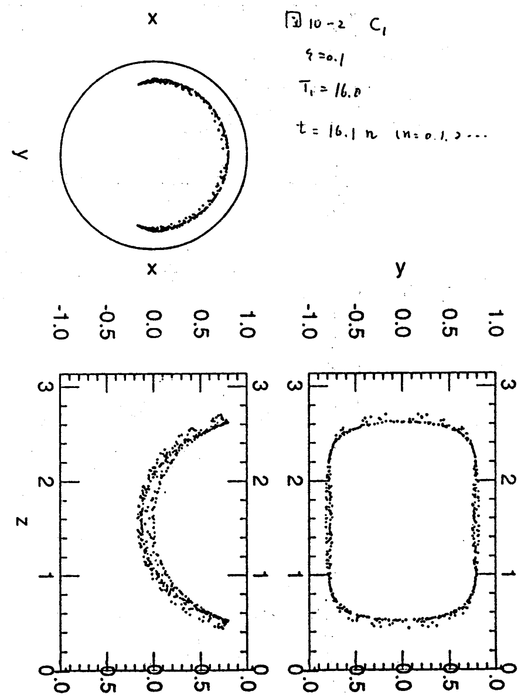


図10-2 C_1
$\varepsilon = 0.1$
$T_1 = 16.0$
$t = 16.1n$ $(n = 0, 1, 2 \cdots$

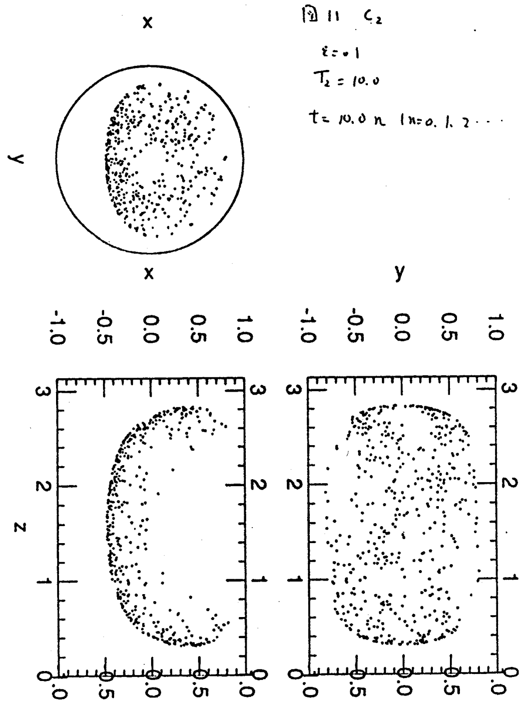


図11 C_2
$\varepsilon = 0.1$
$T_2 = 10.0$
