

引き伸ばし効果を持つ厳密解について

京大・理 高岡正憲 (Masanori Takaoka)

引き伸ばし効果をもつ解を用いて、既に知られていること  
も含め注意を要することについて、コメントをする。

Key Words: Strain, Viscosity, 2-D Structure.

内容

引き伸ばし効果と 2 次元構造を持つ 3 次元非圧縮 Navier-  
Stokes 方程式の解

- i) 解の導出と  $\bar{u}_3$  の役割
- ii) つなぎ替え、特に渦面と等渦度面との違い、につい  
てのコメント
- iii) \*引き伸ばし効果とエンストロフィー等との関係  
\*有限時間に代数的発散をする引き伸ばし流について  
のコメント

まとめ

同様にして、2 次元非圧縮 Navier-Stokes 方程式の解、但し  
空間二方向に周期、も得られるが、これについては Ref.1を  
見て下さい。

我々は、既に三輪型 (Ref.2) や二つの渦輪 (Ref.3) について、渦のつなぎ替えの機構を数値シミュレーションを中心に渦の非線形ダイナミクスを調べてきた。その中で、実験では観測し難い構造や、実験で用いられるスカラー場と渦度場との違い等も指摘してきた。より詳しく (解析的に) 調べる為のヒントになればと思い、厳密解を考えることにした。今までになされた解析的な仕事として、例えば Takaki と Hussain (Ref.4) は、対称性と打ち切りに対する適当な仮定の下に場を局所展開して、つなぎ替えを表す近似式を得ている。また、Saffman (Ref.5) は圧力の働きに着目し、楕円渦に基づくモデル式で説明を試みている。(今回の解を用いてのつなぎ替えに関するより細かい話は、別に記したい。また、つなぎ替えの定義についての議論は、Ref.6 を参照していただきたい。)

#### i) 解の導出と $\bar{u}_3$ の役割

3次元非圧縮の流れを表す基礎方程式としては、渦度方程式；

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega + (\omega \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \omega, \quad (1)$$

非圧縮連続の式；  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0,$  (2)

渦度の定義式；  $\omega = \text{rot } \mathbf{u}$ , (3)

である。

ここでは、求める解に対して次の各効果が調べられることを要請する。(イ) 粘性の効果：これは非粘性における Helmholtz の渦定理からも分かるように、つなぎ替えに対して必要不可欠である。(ロ) 渦について空間 2 次元以上の構造：特につなぎ替え等を調べるのには、渦構造の変化があることが望ましい。(ハ) 引き伸ばしの効果：(これは無くてもよいが、) 渦度場を強(弱)め、しかもつなぎ替え同様 3 次元特有のものなので、3 次元での渦ダイナミックスの一側面を調べるのが可能であるかも知れない。

まず、一様引き伸ばし流 ( $u_i = A_i(t)x_i$ ,  $A_1 + A_2 + A_3 = 0$ ; 線形解) を考え、これに空間依存性が 2 次元以上である (線形) 解を重ね合わせる ( $u_i = A_i(t)x_i + \bar{u}_i$ ) ことを考える。もちろん、基礎方程式の非線形性のために、可能な解は限られる。ここで既に、Kambe (Ref.7) に於いても用いられている、次の様な変数変換をすると見通しがよい。

$$\hat{u}_i = \bar{u}_i E_i, \quad \hat{\omega}_i = \omega E_i, \quad \hat{x}_i = x_i E_i \quad (4)$$

ここに、 $E_i(t) = \exp(-\int^t A_i(s) ds)$  である。

この変数を用いると (1)-(3) の基礎方程式はそれぞれ次のように書ける。

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial t} = -\tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial \tilde{x}_j} + \tilde{\omega}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j} + \nu E_j^2 \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_i}{\partial \tilde{x}_j^2}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_j} = 0 \quad (6)$$

$$\tilde{\omega}_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} \tilde{u}_k E_k^{-2}. \quad (7)$$