$t = 10.0n$ $(n = 0, 1, 2 \cdots$

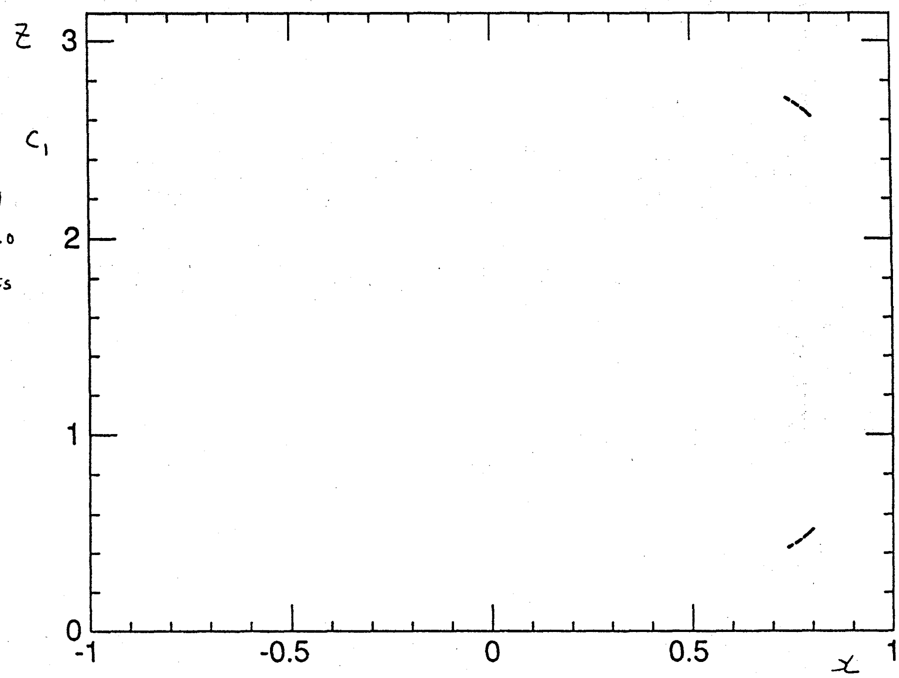


図12 C_1

$\varepsilon=0.1$

$T_1=16.0$

500 pts

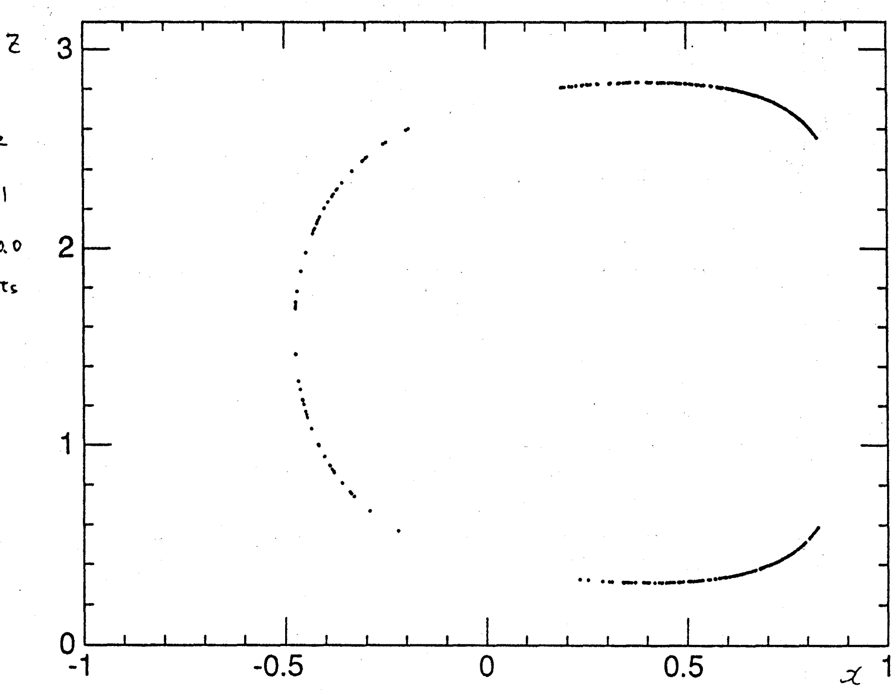


図13, C_2

$\varepsilon=0.1$