これらの式は、粘性項や  $\tilde{\omega}_i$  と  $\tilde{u}_i$  との関係は異なるが非線形項はもとの式(1)-(3)と同様であり、その非線形効果をなくする方法はいくつか知られている。既に(イ)、(ハ)の要請は満たされているので、これらの方法の内(ロ)を満たすものを考えると、解として次のものが得られる。(詳細略)；

$$u_1 = A_1(t)x_1 + \bar{u}_1(t), \quad u_2 = A_2(t)x_2 + \bar{u}_2(t), \quad (8a, b)$$

$$u_3 = A_3(t)x_3 + \bar{u}_3(x_1, x_2, t) \quad (8c)$$

$$= A_3 x_3 +$$

$$\frac{E_3}{4\nu\pi\sqrt{D_1 D_2}} \int d\xi_1 \int d\xi_2 \psi(\xi_1, \xi_2) \exp\left\{-\frac{(x'_1 E_1 - \xi_1)^2}{4\nu D_1} - \frac{(x'_2 E_2 - \xi_2)^2}{4\nu D_2}\right\}$$

$$\omega_1 = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_2}, \quad \omega_2 = -\frac{\partial u_3}{\partial x_1} = -\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_1}, \quad \omega_3 = 0, \quad (8e, f, g)$$

ここに  $x'_1 = x_1 - E_1^{-1} \int^t \bar{u}_1 E_1 ds$ ,  $x'_2 = x_2 - E_2^{-1} \int^t \bar{u}_2 E_2 ds$ ,  
 $D_i(t) = \int^t E_i(s)^2 ds$  ( $i=1, 2, 3$ )で、 $A_i(t)$ ,  $\bar{u}_1(t)$ ,  $\bar{u}_2(t)$ は、  
 時間の任意関数である。

上式 (8e, f) で、 $(\omega_1, \omega_2)$  と  $\bar{u}_3$  との関数関係が、2次元の速度と流れ関数とのそれに対応している。つまり、 $\bar{u}_3$  の等値面 (線) は渦面 (線) を与えることになる。

渦のダイナミクスを調べる時、数値シミュレーションにおいてよく用いられるものとして、等渦度面がある。しかしながら、この運動は渦面や渦線のそれとは異なることに注意しなければならない。Helmholtz の渦定理が非粘性では起こらないと言っているのは、後者についてのつなぎ替えである。

#### ii) つなぎ替えについてのコメント

まず最初につなぎ替えの代表的な例として、二つの渦輪の直接数値シミュレーションの結果 (Ref.6) を図1に示す。これは、進行方向から見た等渦度面の時間発展で、ブリッジやスレッド等の代表的な構造が見える。i)で得た解に、これとよく似た初期条件、 $\psi(\xi_1, \xi_2) = \delta(\xi_1 - 1, \xi_2) + \delta(\xi_1 + 1, \xi_2)$ 、( $\delta$ はデルタ関数)、を与えた結果を図2に示す。先にも指摘したようにこの解に於いては、一般には難しいとされる渦面 (線) が、 $\bar{u}_3$  の等値面 (線) で与えられる。図は  $x_1 x_2$  面に平行な断面内での場の様子であり、(a)は  $\bar{u}_3$  の等値面 (線) 即ち渦面 (線)、(b)は等渦度面、(c)は渦度ベクトルである。

等渦度面と渦度ベクトルの時間発展は、数値シミュレーションの結果と似ているが、渦面のそれは違った印象を与える（例えば、図2-2(b)中の'Bridge'や'Thread'）。しかし、(a)の方がより自然な感じに見える（これはもちろん線形拡散の為である。）。場の構造が二次元以下の時、(a)の場と(b)(c)の場は一方データーから他方を推察できることも注意しておく。

更に、渦面と等渦度面の違いをはっきりと示すために、引き伸ばし効果を入れて計算したのが図3である。この図は、 $x_1, x_2$ 両方向に対称な初期条件、 $\psi(\xi_1, \xi_2) = \delta(\xi_1 - 1, \xi_2) + \delta(\xi_1 + 1, \xi_2) - \delta(\xi_1, \xi_2 - 1) - \delta(\xi_1, \xi_2 + 1)$ 、で  $A_1 = -A_2 = 1$ 、つまり  $x_1$ 方向に伸び  $x_2$ 方向に縮むような場合である。等渦度面(b)と渦度ベクトル(c)を見ると、四つの渦がつながって横方向の構造ができてくるように見える。しかし、渦面(a)で見ると寧ろ縦方向につながぎ替えが起こっていることが分かる。このことから、数値シミュレーションでよく用いられている等渦度面による表現が、必ずしも渦度（渦面）のダイナミクスに対応していなく（等渦度面と渦度ベクトルの図から渦面の運動を推察することはむづかしく）、渦線などによっても確認する必要があることがわかる。

iii)引き伸ばしとエンストロフィー等との関係

初期関数として周期関数、 $\psi(\xi_1, \xi_2) = \cos(\xi_1) + \cos(\xi_2)$ 、を  
考える。この時、速度と渦度は次のように与えられる。

$$\mathbf{u} = (A_1 x_1, A_2 x_2, A_3 x_3 + \alpha E_3 \cos(x_1 E_1) + \beta E_3 \cos(x_2 E_2)), \quad (9a)$$

$$\boldsymbol{\omega} = (-\beta E_1^{-1} \sin(x_2 E_2), \alpha E_2^{-1} \sin(x_1 E_1), 0), \quad (9b)$$

$$\text{但し、} \alpha(t) = \exp(-\nu D_1(t)), \quad \beta(t) = \exp(-\nu D_2(t)). \quad (10)$$

更に、一周期あたりの循環、エネルギー、エンストロフィー  
を次のように定義する。

$$\Gamma_{1p} = \int_0^{2\pi} \pi E_2^{-1} dx_2 \int_0^{E_3^{-1}} dx_3 \quad \omega_1 = -2\beta, \quad \Gamma_{2p} = \int_0^{2\pi} \pi E_1^{-1} dx_1 \int_0^{E_3^{-1}} dx_3 \quad \omega_2 = 2\alpha, \quad (11a)$$

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 2\pi E_1^{-1} dx_1 \int_0^{2\pi} 2\pi E_2^{-1} dx_2 \int_0^{E_3^{-1}} dx_3 \quad \bar{u}^2 = \pi^2 E_3^2 (\alpha^2 + \beta^2), \quad (11b)$$

$$Q_p = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 2\pi E_1^{-1} dx_1 \int_0^{2\pi} 2\pi E_2^{-1} dx_2 \int_0^{E_3^{-1}} dx_3 \quad \omega^2 = \pi^2 (\alpha^2 E_2^{-2} + \beta^2 E_1^{-2}). \quad (11c)$$

次に、引き伸ばし効果の時間依存性の代表例として、ここ  
では特に一定  $A_i = \text{const}$  の場合と代数的発散  $A_i \propto 1/(t_0 - t)$  の場  
合とを考える。

まず、Ref.8でも指摘されている変換：

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} \left[ \frac{t_0}{t_0 - \hat{t}} \right]^{1/2}, \quad t = t_0 \log \left[ \frac{t_0}{t_0 - \hat{t}} \right] \quad (12)$$

を考えると、速度と渦度は：

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \left[ \frac{t_0 - \hat{t}}{t_0} \right]^{1/2}, \quad \boldsymbol{\omega} = \hat{\boldsymbol{\omega}} \left[ \frac{t_0 - \hat{t}}{t_0} \right] \quad (13)$$

となり、渦度方程式は：

$$\frac{\partial \hat{\omega}_i}{\partial t} = -\hat{A}_j \hat{x}_j \frac{\partial \hat{\omega}_i}{\partial \hat{x}_j} - \hat{u}_j \frac{\partial \hat{\omega}_i}{\partial \hat{x}_j} + \hat{\omega}_i \hat{A}_i + \hat{\omega}_j \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{x}_j} + \nu \hat{\nabla}^2 \hat{\omega}_i, \quad (14a)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \omega_i}{\partial t} = - \left[ \hat{A}_j \exp\left(\frac{-t}{t_0}\right) + \frac{1}{2t_0} \right] x_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} - \bar{u}_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} + \omega_i \left[ \hat{A}_i \exp\left(\frac{-t}{t_0}\right) - \frac{1}{t_0} \right] + \omega_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \nu \nabla^2 \omega_i, \quad (14b)$$