$T_1=10.0$

500 pts

図14-1; C1

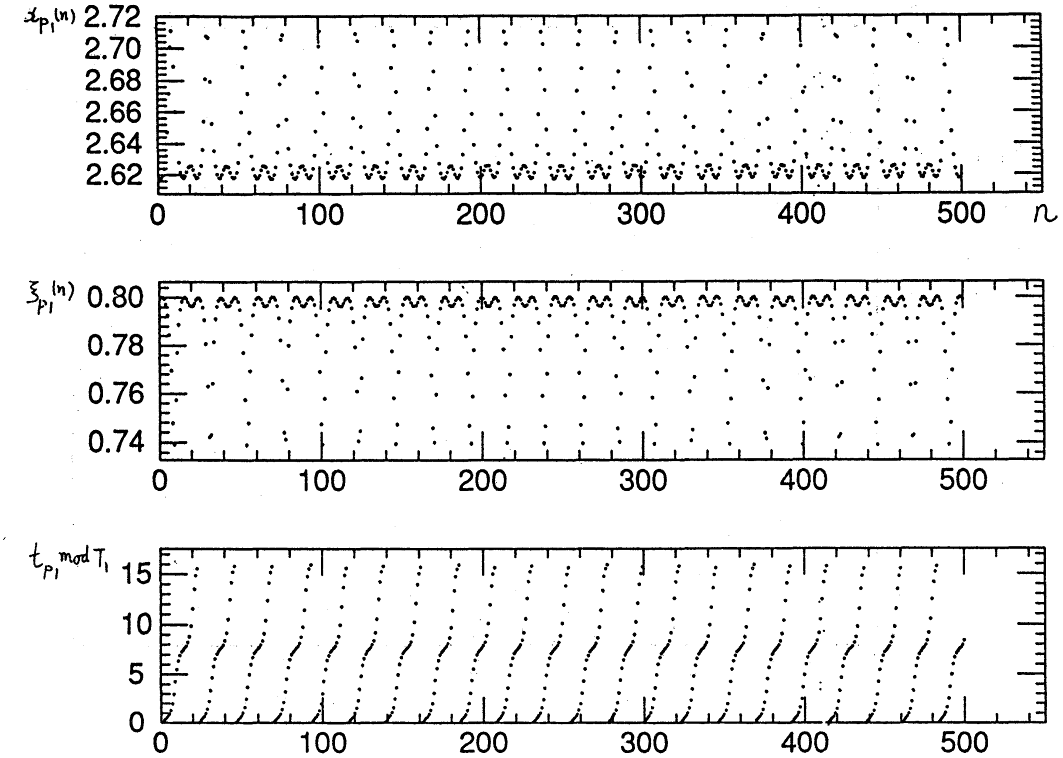


図14-2; C1

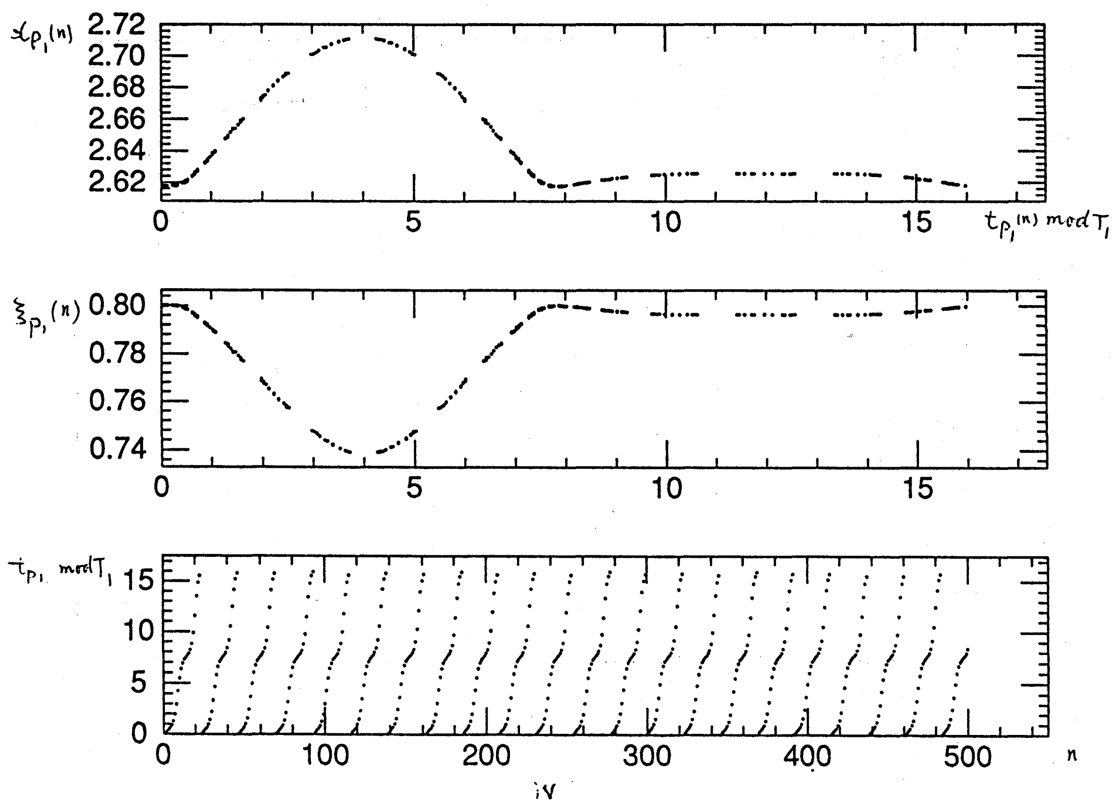


図 15.1 : C_2

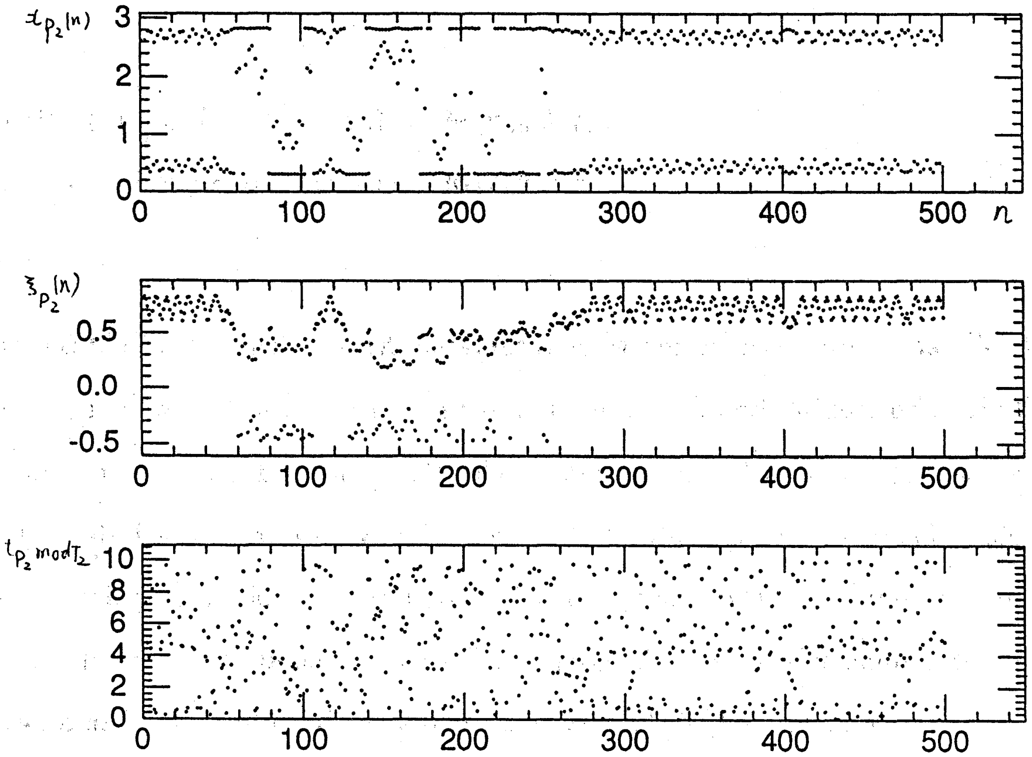


図 15.2 : C_2