となる。

故に、渦度ベクトルと渦度の依存する空間ベクトルとが直交しているような解（例えば、Burgers渦 (Ref.9)、渦層の解 (Ref.8)等）においては、渦度ベクトルに平行な成分を  $\hat{A}_j = \frac{t_0 A_j + 1}{t_0 - \hat{t}}$ 、それに垂直な成分を、 $\hat{A}_x = \frac{t_0 A_x - 1/2}{t_0 - \hat{t}}$  とすることで、定常な引き伸ばしと  $1/t$  の代数的発散のある引き伸ばしとが互いに対応がつく。しかし、いまの解に於いてはこれは成り立たない。

(イ)一定の引き伸ばしの時：渦方向に一定の引き伸ばし ( $A_1 = -A_2 = A > 0$ )があると、エンストロフィーは図4のようにピークを持つ。このピークの時間と値は、次のように評価され、

$$t_* \approx \frac{1}{2A} \log\left(\frac{2A}{\nu}\right), \quad Q_P \approx \frac{A}{\nu} \exp\left(\frac{\nu}{A} - 1\right) \quad (15)$$

非粘性極限 ( $\nu \rightarrow 0$ )で、 $\varepsilon(\text{peak}) = 2\nu Q_P(\text{peak})$  は引き伸ばしに依存した有限の値 ( $2A/e$ )となる。



また、Aを固定した時のエネルギー、エンストロフィー、循環の粘性依存性を調べると、図5(a)-(c)のようになる。

図中の実線、破線、一点鎖線...は、それぞれ  $\nu=10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3} \dots$  のときのものである。

(ロ)有限時間における代数的発散のある時： $A_i = \frac{a_i}{t_0 - t}$  ( $i=1, 2$ ),  $A_3=0$ とすると、 $\nu \neq 0$ で  $t \rightarrow t_0$  のとき渦度  $\omega_1, \omega_2$  の変化は、

$a_2$	.....	$-\frac{1}{2}$	.....	0	.....	$\nu t_0$	.....					
$a_1$							$\nu t_0$	.....				
.....												
$-\frac{1}{2}$												$\omega_1 \rightarrow 0$ $\omega_2 \rightarrow F$
.....												$\omega_1 \rightarrow 0$ $\omega_2 \rightarrow I$
0												$\omega_1 \rightarrow F$ $\omega_2 \rightarrow I$
.....												
$\nu t_0$		$\omega_1 \rightarrow F$ $\omega_2 \rightarrow 0$	$\omega_1 \rightarrow I$ $\omega_2 \rightarrow 0$	$\omega_1 \rightarrow I$ $\omega_2 \rightarrow F$		$\omega_1 \rightarrow I$ $\omega_2 \rightarrow I$						
.....												

図説：' $\omega_i \rightarrow F (I)$ ' は、 $t \rightarrow t_0$  のとき  $\omega_i$  が有限 (Finite) の値

にとどまるか、無限大 (Infinite) に発散するかを表す。ハッティングされた領域では、両成分ともゼロになる。

また、 $a_1 = -a_2 = a, A_3 = 0$  のときエネルギーやエンストロフィーの振舞いは次のようになる。

a	$E_p$	$Q_p$
$a=0$	$F \sim \exp(-2\nu t_0)$	$F \sim \exp(-2\nu t_0)$
$0 <  a  < \frac{1}{2}$	$F \sim \begin{matrix} \exp(-2\nu t_0 / (2a+1)) \\ + \\ \exp(2\nu t_0 / (2a-1)) \end{matrix}$	$I \sim \frac{1}{(t_0 - t)^{2 a }}$
$ a  = \frac{1}{2}$	$F \sim \exp(-\nu t_0)$	$2\nu t_0 > 1$ $I \sim (t_0 - t)^{\nu t_0 - 1/2}$
		$2\nu t_0 < 1$ $0 \sim (t_0 - t)^{\nu t_0 - 1/2}$
$ a  > \frac{1}{2}$	$F \sim \exp\left(\frac{-2\nu t_0}{2 a +1}\right)$	$0 \sim (t_0 - t)^{ a }$

エネルギーは常に有限だが、エンストロフィーは引き伸ばしの強さ  $a$  により有限、発散、ゼロと色々な変化を示す。

#### まとめ

引き伸ばし効果と2次元構造を持つ3-D非圧縮Navier-Stokes方程式の解を調べた。

1.2次元的側面しか持たないが、渦のつなぎ替えを行なう。

(第二つなぎ替えや Head-Tail構造は現われない。)

渦面(渦線)と等渦度面(や渦度ベクトル)の絵から得る印象が異なるので、それらの関係や使い方・に注意する必要がある。特に、引き伸ばし効果があると渦度が強められるので、その違いが顕緒となる。

2. エンストロフィーのピークに関して、その時刻と値の粘性依存性は、 $t \propto -\log(\nu)$ ,  $Q_{peak} \propto 1/\nu$ となり3次元乱流の数値計算におけるそれと一致するが、引き伸ばしの強さ  $A$  に依っているので、そのままでは対応しない。

他の解と異なり、引き伸ばしが一定  $A_i = \text{const}$  の場合と代数的発散  $A_i \propto 1/(t_0 - t)$  の場合との間の変換ができない。

#### 参考論文 (References)

1. M.Takaoka, J. Phys. Soc. Jpn. **59** 2365 (1990)
2. S.Kida and M.Takaoka, Fluid Dyn. Res. **3** 257 (1988)
3. S.Kida, M.Takaoka and F.Hussain, *to be published in J. Fluid. Mech.*
4. R.Takaki and F.Hussain, Fluid Dyn. Res. **3** 251 (1988)
5. P.G.Saffman, J. Fluid Mech. (1990)
6. S.Kida and M.Takaoka, *to be published in J. Phys. Soc. Jpn.*
7. T.Kambe, Fluid Dyn. Res. **1** 21 (1986).
8. J.D.Buntine and D.I.Pullin, J. Fluid Mech. **205** 263 (1989).
9. J.M.Burgers, Adv. Appl. Mech. **1** 171 (1948).

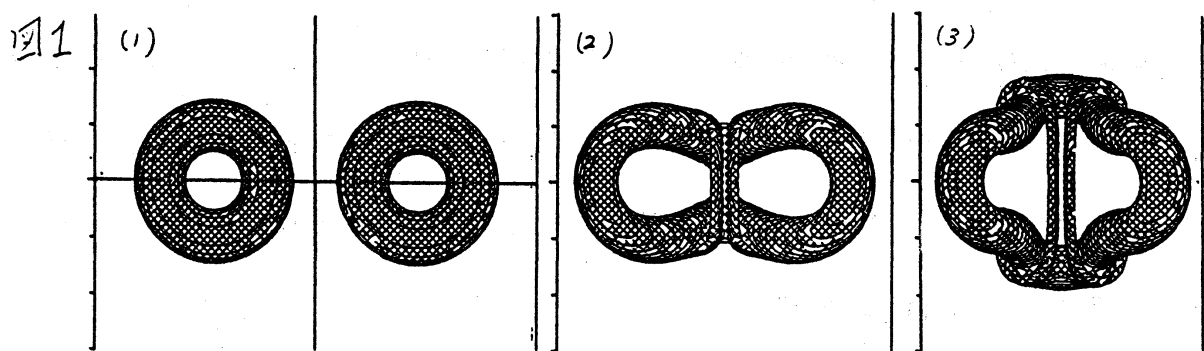


图2-1 (a)  $\bar{u}_3$  (b)  $\omega$  (c)  $\bar{w}$

